

開水路彎曲流の内部機構 — 二次流の分布形について —

京都大学防災研究所 正会員 村 本 嘉 雄

1. まえがき 一般に、曲線水路において、断面の主要部分を占める二次流の発生機構は「上流直線部のせん断流れを代表する速度が彎曲部において主流（ポテンシャル流れ）によって変形する過程」として把握することができる。こうした二次流の概念および解析法は、SquireおよびWinter¹⁾が翼列内の流れに適用して以来、Hawthorne²⁾, Lighthill³⁾ などによって拡張、一般化され、N-S式の近似解法の一つの方向をなしている。しかし、これまで発表されている理論では、渦度の変形、移送に際して、粘性による渦度の拡散が無視されている部分が多く、Marris⁴⁾, Hawthorne⁵⁾ などによって、層流の場合についての若干の考察がなされているが、二次流の分布形を求めるまでに至っていないようである。

一方、開水路彎曲流に限定した場合、その二次流の分布形については、Rozovskii⁶⁾ が詳細な考察を行っており、最近、Ben-Chie Yen⁷⁾ も同じ観点から検討を加えている。しかし、これらの取り扱い、主流方向に変化のない、完全に発達した二次流に限定されており、発生、発達過程に適用することはできないと考えられる。

本文では、主に発生域を対象として、底面の影響による渦度の拡散を考慮する場合としない場合について径方向の二次流の鉛直分布を近似的に導き、実験結果と比較検討する。

2. 基礎式 いま、円筒座標系を考え、主流方向（接線方向） θ 、半径方向 r 、鉛直方向（底面より上方） z とし、各座標に対応する速度成分、渦度成分をそれぞれ (u, v, w) 、 (ξ, η, ζ) とする。二次流成分 (ξ) に関する定常流の渦度式は、底面のshearの影響を主体と考えると、つぎのように表わされる。

$$\left(\xi \frac{\partial}{\partial \theta} + r\eta \frac{\partial}{\partial r} + r\zeta \frac{\partial}{\partial z}\right) \frac{u}{r} - \left(u \frac{\partial}{\partial \theta} + rv \frac{\partial}{\partial r} + rw \frac{\partial}{\partial z}\right) \frac{\xi}{r} = -\frac{\partial^2}{\partial z^2} (\epsilon \xi) \quad (1)$$

ここで、 ϵ は動粘性係数を表わし、層流では $\epsilon = \nu$ 、乱流では、渦動粘性係数 $\epsilon = \kappa h U_* z'$ を仮定する。ただし、 $z' = z/h$ (h :水深)である。式(1)で流速、渦度に関して、自由渦分布 $U = D/r$ (D :定数)からの摂動を考え、摂動分の二次以上の項を無視すると、

$$\frac{\partial \xi}{\partial \theta} = -2\eta + \frac{r^2}{D} \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\epsilon \xi) \quad (2)$$

となる。ここで、 η を直線部の渦度 η_s に近似し、層流の場合、 $\eta_s = U_*^2 (1-z')/\nu$ 、乱流の場合、 ϵ の仮定に対応して、 $\eta_s = U_* / \kappa h z'$ を考える。なお、乱流の場合の ϵ 、 η_s の仮定については、shearの分布を考えて、

(a) $\epsilon = \kappa h U_* z' (1-z')$, $\eta_s = U_* / \kappa h z'$, (b) $\epsilon = \kappa h U_* z' \sqrt{1-z'}$, $\eta_s = U_* \sqrt{1-z'} / \kappa h z'$ とおく場合も検討したが、ここでは、上述の最も単純な仮定を用いて以下の考察をすすめる。

