

Sand Waveに関する研究

—砂堆の形状について—

建設省土木研究所 正会員 土屋 昭彦

建設省土木研究所 正会員 石崎 勝義

1. は じ め に

Sand Wave (広義の砂漣)現象は移動床開水路流れにとって基本的問題であるが、これを実用的な観点から見ても流れの粗度や流砂量の問題で大きな役割を果たすので、そのメカニズムを明らかにすることは意義あることと思われる。

Sand Wave に関する研究の第一段階は Gilbert の手で実験的観察を中心として始められたようである。これは多くの研究者によって引き継がれ、Sand Wave の外面的な性質がいろいろと明らかになった。Sand Wave 現象の内部的な機構を理解しようとする試みは約 10 年前からようやく始められた。これには表面波をもつ流れの複素ポテンシャルに基づいて考えた Anderson の研究およびこれを発展させた Kennedy の研究がある。さらに微小振巾理論を中心とした研究(わが国では松梨・椿・早川の各氏の研究)がある。こうして Sand Wave 現象の本質がいくつかの側面から明らかになってきている。周知のように Sand Wave 現象は表われ方がいろいろある。すなわち実験水路で掃流力を増加してゆくと河床の状態は(1) flat bed(without motion)の状態、(2) dune and ripple の状態、(3) flat bedの状態、(4) antidune の状態、の順で変化する。従来の研究はこれらの諸形態を統一して扱う立場に立ち、各形態が生起する条件を追及している。

以下に述べようとする研究は、その対象を河床状態(2)のうちの dune (これを砂堆と呼ぶことにする)に限り、その機構を水理学的な側面から考察しようと試みたものである。

すなわち砂堆の波長については、河床形状によって定められた水表面波をもつ流れによる流送能力の縦断方向変化が砂堆形状と同じ周期をもつという条件から波長、水深、流速の間の関係を導いた。

砂堆の波高については、砂堆がその形を変化することなく下流に移ってゆくという前提に立ち、その形を維持するために流れが満たすべき条件から波高、水深、流速の間の関係を定めた。

その結果を実験値と比較することによって、これらの考えでどのような範囲および程度において現象を説明できるかを明らかにできたと思われる。

なお砂堆という言葉に対して厳密な定義を与えることが現在できないのでその特徴をあげることによって大体の定義を与えることにする。すなわち

(1) 縦断形状はほぼ三角形であって上流側はゆるやか、下流側は急斜面となっている。その波長、波高において ripple より規則性が強い。

(2) 横断方向には高さが大体一定である。この点において横断方向に形状の変化する ripple と区別される。

(3) 流れの中においては上流側斜面が洗掘されて粒子が移動し、これが下流側斜面上の死水域におちこんで堆積する。その結果、砂堆はゆっくりと下流に移動することになる。

(4) 流れは常流である。

2. 砂 堆 の 波 長

① 開水路流れにおいては、流れのFroude数が非常に小さい場合は別として、河床に凸凹があるとこれに応じて水表面高さが変化し表面波が発生する。

この表面波の形状を次式のようにおく。

$$\eta = \eta_0 \cos \{k(x+vt) - \sigma t\} \quad (1)$$

ここに、 v は一様流れの流速である。

η_0 が流れの水深 h にくらべて小さいときには、この波を微小振巾波と考えて k と σ の間に次の関係がある。

$$\sigma^2 = gk \tanh kh \quad (2)$$

いま(1)において t の係数 $kv - \sigma = 0$ のときを考

えると(1)は $\eta = \eta_0 \cos kx$ となる。この波は一定の位置に停って進行しない。流れが常流のときは砂堆の山において水面が低くなるのでこの位置で流れによる流砂能力は大きい。流砂能力の縦断方向の周期(波長)は $\lambda = 2\pi/k$ となる。このときの波長、水深・流速の関係は式(2)より

$$v = \sqrt{\frac{g}{h} \tanh kh} \quad \text{or} \quad Fr^3 = \frac{g}{kh} \tanh kh \quad (3)$$

