掃流砂礫によって生じる抵抗について

京都大学防災研究所　正会員　矢 野 勝 正
京大工業教員養成所　正会員　大同　淳 之

1. は　し　が　き

移動床における抵抗を，発生の原因によって大別すると，固定面の摩擦抵抗，突起物の抗力抵抗および河床面を転動している掃流砂礫によって生じる抵抗にわけられる。これらのうち，摩擦抵抗と抗力抵抗については，従来から多くの研究があり，ある程度明確にされているが，砂礫の転動にともなう抵抗については石原・岩垣・末石[1)]による研究があるのみで，まだ不明の点が少なくない。抵抗の線型性がなりたつとするならば，量の大小にかかわらず，全ての抵抗が算定できなくてはならない。この報告は，主として掃流砂礫の転動にともなって生じるせん断応力の増加に着目して，この量を見積らんとしたものである。

2. 砂礫の回転によって生じるせん断応力

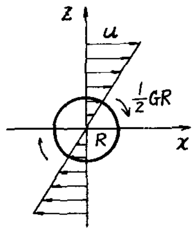
砂礫の転動にともなって，粒子の中心を通る水平面を通して，質量の移動がある。この質量の移動にともなって，水平面の両側で運動量の差が生じ，水平面にはたらくせん断応力となるはずである。この応力の大きさを求めてみよう。

(i)　粒子の回転速度

いま流れが単純せん断流れであると考えると，流速は周知の記号を用いて

$$u = Gz\,,\qquad v = 0\,,\qquad w = 0 \tag{1}$$

ここにG＝速度勾配，と表わすことができる。単純せん断流れでは，応力 τ_{yx} および τ_{xy} が働くから，流体の体積要素は一定の角速度で回転する。回転の角速度はG／2である。このような流れの中に，図―1に示すように座標の原点に半径Rの小さい剛体粒子がおかれたとき，粒子は角速度G／2で回転する。



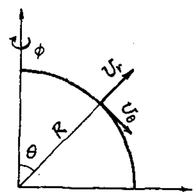
図－1

(ii)　粒子の回転によって生じる回転方向の流量

中心軸のまわりを回転する球の回転方向を ϕ とするとき，ϕ 方向のNavier-Stokesの運動方程式は，流れが定常で，r方向および θ 方向の流速を0と考えると，つぎの式がなりたつ。

$$0 = \mu\left(\Delta^2 v_\phi - \frac{v_\phi}{r^2\sin^2\theta}\right)$$

ここに $\Delta_2 = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2\sin^2\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial}{\partial\theta}\right)$　(2)



図－2

さらに　$\partial v_\phi/\partial\theta = 0$　として(2)式を整理すると，

$$\frac{\partial^2 v_\phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial r} - \frac{c v_\phi}{r^2} = 0 \qquad c = \frac{1}{\sin^2\theta} \tag{3}$$

となる。(3)式の解は，

$$v_\phi = A \cdot r^{-\frac{1}{2}+\sqrt{c+\frac{1}{4}}} + B \cdot r^{-\frac{1}{2}-\sqrt{c+\frac{1}{4}}} \tag{4}$$

で，$-\frac{1}{2}+\sqrt{c+\frac{1}{4}} = m$ とおくと，

$$v_\phi = A r^m + \frac{B}{r^{m+1}} \tag{5}$$

となる。境界条件として，$r=\infty$ で，$v_\phi = 0$，$r = R$（球表面）で $v_\phi = \omega R \sin\theta$，$\omega$＝角速度とすると，$A = 0$，$B = R^{m+1} \cdot \omega R \sin\theta$ となって

$$v_\phi / \omega R \sin\theta = (R/r)^{m+1} \tag{6}$$

と表わせる。したがって，ある角θ上におけるϕ方向の流量$q(\theta)$は，

$$q(\theta) = \int_R^\infty v_\phi dr = \omega R \sin\theta \cdot R^{m+1} \int_R^\infty \frac{dr}{r^{m+1}} = \frac{\omega R^2 \sin\theta}{m} \tag{7}$$

その結果，球の回転にともなって回転軸を含む平面を横切る流量Q'は

$$Q' = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} q(\theta)\, d\theta = 4\omega R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\theta}{-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{\sin^2\theta}+\frac{1}{4}}} d\theta = \alpha\omega R^2, \quad \alpha = 4\times 0.522 \tag{8}$$

となる。$\omega = (1/2)G$ より，1個の粒子の回転によって，粒子の中心軸を含む平面を横切る流量は

$$Q' = (\alpha/2)\cdot GR^2 \tag{9}$$

と表わすことができる。

(ii) 粒子の回転にともなって生じるせん断応力

単位幅あたりの流砂量をq_s，砂粒1個あたりの体積をAR^3，砂礫の流動の速さをv_s，砂礫の平均跳躍高さを z_s とすると，ある断面において河床から z_s の部分の単位面積あたりに存在する粒子の数Kは，

$$K = q_s / (AR^3 \cdot v_s \cdot z_s) \tag{10}$$

である。したがって河床から z_s の部分においては，単位面積あたり$\rho KQ'$のz方向の質量の移動が生じていると考えられる。この質量の移動によって，河床からzの位置における流速をuとするとxの方向に働らくせん断応力は

$$\tau = \rho KQ' u = \rho\cdot\beta\cdot u(du/dz), \quad \beta = (1/2)\cdot K\alpha R^2 \tag{11}$$

と表わすことができる。したがって，河床からz_sの部分では乱れによるせん断応力のほかに，この粒子の回転にともなって生じるせん断応力が加算されると考えることができる。そこで，

$$\tau = \rho\overline{u'v'} + \rho\beta\cdot u\cdot(du/dz) \tag{12}$$

と表わされることになり，乱れによる応力としては混合長理論によるものとすると，混合長ℓを用いて

$$\tau = \rho\ell^2\left(\frac{du}{dz}\right)^2 + \rho\beta\cdot u\cdot\frac{du}{dz} \tag{13}$$

となる。q_s，v_s，z_sはいずれも河床にはたらくせん断応力の関数で，任意の流れにおいては一定である。したがって(13)式をといて流速を求め，これと固定床における流速との差を求めると，この差は

移動中の粒子に働らく抗力抵抗と粒子の回転にともなって生じたせん断応力の増加に起因する抵抗であろう。(13)式の解と実験結果の比較については講演時にのべる。この研究は文部省特定研究の一部であって，関係方面に厚く感謝の意を表する。

参　考　文　献

1) Ishihara, T., Iwagaki, Y. and Sueishi, T.,; On the effect of bed-load movement in thin sheet flow, Proc. 3rd Japan National Congress for Appl. Mech. 1953, p.265～p.269.