3. 底面の影響を無視する場合の分布形 式(2)で右辺の拡散項を無視し、

$$\partial \xi / \partial \theta = -2\eta, \quad (3)$$

より、層流、乱流の場合について ξ 、 v を求める。

(a) 層流: $\theta = 0$ で $\xi = 0$ の条件を用いると、式(3)より、

$$\xi_e = -2U_*^2 \theta (1-z')/\nu \quad (4)$$

となる。広幅断面の水路では、鉛直方向の速度は側壁近傍以外では小さいので、 $\xi \sim -\partial v / \partial z$ と近似する。 v に関する境界条件としては、底面で $v=0$ の条件と上、下層の連続関係 $\int_0^1 v dz' = 0$ が考えられるが、式(3)の取り扱いでは、底面の shear の影響が無視されているので、後者を用いることにする。すなわち、現象としては、彎曲部流入点で $v=0$ であるが、彎曲部内では連続関係によって、底面で滑りが生ずると考えられる。この条件を用いると、式(4)より、

$$v_i = U_*^2 h \cdot \theta f_i(z') / 3\nu, \quad f_i(z') = 6z' - 3z'^2 - 2 \quad (5)$$

が得られる。

(b) 乱流: 同様に、 $\theta = 0$ で $\xi = 0$ の条件により、

$$\xi_i = -U_* \theta / 2 \kappa h z' \quad (6)$$

となる。式(7)は底面 $z'=0$ まで適用できないので、粘性底層との接続を考え、 $z'=\delta'$ において、 $\xi_i = \xi_e$ とすると、 $\delta' = \nu / \kappa h U_*$ で与えられる。 $0 \leq z' \leq \delta'$ 、 $\delta' \leq z' \leq 1$ に対してそれぞれ式(4)、式(5)より v_i 、 v_e を求め、

$$z' = \delta' \text{ で } v_i = v_e, \quad \int_0^{\delta'} v_i dz' + \int_{\delta'}^1 v_e dz' = 0 \quad (7)$$

の条件より積分定数を決定すると、つぎようになる。

$$\delta \leq z' \leq \delta' : v_i = 2U_*^2 h \theta z' / \nu + 2U_* \theta (\ln \delta' - \delta'/2) / \kappa \quad (8)$$

$$\delta' \leq z' \leq 1 : v_e = 2U_* \theta (\ln z' + 1 - \delta'/2) / \kappa \quad (9)$$

しかし、通常、 $\delta' = \nu / \kappa h U_* \leq 10^{-2}$ であって、 v_i は極く壁面近くまで

$$v_i = 2U_* \theta f_i(z') / \kappa, \quad f_i(z') = \ln z' + 1 \quad (9')$$

によって近似できる。

いま、式(5)、式(9)' で境界条件に関係しない関数形 $f_e(z')$ 、 $f_i(z')$ を図示すると図-1 になる。層流の v 分布形の $v=0$ 点は乱流のそれより上にあつて、曲管などで確認されている実験事実に対応している。

つぎに、同心円状の単一彎曲水路で行なった実験結果と、式(9)' との比較を図-2 (a)~(c)に示す。実験条件および ξ 成分の接線方向の分布から決定した^{8), 9)}発生域 ($\partial \xi / \partial \theta > 0$)、