② つぎに波長 λ の砂堆上の流れに生ずる表面波が2種あって干渉する場合を考える。それぞれを

$$\eta_1 = \eta_0 \cos \{k_1(x+vt) - \sigma_1 t\}, \quad k_1 = mk \quad (4)$$

$$\eta_2 = \eta_0 \cos \{k_2(x+vt) - \sigma_2 t\}, \quad k_2 = nk \quad (5)$$

とおく。ここに m, n は正整数、 $k = 2\pi/\lambda$ 。(k_1, σ_1), (k_2, σ_2) は(2)を満たす。

式(4), (5)を合成した波を η とおくと

$$\eta = \eta_1 + \eta_2 = 2\eta_0 \cos \left\{ \frac{1}{2}(k_1 - k_2)(x+vt) - \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)t}{2} \right\} \cos \left\{ \frac{1}{2}(k_1 + k_2)(x+vt) - \frac{(\sigma_1 + \sigma_2)t}{2} \right\} \quad (6)$$

ここで流れの平均水深を h_m 平均流速を v_m とすると任意地点、任意時間の流速は概略値として

$$v \doteq \frac{v_m h_m}{h_m + \eta} \doteq v_m \left(1 - \frac{\eta}{h_m} \right) \quad (7)$$

いまある地点に着目して、波の周期にくらべて十分長い時間 T_0 の間に通過する土砂の総量を QB_{T_0} とおくと、流砂量公式を $q_s = \alpha v^3$ とおくことによってつぎのようになる。

$$QB_{T_0} = \int_0^{T_0} \alpha v^3 dt = \alpha v_m^3 \int_0^{T_0} \left(1 - \frac{\eta}{h_m} \right)^3 dt \doteq \alpha v_m^3 \int_0^{T_0} \left\{ 1 - \frac{3\eta}{h_m} + 3\left(\frac{\eta}{h_m}\right)^2 \right\} dt \quad (8)$$

第一の場合として $(k_1 - k_2)v - (\sigma_1 - \sigma_2) = 0^9$ を考えると(8)はつぎのようになる。

$$\begin{aligned} QB_{T_0} = & \alpha v_m^3 \left[T_0 - \frac{6\eta_0}{h_m \sigma_0} \cos \left\{ \frac{1}{2}(k_1 - k_2)x \right\} \cdot \sin \left\{ \frac{1}{2}(k_1 + k_2)x + \sigma_0 T_0 \right\} - \sin \left\{ \frac{1}{2}(k_1 + k_2)x \right\} \right] \\ & + \frac{3\eta_0^2}{h_m^2 \sigma_0} \cos^2 \left\{ \frac{1}{2}(k_1 - k_2)x \right\} \left[\sin \left\{ (k_1 + k_2)x + 2\sigma_0 T_0 \right\} - \sin \left\{ (k_1 + k_2)x \right\} \right] \\ & + \frac{6\eta_0^3}{h_m^3 \sigma_0} \cos^3 \left\{ \frac{1}{2}(k_1 - k_2)x \right\} \cdot T_0 \end{aligned} \quad (10)$$

$$\text{ここに, } \sigma_0 = \{ (k_1 + k_2) v - (\sigma_1 + \sigma_2) \} / 2$$

T_0 が σ_0 にくらべて十分に大きいときには〔 〕内の第2, 第3項は第1, 第4項に比べて無視される。

$$Q B_{T_0} = \alpha v_m^3 T_0 \left[1 - \frac{6 \eta_0^2}{h_m^2 \sigma_0^2} \cos^2 \left\{ \frac{1}{2} (k_1 - k_2) x \right\} \right] \quad (11)$$

すなわち流砂量は縦断方向に波数 $k_1 - k_2$ の周期性をもつことになる。この波長がもとの砂堆の波長に等しいという条件より

$$k_1 - k_2 = (m - n) k = k \quad \therefore m - n = 1 \quad (12)$$

(12)の最も簡単な場合が $m = 2, n = 1$ であって、表面波の波長はそれぞれ $\frac{1}{2} \lambda, \lambda$ にあたる。

