

蛇行発生に関する微小振動の考察

名古屋大学 正会員 足立昭平

流路の蛇行は河床材料の移動によって形成されるものであるから、その形成過程は流砂特性を省略しては論じられないであろう。しかしながら、その発生機構については、流水自身にも蛇行素因が含まれているように思われる。著者はかつてこのような流水の蛇行素因を究明する目的をもって、開水路水流に微小変動理論を適用することを試みたが¹⁾、流れの速度分布に対する考察が十分でなく、微小変動の不安定限界を具体的に示すことに難点を残したままであった。本文はこうした点について、さきの理論を修正して、蛇行発生条件の解明に手掛りを得ようとするものである。

1. 基礎方程式

水流の基礎方程式は慣用の記号を用いて次式で与えられる。

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial(u_i u_j)}{\partial x_j} = F_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j}, \quad \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0, \quad (i, j=1, 2, 3) \quad (1.1)$$

いま水路底面に沿って流下方向に x_1 を、水平に側方に x_2 を、そして両者に直角に上向きに x_3 をとり、水深を h として式(1.1)の各項を x_3 について 0 から h まで積分すれば、

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} = F_i - \frac{1}{\rho h} \frac{\partial(\bar{p}h)}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho h} \left\{ \tau_{3i} + \frac{\partial(\rho u_i u_k h)}{\partial x_k} \right\} \frac{\partial(r_{ki}h)}{\partial x_k}, \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial h}{\partial x_k} + h \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_k} = 0, \quad (i=1, 2, 3; \quad k=1, 2) \quad (1.3)$$

ここに、 $\bar{u}_i = \int_0^h u_i dx_3$, $u_i' = u_i - \bar{u}_i$, $\bar{u}_i' = 0$

式(1.2)の $i=3$ の方程式において、 $\bar{u}_3$ は十分に小さく、その加速度も重力に対して省略可能であるとすれば、圧力 p は静水圧分布と見なすことができ、また x_3 の水平面からの傾きも極端に大きくなければ、その勾配を S_0 とおいて、

$$F_1 = gS_0, \quad F_2 = 0, \quad F_3 = -g \quad \text{および} \quad \bar{p} = \rho g h / 2 \quad (1.4)$$

である。また、 $\overline{u_\ell' u_k'}$ は速度の x_3 に関する速度分布によって与えられ、次元解析から、

$$\frac{\overline{u_\ell' u_k'}}{u_\ell^* u_k^*} = \phi_{\ell k} \left(\frac{u_\ell^* h}{\epsilon_{3\ell}}, \frac{u_k^* h}{\epsilon_{3k}}, \dots \right), \quad (\ell, k=1, 2) \quad (1.5)$$

と考えることができる。ここに、 ϵ_{31} , ϵ_{32} は渦動粘性係数であり、 u_1^* , u_2^* は水路床面のそれぞれの摩擦応力成分 τ_{31} , τ_{32} に対して定義した摩擦速度であって、

$$u_1^* = \sqrt{\tau_{31}/\rho}, \quad u_2^* = \sqrt{\tau_{32}/\rho} \quad (1.6)$$

である。試みに $\epsilon_{3\ell}$ を定数と見なして得られる u_ℓ の直線および二次曲線分布、あるいは $\epsilon_{3\ell}$ に混合距離を導入して得られる Prandtl の対数分布について式(1.5)の関数 $\phi_{\ell k}$ を検討すれば、表-1の

ようである。さらに、摩擦係数 f_ℓ を導入すれば、式(1.5)はつぎのようにあらわすことができる。

$$\overline{u'_\ell u'_k} = \sqrt{f_\ell f_k} \phi_{\ell k} \cdot \bar{u} \bar{u}_k = k_{\ell k} \bar{u} \bar{u}_k$$

ここに、 $f_\ell = (u_\ell^* / \bar{u}_\ell)^2$ 、 $k_{\ell k} = \sqrt{f_\ell f_k} \phi_{\ell k}$