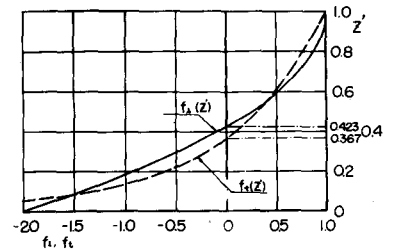


図-1 $f_e(z')$ 、 $f_i(z')$ 曲線

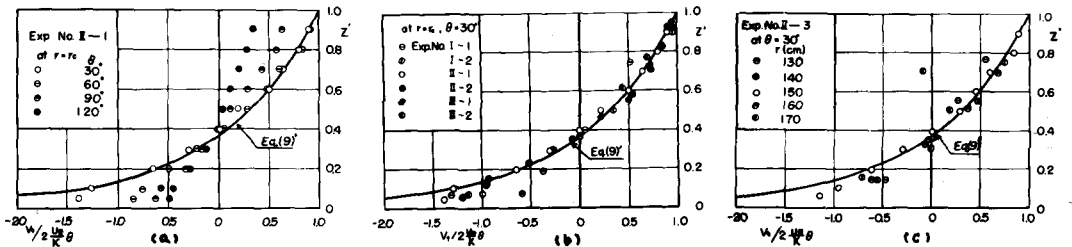


図-2 (a)~(c) 式(9)' と実験値との比較

表-1 実験条件と各領域の範囲

実験 番号	水路材料 (粗度係数)	彎曲全 偏角(度)	水路幅 B(cm)	中心曲 率半径 r_c (cm)	r_c / B	路床 こう配	流入点 の F_r 数	R_0 数 (10^4)	測点範囲 θ (度) 発生域 発達域	(28)式 θ_i (度)
I-1	塩化ビニール ($n=0.00986$)	90	25	25	1	0.002	0.43	2.78	0~75 90	193
I-2	"	"	"	75	3	"	0.56	2.64	0~60 90	76.4
II-1	コンクリート ($n=0.0134$)	180	50	75	1.5	0.002	0.55	1.75	0~60 90~180	52.1
II-2	"	"	"	"	"	0.005	1.08	3.82	0~60 90~180	63.8
II-3	"	"	"	150	3	0.002	0.50	1.75	0~60 90~180	26.0
II-4	"	"	"	"	"	0.005	1.21	3.06	0~60 90~180	35.6
III-1	塩化ビニール	90	50	150	3	0.002	0.58	2.49	0~45 60~90	27.3
III-2	砂粒底面 $d_m=0.90\text{mm}$ ($n=0.0160$)	"	"	"	"	"	0.39	2.28	0~45 60~90	23.8

発達域 ($\partial|\xi|/\partial\theta < 0$) の範囲は表-1 に示すとおりである。

図-2(a) (II-1) で、発生域と考えられる $\theta = 30^\circ, 60^\circ$ の断面では、式(9)' に近い値を示すが、 $\theta = 90^\circ$ 以降の発達域では、当然、理論曲線からはなれる。また、底面近くでは、発生域における実験値でも理論曲線より小さい値を示しており、 $\theta = 30^\circ$ より $\theta = 60^\circ$ で底面の影響が上方に及んでいることがわかる。図-2(b)は、6種の実験ケースで発生域と考えられる $\theta = 30^\circ$ の断面の実験値を示したもので、底面近くを除いて、ほぼ式(9)' に一致している。図-2(c)は、 v 分布の半径方向の変化に対する式(9)' の適合性を検討したものである。 $r = 130\text{cm}, 150\text{cm}$ の内、外岸近くでは、上層部でも理論曲線から可成りはなれており、特に、外岸近くのずれが大きい。なお、式(9)' の算定によれば、 $\kappa = 0.4$ 、 $U_* = \sqrt{g I_s h}$ を用いたが、内、外岸近傍では水面こう配の影響を加味しても十分でなく、 w 成分の影響、外岸における流れの不安定性などの影響を検討する必要がある。

4. 底面の影響を考慮する場合の分布形 式(2)で $\partial\xi/\partial\theta = 0$ の場合と $\partial\xi/\partial\theta \neq 0$ の場合に分けて考える。

$$4.1 \quad \frac{\partial\xi}{\partial\theta} = 0 \text{ の場合} \quad \frac{\partial^2(\xi\xi)}{\partial z^2} = 2D\eta_s/r^2 \quad (10)$$

この式は、 ξ が主流方向に変化しなくなった状態、すなわち、Rozovskii が考察している十分に発達した二次流に対応するものと考えられる。しかし、式(10)の誘導過程では、 $\eta = \eta_s$ 、 $\xi = 0$ の条件が前提となっているので、実際の現象をどの程度表現できるか疑問である。以下に、層流、乱流の場合について、 v 分布式を求め、Rozovskii の式とあわせて実験値と比較検討する。

(a) 層流：境界条件として、 $z' = 0$ で $v = 0$ 、 $z' = 1$ で $\xi = 0$ および前述の $\int_0^1 v dz' = 0$ の条件を用いて、式(10)より ξ 、 v を求めるとつぎのようになる。

$$\xi_i = -\frac{D}{15r^2} \left(\frac{U_* h}{\nu} \right)^2 (5z'^3 - 15z'^2 + 12z' - 2) \quad (11)$$

$$v_i = \frac{Dh}{60r^2} \left(\frac{U_* h}{\nu} \right)^2 g_i(z'), \quad g_i(z') = 5z'^4 - 20z'^3 + 24z' - 8z' \quad (12)$$