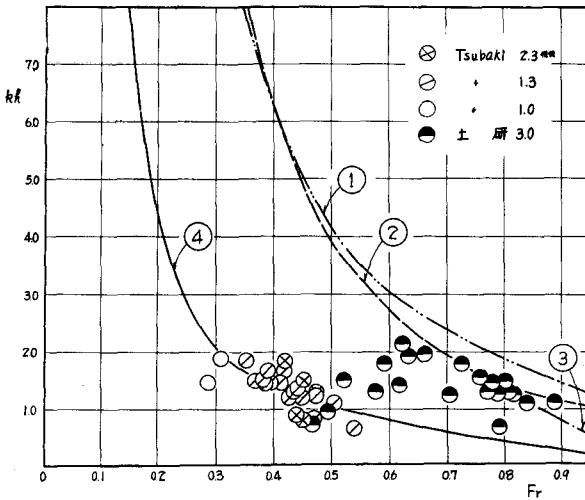
このときの砂堆波長, 水深, 流速の関係は(9), (12)よりつぎのようになる。

$$v = \sqrt{\frac{2g}{k} \tanh 2kh} - \sqrt{\frac{g}{k} \tanh kh} \quad \text{or} \quad Fr = \sqrt{\frac{2}{kh} \tanh 2kh} - \sqrt{\frac{1}{kh} \tanh kh} \quad (13)$$

なお砂堆波長の $\frac{1}{2}$ の波長をもつ表面波が生ずることは実験水路において $h_m = 13.5 \text{ cm}, v_m = 62 \text{ cm/sec}, Fr = 0.366, d_m = 1.5 \text{ mm}$ の場合に観測することができた。

第二の場合として $(k_1 + k_2) v - (\sigma_1 + \sigma_2) = 0$ とおくときには上と同様にして $k_1 + k_2 = (m + n) k = k$ を満たす必要があるが, これは不可能である。

③ 以上の結果を実験値と比較したものが図-2であって $0.2 < Fr < 0.8$ においては式(3)はAndersonの理論曲線およびKennedyの限界曲線と一致し実験値をよく説明している。 $Fr > 0.8$ において



① Anderson $Fr^2 = \frac{\lambda}{2kh} \left(\frac{1}{\tanh(\frac{\lambda}{2kh})} - \frac{1}{\sinh \frac{\lambda}{kh}} \right)$

② Kennedy

③ 式 3 $Fr^2 = \frac{g}{kh} \tanh kh$

④ 式 13 $Fr = \sqrt{\frac{2}{kh} \tanh 2kh} - \sqrt{\frac{1}{kh} \tanh kh}$

図-2 理論と実験の比較

は実験値からかなりずれる。式(13)は椿氏の資料をよく説明している。

④ 実験値を見ると $Fr < 0.2$ の範囲の資料はほとんど ripple の資料であるが、バラツキが多く一定の傾向が見られない。これは水面と河床との相互影響作用が弱くなることが原因と思われる。

すなわち、河床高さ変化 ΔH に対する水面変化量を DH とすると

$$\frac{V_m^2}{2g} + h_m = \frac{V_0^2}{2g} + h_0 + \frac{\Delta H}{2} \quad (14), \quad v_0 h_0 = V_m h_m \quad (15), \quad \frac{1}{2} DH = h_m - \left(\frac{\Delta H}{2} + h_0 \right) \quad (16)$$

(14)より求められる。

$\frac{1}{2} \frac{V_m^2}{g h_m} + 1 = \frac{1}{2} \frac{V_0^2}{g h_m} + \frac{h_0}{h_m} + \frac{1}{2} \frac{\Delta H}{h_m}$ において $Fr < 0.3$ のときは左右辺第1項は他の項にくらべて小さい。さらに $h_0/h_m = v_m/v_0$ であるから結局

$$v_0 = \frac{v_m}{1 - \Delta H/2h_m} \quad (17)$$

つぎに(14), (16)より $\frac{1}{2} DH = \frac{1}{2g} (v_0^2 - v_m^2)$ が求められるのでこれに(17)を代入してつぎのような関係がえられる。

$$\frac{DH}{h_m} = Fr^2 \frac{\Delta H}{h} \quad (18)$$

そこでいま $Fr = 0.1$, $\Delta H/h_m = 0.3$ という場合を考えると $DH/h_m = 0.3 \times 10^{-2}$, このとき流速の変化も大体 $v'/v \approx DH/h_m = 0.3 \times 10^{-2}$ 程度である。これは流れの中の乱れと同程度またはそれ以下であって、水面と河床との相互影響作用はかなり弱くなっているのである。すなわち ripple という形態は、水面変化との干渉がないという点に一つの特徴があるように思われる。

3. 砂 堆 の 波 高

① 流れによって生じた砂堆が発達して平衡状態に達した後、その形状を変えることなく下流側に一定速度 v_s で位置を移しているとき、河床形状を $t = t_0$ のときと、これより単位時間経ったときとで比較してみると