表-1 単純な速度分布における ϕ_{1k} の値

u_1 の速度分布	u_2 の速度分布	ϕ_{11}	ϕ_{12}	ϕ_{22}
$u_1 = \frac{1}{\kappa} \ln Mx_3$	$u_2 = \frac{u_2^* x_3}{\epsilon_{32}} + C$	$(\frac{1}{\kappa})^2$	$\frac{1}{2\kappa} \frac{u_2^* h}{\epsilon_{32}}$	$\frac{1}{12\kappa} \frac{u_2^* h}{\epsilon_{32}}$
$u_1 = \frac{1}{\kappa} \ln Mx_3$	$u_2 = \frac{u_2^* x_3}{\epsilon_{32}} (1 + \frac{x_3}{2h})$	$(\frac{1}{\kappa})^2$	$\frac{5}{36\kappa} \frac{u_2^* h}{\epsilon_{32}}$	$\frac{1}{45\kappa} \frac{u_2^* h}{\epsilon_{32}}$

また、 x_1 あるいは x_2 に直角な面に働く応力の h に関する平均値 $\bar{\tau_{\ell k}}$ の x_ℓ に対する勾配は、一般に省略可能と考えられるから、基礎方程式(1.2)式は結局つぎのように書きあらわされる。

$$\frac{1}{g} \left(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial t} + \bar{u}_1 \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_1} + \bar{u}_2 \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2} \right) = S_0 - \frac{\partial h}{\partial x_1} - \frac{1}{gh} \left\{ f_1 \bar{u}_1^2 + K_{11} \frac{\partial (\bar{u}_1^2 h)}{\partial x_1} + K_{12} \frac{\partial (\bar{u}_1 \bar{u}_2 h)}{\partial x_2} \right\}, \quad (1.8)$$

$$\frac{1}{g} \left(\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial t} + \bar{u}_1 \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_1} + \bar{u}_2 \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_2} \right) = - \frac{\partial h}{\partial x_2} - \frac{1}{gh} \left\{ f_2 \bar{u}_2^2 + K_{12} \frac{\partial (\bar{u}_1 \bar{u}_2 h)}{\partial x_1} + K_{22} \frac{\partial (\bar{u}_2^2 h)}{\partial x_2} \right\}, \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \bar{u}_1 \frac{\partial h}{\partial x_1} + \bar{u}_2 \frac{\partial h}{\partial x_2} + h \left(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_2} \right) = 0.$$

この3方程式が、水深 h および x_3 に関する平均流速 $\bar{u}_1$ 、 $\bar{u}_2$ に関する基礎方程式である。

2. 微小変動量に対する基礎方程式の解

基礎方程式の線型化を図るために、水路全断面の平均流速を $\bar{u}_m$ 、平均水深を h_m とおいて、 $\bar{u}_1$ 、 $\bar{u}_2$ および h がそれぞれ

$$\begin{aligned} \bar{u}_1 &= u_m \{ 1 + \epsilon U(x_1, x_2, t) + O(\epsilon^2) \} \\ \bar{u}_2 &= u_m \{ \epsilon V(x_1, x_2, t) + O(\epsilon^2) \} \\ h &= h_m \{ 1 + \epsilon H(x_1, x_2, t) + O(\epsilon^2) \} \end{aligned} \quad (2.1)$$

であらわせるものとしよう。ここに ϵ は微量量の定数である。側壁の近傍を除けば、この設定は十分成立するはずであるから、式(2.1)をさきの基礎方程式(1.8)～(1.10)式に代入して ϵ の次数ごとに整頓すれば、

$$O(\epsilon^0): S_0 - f_1 (u_m^2 / gh_m) = 0 \quad (2.2)$$

$$O(\epsilon): \frac{u_m^2}{gh} \left(\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x_1} \right) = - \frac{\partial H}{\partial x_1} - \frac{u_m^2}{gh_m} \left\{ 2 f_1 U - f_1 H + K_{11} \left(\frac{\partial H}{\partial x_1} + 2 \frac{\partial U}{\partial x_1} \right) + K_{12} \frac{\partial V}{\partial x_2} \right\}, \quad (2.3)$$

$$\frac{u_m^2}{gh_m} \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x_2} \right) = - \frac{\partial H}{\partial x_2} - \frac{u_m^2}{gh_m} K_{12} \frac{\partial U}{\partial x_1}, \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial x_1} + \frac{\partial U}{\partial x_1} + \frac{\partial V}{\partial x_2} = 0. \quad (2.5)$$