(b) 乱流：境界条件として $z' = 1$ で $\xi = 0$ および $\int_0^1 v dz' = 0$ の条件を用い、前項と同様に底層付近の検討を行なうと、 $1 \geq z' \geq \delta'$ の ξ 、 v 分布形は近似的につぎのように表わされる。

$$\xi_t = \frac{D}{\kappa^2 r^2} (2 \ln z' + 1 - \frac{1}{z'}) \quad (13)$$

$$v_t = \frac{Dh}{\kappa^2 r^2} g_t(z'), \quad g_t(z') = z' - 2z' \ln z' + \ln z' \quad (14)$$

式(12), (14)で境界条件に関係しない関数形 $g_t(z')$, $g_e(z')$ を図示すると、図-3のようになる。層流の場合、 $v=0$ の点は水深の $1/2$ より上において、式(5)の $f_t(z')$ より底面の影響が効いていることがわかる。

乱流の場合について、彎曲部後半の断面の測定値と比較した結果を図-4(a)~(c)に示す。これらの図で、破線はつぎの Rozovskii の式を表わしている。

$$v = \frac{u_m h}{\kappa^2 r^2} \left[F_1(z') - \frac{\sqrt{g}}{\kappa C} F(z') \right] \quad (15)$$

ただし、 $F_1(z') = \frac{2 \ln z'}{z' - 1} dz'$, $F_2(z') = \int \frac{\ln^2 z'}{z' - 1} dz'$, $\kappa = 0.5$

および u_m は r 点における主流の鉛直方向の平均流速である。また、式(14)に含まれる定数 D は Basic flow として自由渦分布を仮定していることから、 $D = Q/h \ln r_2/r_1$ (Q : 流量, r_1, r_2 : 内、外岸の半径) とし、 κ は発達域における η の減少を考え、 $\kappa = 0.4, 0.5, 0.6$ の場合について分布形を求めた。

なお、発達域においても $u(z)$ 分布は、図-5にその一例を示すように、ほぼ対数則に従うが、上、下層で少し曲折する場合もある。また、 η の減少を単に κ の変化に帰着させる点も問題であるが、 u 分布に関する検討は改めて述べたいと思う。

図-4(a)~(c)からわかるように、Rozovskii の式は発達域の初期 ($\theta = 90^\circ$) の実験値と全体的な傾向は似ているが、 $v=0$ 点が実験値より高く、絶対値の評価には問題がある。また、 v 分布が変形する $\theta = 120^\circ \sim 180^\circ$ の断面では、水面付近で差異が大きくなる。

一方、式(14)では、水面付近の条件が加味されているので、 $\theta = 120^\circ \sim 180^\circ$ 断面の実験値と上層部の特性は類似しているが、底面付近で差異が大きく、底層の条件を検討する必要がある。また、図-4(a)~(b)では、 $\kappa = 0.5 \sim 0.6$ で実験値に近い分布形をとり、 $u(z)$ 分布から逆算した値とほぼ対応するが、変形の著しい図-4(c)の場合および壁面近くの分布形は記述できない。

以上、実験値は発達域にあって三次元的な特性が

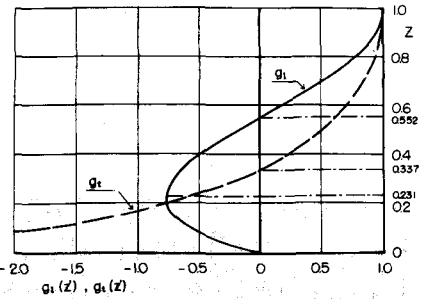


図-3 $g_e(z')$, $g_t(z')$ の曲線

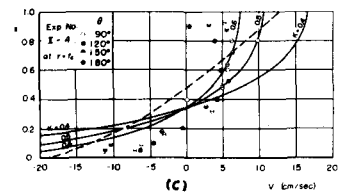
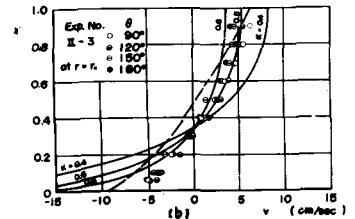
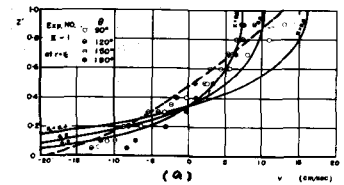