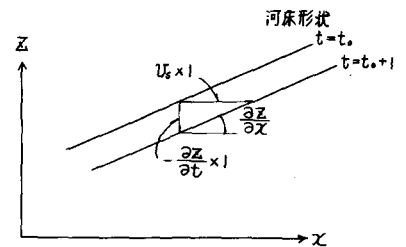
$$\frac{-\frac{\partial z}{\partial t}}{v_s} = \frac{\partial z}{\partial x} \quad (19)$$

流砂の連続式

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{1}{1-\lambda} \frac{\partial q_s}{\partial x} = 0 \quad (20)$$

(19), (20)より

$$\frac{\partial q_s}{\partial x} = (1-\lambda) v_s \frac{\partial z}{\partial x} \quad (21)$$



説 明 図 3

いま $t = t_0$ において、河床高 z および流砂量 q_s の x 方向分布について考えれば(21)を積分して

$$q_s = (1-\lambda) v_s z + c \quad (22)$$

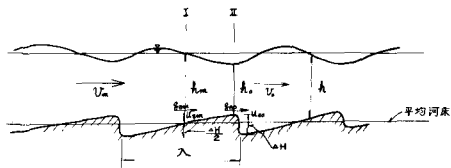
砂堆の谷位置の河床高を新しく $z = 0$ とえらぶ。一般に砂堆の谷は死水域であって $q_s = 0$ だから

$$q_s = (1-\lambda) v_s z + c \quad (23)$$

以上の検討より砂堆がその形を変えないで下流に移動しているときは、河床高さと流砂量との間に単純な比例関係が成立していることがわかる。

② 砂堆上の各地点の流砂量はこの地点の流れによって定められるが、これが(23)の関係を満たしているときにはこの砂堆が形をかえることなく下流に伝わって行くことができる。

説明図において、河床高が平均河床高に等しい地点を検査断面Ⅰ、砂堆の頂上位置を検査断面Ⅱにえらぶことにする。



説明図 4

流砂量公式として土研公式を用いると

$$q_s = k \cdot f \cdot u_*^3 \quad (k: \text{定数}, f: \tau_0/\tau_c \text{ によって定まる係数}, u_*: \text{摩擦速度})$$

(23)より

$$\frac{q_{sm}}{q_{s_0}} = \frac{f_m}{f_0} \cdot \frac{u_{*m}^3}{u_{*0}^3} = \frac{1}{2} \quad (24)$$

2つの断面の平均流速をそれぞれ v_m , v_0 とし、摩擦速度との関係を $v_m = \varphi_m \cdot u_{*m}$, $v_0 = \varphi_0 \cdot u_{*0}$ とおく。河床付近の流れは加速される流れであって流れの集中の作用が φ_m および φ_0 の中に含まれてくるはずである。これらを(24)に代入すると、 v_0/v_m がつぎのように表わされることになる。

$$\frac{v_m}{v_0} = \beta \quad \text{ただし} \quad \beta = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{f_0}{f_m}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{\varphi_m}{\varphi_0} \quad (25)$$

一方流れの平均水深、平均流速については、エネルギーの式および連続式としてつぎの関係がある。

$$\frac{v_m^2}{2g} + h_m = \frac{v_0^2}{2g} + h_0 + \frac{\Delta H}{2} \quad (26) \quad v_0 h_0 = v_m h_m \quad (27)$$

そこで(26)に(25)、(27)を代入してつぎのような砂堆の波高と水理量との関係式が求まる。

$$\frac{\Delta H}{h_m} = Fr^2 \left(1 - \frac{1}{\beta^2}\right) + 2(1 - \beta) \quad (28)$$

これを図示すると図-5のようになる。

つぎに β の性質について考えてみる。

図-6は砂堆付近における流速の実測図である。これをみると $\varphi_m/\varphi_0 = 1.0 \sim 1.2$ くらいと思われるがくわしい性質はよくわからない。

つぎに(24)より

$$\frac{f_0}{f_m} = 2 \cdot \frac{u_{*0}^3}{u_{*m}^3} = 2 \cdot \frac{(\tau_m/\tau_c)^{\frac{3}{2}}}{(\tau_0/\tau_c)^{\frac{3}{2}}} \quad (29)$$