ここに,

$$X_1 = \frac{x_1}{h_m}, \quad X_2 = \frac{x_2}{h_m}, \quad T = \frac{u_m}{h_m} t \quad (2.6)$$

である。式(2.3)~(2.5)をU, VおよびHについて整頓すれば, それぞれ,

$$[L_1] U + [M_1] V + [N_1] H = 0 \quad (2.3')$$

$$[M_2] V + [N_2] H = 0 \quad (2.4')$$

$$[L_3] U + [M_3] V + [N_3] H = 0 \quad (2.5')$$

となり, 方程式は線型化される。ここに, $[L_1], [M_1], [N_1], \dots, [N_3]$ は演算子であって,

$$[L_1] = \frac{\partial}{\partial T} + (1 + 2K_{11}) \frac{\partial}{\partial X_1} + 2f_1, \quad [M_1] = K_{12} \frac{\partial}{\partial X_2}, \quad [N_1] = \left(\frac{1}{Fr^2} + K_{11}\right) \frac{\partial}{\partial X_1} - f_1,$$

$$[M_2] = \frac{\partial}{\partial T} + (1 + K_{12}) \frac{\partial}{\partial X_1}, \quad [N_2] = \frac{1}{Fr^2} \frac{\partial}{\partial X_2}, \quad [L_3] = \frac{\partial}{\partial X_1}, \quad [M_3] = \frac{\partial}{\partial X_2}, \quad [N_3] = \frac{\partial}{\partial T} + \frac{\partial}{\partial X_1}$$

である。なお, $Fr^2 = u^2 / gh_m$ であって, 式(2.2)から, $Fr^2 = S_0 / f_1$ でもある。

さて, 式(2.3')の各項に $[L_3]$ の演算を, 式(2.5')に $[L_1]$ の演算を施して差し引けば, Uが消去されて,

$$([L_3][M_1] - [L_1][M_3])V + ([L_3][N_1] - [L_1][N_3])H = 0. \quad (2.6)$$

が得られる。さらに, 式(2.6)に $[N_2]$ の演算を, 式(2.4')に $([L_3][N_1] - [L_1][N_3])$ の演算を施して, 両者を差し引けばHも消去できて, Vのみに関する線型微分方程式が導かれる。すなわち,

$$([N_2][L_3][M_1] - [N_2][L_1][M_3] - [L_3][N_1][M_2] + [L_1][N_3][M_2])V = 0.$$

演算子を $\partial/\partial T$ について整頓すれば,

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial^3}{\partial T^3} + \left\{ (3 + 2K_{11} + K_{12}) \frac{\partial}{\partial X_1} + 2f_1 \right\} \frac{\partial^2}{\partial T^2} + \left\{ (5 + 2K_{12}) f_1 \frac{\partial}{\partial X_1} + (1 + K_{11})(3 + 2K_{12}) \frac{\partial^2}{\partial X_1^2} \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{Fr^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial X_2^2} \right) \right\} \frac{\partial}{\partial T} + (1 + K_{11})(1 + K_{12}) \frac{\partial^3}{\partial X_1^3} - \frac{1}{Fr^2} \left\{ (1 + K_{12}) \frac{\partial^2}{\partial X_1^2} \right. \right. \\ & \left. \left. + (1 + 2K_{11} - K_{12}) \frac{\partial^2}{\partial X_2^2} \right\} \frac{\partial}{\partial X_1} + 3(1 + K_{12}) f_1 \frac{\partial^2}{\partial X_1^2} - 2f_1 \frac{1}{Fr^2} \frac{\partial^2}{\partial X_2^2} \right] V = 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