図-4(a)~(c) 式(14)および Rozovskii の式と実験値との比較

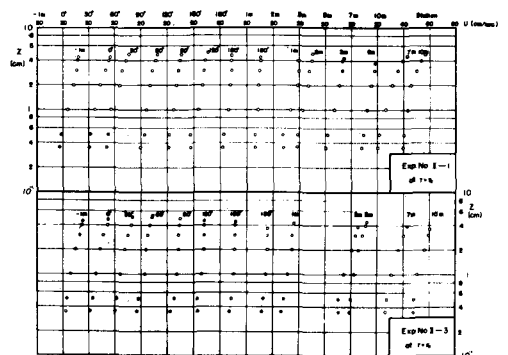


図-5 水路中心線上の $u(z)$ 分布

現われており、理論曲線はいずれも一次元的な取り扱いなので、本質的に適用が難しく、適用範囲は断面中央部で、発達域の初期に限られるようである。

4.2 $\partial \xi / \partial \theta \neq 0$ の場合

式(2)を解く際に、右辺第1項による付加項として、式(3)の解あるいは式(10)の解が考えられる。しかし、発達の極限として後者を取り、それへの漸近解として発生域を論ずることは、上に検討したように現象からみて問題がある。したがって、前者を考え、式(8)の解を

$$\xi = 2 \eta_s \theta + \xi_1(\theta, z')/\varepsilon \quad (16)$$

の形で与えられる。式(16)を式(2)へ代入することにより、 ξ_1 に関する式は層流、乱流の場合についてそれぞれつぎのようになる。

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial \theta} = \frac{\nu r^2}{D h^2} \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial z'^2} \quad (17)$$

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial \theta} = \frac{\kappa U_* r^2}{D h} z' \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial z'^2} \quad (18)$$

式(17)に対して、 $s = \sqrt{D h^2 / 4 \nu \theta} z'$ 、式(18)に対して、 $S = \sqrt{D h / \kappa U_* \theta} z'^{1/2} / r$ を用いて変数変換を行なうと、 $\xi_1(s)$ に関する式

$$\ddot{\xi}_1 + 2 s \dot{\xi}_1 = 0 \quad (19)$$

あるいは、その解として、 $\xi_1 = A_1 \operatorname{erf} s + A_2$ (19)

が得られる。ここで、 A_1, A_2 は積分定数、 $\operatorname{erf} s = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^s e^{-s^2} ds$ である。いま、自由表面、 $S = s_h$ で $\xi_1 = 0$ および、 $\operatorname{erf} s_h \sim 1$ を考えると、式(19)'は新たな積分定数 A を用いて、

$$\xi_1 = A(1 - \operatorname{erf} s / \operatorname{erf} s_h) = A(1 - \operatorname{erf} s) \quad (20)$$

で表わされる。したがって、式(16)は層流、乱流の場合について、それぞれつぎのようになる。

$$\xi = -2 \frac{U_*^2}{\nu} \theta (1 - z') + A_1 (1 - \operatorname{erf} s) \quad (21) \quad \xi = -2 \frac{U_*}{\varepsilon h} \theta \frac{1}{z'} + A_1 (1 - \operatorname{erf} s) \quad (22)$$

また、 v に関する式は、水面における流速 v_h を用いてつぎのように表わされる。

$$v = \left\{ \frac{U_*^2 h}{\nu} \theta (2 z' - z'^2 - 1) + v_h \right\} - A_1 \sqrt{\frac{4 \nu \theta}{D}} r \left(s - \int_0^s \operatorname{erf} t dt \right) \quad (23)$$

$$v = \left(2 \frac{U_*}{\kappa} \theta \ln z' + v_h \right) - 2 A_1 h \left(\ln s - \int_0^s \frac{1}{t} \operatorname{erf} t dt \right) \quad (24)$$