一方 $f_0 \sim \tau_0/\tau_c$, $f_m \sim \tau_m/\tau_c$ が一応与えられているので(29)を計算することができる。これが図-7であって $(f_0/f_m)^{\frac{1}{3}}$ は $1.0 \sim 1.2$ くらいである。以上の検討より β の値は $0.8 \sim 1.1$ 程度と思われる。

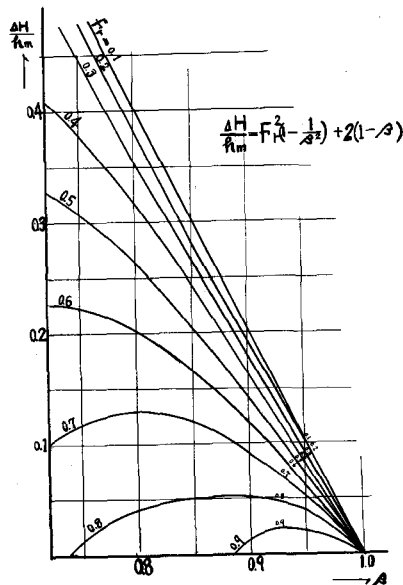


図-5

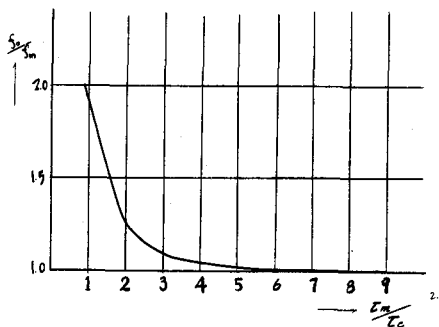


図-7

④図-8は $4H/h_m$, Fr の実験資料より β を求めたものである。

β の値はかなりばらついているが Froude 数の増加に対して減少の傾向が見られる。

一般に流れの集中の効果は Froude 数の増加とともに大きくなる傾向が認められているので、実験値の傾向はやや意外である。

この理由として考えられるのは Froude 数が大きいうちに砂堆頂上より下流側の死水域が大きくなって、平均河床高にあたる地点の高さが砂堆波高の $1/2$ という仮定がくずれるということである。

しかしくわしい検討はこれらの問題と思われる。

4. お わ り に

本文に引用した実験は吉岡 進君および篠崎分室職員の手で遂行されたものである。

本文において用いた実験資料の出典は

Shinohara and Tsubaki: On the Characteristics of Sand Wave Formed upon the Beds of the Open Channels and Rivers. Rep. Res. Inst. for App. Mech., Kyushu Univ. Vol. VII, No. 25 (1959).

Daryl, B. Simons and E. V. Richardson: Resistance to flow in alluvial channels. Proc. of A. S. C. E. HY5 (1960), HY1 (1961).

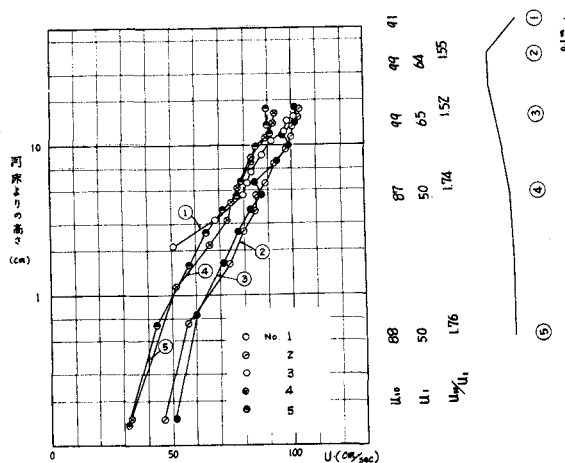


図-6 流速の測定

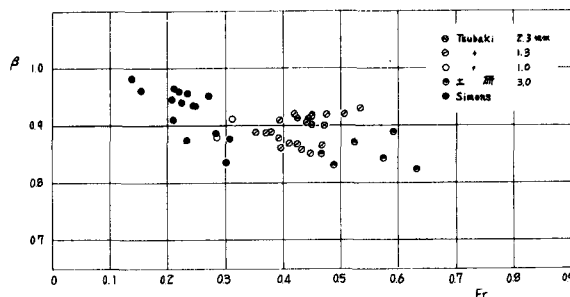


図-8 実測値より求めた β の値