である。この線型微分方程式の一般解は,

$$V = \Sigma C \exp(ax_1 + bx_2 + ct) \quad (2.8)$$

である。ここに, Cは積分定数であり, 係数a, b, cは原方程式(2.7)の演算子に対応する3次の代
数方程式の根であって, これらが複素数であるとき振動解となる。

3. 微小変動の安定限界

上記の微小変動の振動解が蛇行の素因となるためには, まずその振幅が時間の経過とともに増大する
ようなもの, すなわち, 解のTの係数Cが複素数であって, その実数部が正であることが必要であ
ろう。また, 前項で議論できるような微小変動は特定の地点で発生するのではなくて, 流路のどこに
でも存在するものと考えられるから, 流下とともにその波数が増減するような振動は蛇行の素因には
なり得ないであろう。そこで, 解の X_1, X_2 の係数 a, b がともに虚数であるようなものを問題の

対象としよう。すなわち、

$$V = V_0 \exp \{ i (\alpha X_1 + \beta X_2 + r T) + \delta T \} \quad (3.1)$$

であるような振動項を取りあげる。ここに、 α 、 β 、 r 、 δ はいずれも実数である。

式(3.1)を原方程式(2.7)式に代入して実数部と虚数部について整頓すれば、

$$\begin{aligned} \text{実数部} \quad & \left(\frac{r}{\alpha}\right)^2 + \frac{5+2K_{12}}{2} \left(\frac{r}{\alpha}\right) + \frac{1+K_{12}}{2} - \frac{1}{F_r^2} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 - \left(\frac{\delta}{2f_1} + 1\right) \left(\frac{\delta}{\alpha}\right)^2 + \left\{ 3 \left(\frac{r}{\alpha}\right)^2 \right. \\ & \left. + 2(3+2K_{11}+K_{12}) \left(\frac{r}{\alpha}\right) + (1+K_{11})(3+2K_{12}) - \frac{1}{F_r^2} \right\} \frac{\delta}{2f_1} = 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \text{虚数部} \quad & \left(\frac{r}{\alpha}\right)^3 + (3+2K_{11}+K_{12}) \left(\frac{r}{\alpha}\right)^2 + [(1+K_{11})(3+2K_{12}) - \frac{1}{F_r^2} \{1+(\frac{\beta}{\alpha})^2\}] \left(\frac{r}{\alpha}\right) + (1+K_{11})(1+K_{12}) \\ & - \frac{1}{F_r^2} \{ (1+K_{12}) + (1+2K_{11}-K_{12}) \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 \} - \left\{ (3+2K_{11}+K_{12}) + 3 \left(\frac{r}{\alpha}\right) \right\} \left(\frac{\delta}{\alpha}\right)^2 \\ & - \left\{ 4 \left(\frac{r}{\alpha}\right) + (5+2K_{12}) \right\} \frac{f_1}{\alpha} \frac{\delta}{\alpha} = 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

まず、 δ が正となる限界条件として、 $\delta = 0$ における α 、 β 、 r の関係式を求めよう。式(3.2)から、

$$\frac{1}{F_r^2} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 = \left(\frac{r}{\alpha}\right)^2 + \frac{1}{2} (5+2K_{12}) \left(\frac{r}{\alpha}\right) + \frac{3}{2} (1+K_{12}) \quad (3.4)$$

であるから、これを式(3.3)に代入して、

$$\begin{aligned} & (1-2K_{12}) \left(\frac{r}{\alpha}\right)^2 + 2(1+2K_{11}-2K_{12}-K_{12}^2 + \frac{2}{F_r^2}) \left(\frac{r}{\alpha}\right) + (1+K_{12}) (1+6K_{11}-5K_{12} + \frac{2}{F_r^2}) = 0. \\ \therefore \quad & \frac{r}{\alpha} = \left[- (1+2K_{11}-2K_{12}-K_{12}^2 + \frac{2}{F_r^2}) \pm \left\{ (1+2K_{11}-2K_{12}-K_{12}^2 + \frac{2}{F_r^2})^2 \right. \right. \\ & \left. \left. - (1-2K_{12})(1+K_{12})(1+6K_{11}-5K_{12} + \frac{2}{F_r^2}) \right\} \right]^{1/2} (1-2K_{12})^{-1} \end{aligned} \quad (3.5)$$

K_{11} および K_{12} は式(1.7)で与えられるから、 $f_{\ell\kappa}$ および $\phi_{\ell\kappa}$ について、たとえば、

$$f_{\ell\kappa} \simeq g h S_0 / u_m^2, \quad \phi_{\ell\kappa} = \left(\frac{1}{\kappa}\right)^2 = 6.25 \quad (3.6)$$

とおけば、与えられた水路条件に対してそれらの値に目安を得ることができ、式(3.5)から、 $\delta = 0$ に対する r/α が、また式(3.4)からそれに対応する β/α を算出できることになる。一般に $K_{\ell\kappa}$ は大きく見積っても 10^{-1} を超えないものと推察されるから、ここでは $K_{\ell\kappa}$ を1に対して省略した概算値を追ってみよう。 $K_{\ell\kappa}$ を省略すれば、式(3.5)および(3.4)はそれぞれ

$$\frac{r}{\alpha} = - \left(1 + \frac{2}{F_r^2}\right) \pm \sqrt{\left(1 + \frac{2}{F_r^2}\right) \frac{2}{F_r^2}} \quad (3.7)$$

$$\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 = \left(1 + \frac{8}{F_r^2}\right) \pm \left(3 - \frac{4}{F_r^2}\right) \sqrt{\left(1 + \frac{2}{F_r^2}\right) \frac{2}{F_r^2}} \quad (3.8)$$

となる。ただし複号同順であって、これらの値の一部を示したものが図-1、および2である。図中実線は上式の正符号の関係式を、点線は負符号のそれをあらわす。

これらは $\delta = 0$ 、すなわち微小振動の安定限界を与えるものであるが、振動が不安定、すなわち δ

> 0 となる領域を吟味するために、
きわめて微小ではあるが正であるよ
うな δ が存在する場合を考えれば、
まず式(3.2)において、 δ^2 の項は
 δ の項に対して無視できるから式
(3.4)に付加される項の正負は、最
終項の $\{ \quad \}$ 内の正負によって判定
できよう。概算の見当として、 K_{δ}
を省略すると、その項は

$$4 \left(\frac{r}{\alpha} \right) + 5$$

となり、式(3.7)を代入すると、

$$1 - 4 \left\{ \frac{2}{F_r^2} + \sqrt{\left(1 + \frac{2}{F_r^2}\right) \frac{2}{F_r^2}} \right\}$$

が負であるとき、 $\delta > 0$ の r/α は、
 $\delta = 0$ のそれよりも増大すること
になる。すなわち、

$$\frac{2}{F_r^2} + \sqrt{\left(1 + \frac{2}{F_r^2}\right) \frac{2}{F_r^2}} > \frac{1}{4} \quad (3.9)$$

であれば、安定限界における r/α
よりも、不安定領域の側にある r/α

の方が大きい。また、式(3.3)についても同様にして、

$$\left(1 + \frac{4}{F_r^2}\right) + 2 \sqrt{\left(1 + \frac{2}{F_r^2}\right) \frac{2}{F_r^2}} > \frac{1}{6}$$

であれば、不安定領域の β/α が限界のそれよりも大きい。式(3.9)は通常の F_r の範囲で成立するが、式(3.10)の負符号の場合には、 $F_r =$ 約 1.38 の付近で不等号は逆転する。図-1、および2において斜影をつけた領域は $-r/\alpha$ あるいは $2\beta/\alpha$ が $\delta > 0$ のとき、 $\delta = 0$ における値よりも増大すると考えられる。

さて、式(3.1)から明らかなように、 α は微小振動の流下方向の波数を、 β は水路中心から x_2 だけずれた地点における振動の位相差をあらわし、 r は振動数である。したがって、流れの方向の波長を L 、水路巾方向に丁度位相が半周期ずれる幅を B 、および微小変動の流下速度を w をすれば、

$$-\frac{r}{\alpha} = \frac{w}{u_m}, \quad \frac{2\beta}{\alpha} = \frac{L}{B} \quad (3.11)$$

である。水路がこのような微小変動が成長する条件をもつとすれば、上記の考察の過程からして、その発生の可能性はすべての断面について同等であると考えるべきであろう。そしてすべての断面からそれぞれ独立に微小変動群が発生、流下するものとすれば、それらは互いに消し合うことになる。し

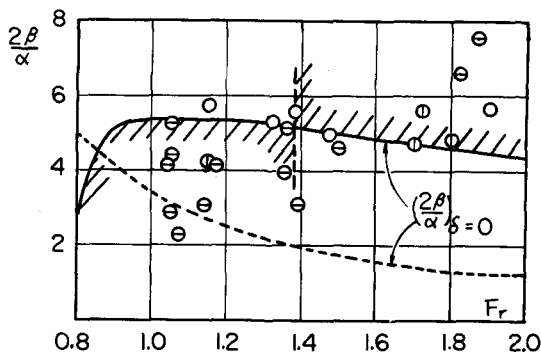


図-1 $-r/\alpha$ と F_r との関係

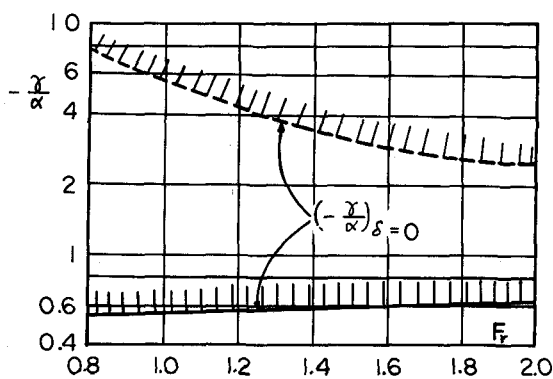


図-2 $2\beta/\alpha$ と F_r との関係

たがって、こうした変動が蛇行形成の発端になるためには、絶え間なく流下していく無数の変動を選別するような機構が必要である。著者はその選別の役割りを果たすものとして流砂を採りあげてみた。流砂をともなう流れにおいて上記の微小変動が発生すれば、流砂もそれに応じて変動し、たとえ一時的であってもその波長に対応する砂紋を期待することができよう。そして流砂の流下速度に近い伝播速度をもつ変動は、同じ流砂群を保持する機会が長いであろうから、その砂紋が一度出現すれば、他の変動の場合よりも長くその形を保持できるであろう。その結果生ずる水路床面の変化はさらにその砂紋の固定化を促進するであろう。このような推論にもとづけば、式(3.7)の正符号に対応する微小変動は、その伝播速度が u_m より大きく(図-1, 2の点線)蛇行素因とはなりにくいことになり、蛇行素因としては式(3.7), (3.8)の負符号(図-1, 2の実線)がとりあげられるべきであろう。図-2に記入した点群は木下良作博士が、幅13.2 cmの実験水路において砂堆の安定な波長として観測された結果²⁾を引用したものであり、蛇行発生の素因としての微小変動理論を裏付けているようにも思われる。

参 考 文 献

- 1) 足立昭平：蛇行の発生過程に関する研究，土木学会水理研究会講演前刷 1957, pp.9~10
- 2) 科学技術庁資源局：石狩川河道変遷調査—参考編，科学技術庁資源局資料第36号，1962, p.115