式(21)、(22)で、右辺第1項は慣性力のみによって生ずる負の方向の渦度、第2項がそれを拡散、減衰させる正方向の渦度を表わしている。いま、前者を ξ_i 、後者を ξ_d で表わし、 $\xi = \xi_i + \xi_d$ に対応する v を考えると、彎曲部流入点付近で底面近くの現象の概観(乱流の場合)は図-6のようになる。すなわち、底面の影響が及ぶ限界点 $z' = \delta'_i$ ($s = s_i$)において v 分布に変曲点が現われ、 $-\xi_i = \xi_d$ の点 $z' = \delta'_0$ ($s = s_0$)において v は負の最大値をとる。また、底面の極く近傍 $0 \leq z' \leq \delta'_i$ ($0 \leq s \leq s_i$)では粘性底層の領域にあって、底面で $\xi = \text{const}$ 、

$v = 0$ になると考えられる。

しかし、式(23)、式(24)における右辺第1項(v_i)、第2項(v_d)の関数形は、それぞれ図-6の破線、鎖線で示すようになり、単に、 $v_d + v_i$ としては実線の v を得ることができない。

そこで、 v 分布を $0 \leq z' \leq \delta'_0$ では v_d 、

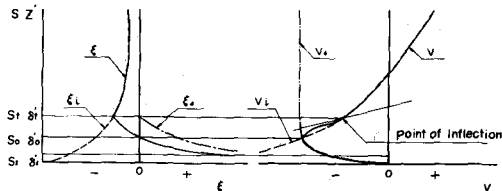


図-6 底面付近の ξ 、 v 分布の概観

$\delta_0' \leq z' \leq 1$ では v_i で近似できると仮定する。こうした取り扱い、水路の Inlet length の解析に対応するが、この場合、上層部の流れが $v_i = 0$ から出発する回転流であること、発達極限の分布形が明らかでない点に問題がある。

上の仮定にもとづいて v の分布形を定めるには、 δ_0' 、 $A_i(A_i)$ 、 v_h の三つの値を与えなければならない。いま、 δ_0' に関しては式 (23)、式 (24) の第 2 項の () 内の関数がほぼ一定値になる限界の $S (\div 1.5)$ より求め、 $A_i(A_i)$ 、 v_h は、 $z' = \delta_0'$ で $v_d = v_i$ および $\int_0^{\delta_0'} v_d dz' + \int_{\delta_0'}^1 v_i dz' = 0$ の条件より定まる。その結果、層流の場合、

$$\delta_0' = 1.5 \sqrt{\frac{4\nu\theta}{D}} \frac{r}{h} \quad (25) \quad v_h \div \frac{1}{3} \frac{U_*^2 h}{\nu} \theta (1 + 1.28 \delta_0') \quad (26) \quad A_i \div \frac{U_*^2}{\nu} \theta (1.81 \frac{1}{\delta_0'} - 6.63) \quad (27)$$

となり、乱流の場合、

$$\delta_0' = 2.25 \frac{\kappa U_* \theta r^2}{Dh} \quad (28) \quad v_h \div \frac{2U_*}{\kappa} \theta (1 + 3.96 \delta_0' + 2.96 s_0' \ln s_0') \quad (29)$$

$$A_i \div 1.05 \frac{U_*}{\kappa h} \theta (1 + 1.96 s_0' + s_0' \ln s_0') \quad (30)$$

が得られる。ただし、 v_h 、 $A_i(A_i)$ に関する式は、 $\delta_0' \leq 10^{-1}$ に対する近似式である。

以上の考察については、現在まだ詳細な検討を行っていないが、一つの目安として、底面の影響が水面に及ぶ限界を式 (28) および前述の定数 D を用いて求めると、

$$\delta_0' = 1 \quad : \quad \theta_i = \frac{Dh}{2.25 \kappa U_* r^2} \div \frac{0.44 Q}{\kappa U_* r^2 \ln^2 f_1} \quad (28)$$

となる。式 (28)' で $\kappa = 0.4$ として、表-1 の各実験ケースについて求めた結果を同表の最終欄に示してある。 θ_i は実験値の発生域の範囲とほぼ対応する場合もあるが、その範囲内に含まれる場合が多く、適用範囲は限られたものになる。表-1 に示した粗視的な領域区分と断面内の分布形との対応についてさらに詳細な検討が必要であろう。

5. むすび 以上、二次流の分布形について、直線流の渦度が粘性の影響を受けずに変形する過程を主現象と考え、底面の影響を副次的なものとして考察した。この方向にそってさらに近似を高めるには、彎曲部の形状に対応する主流の仮定および二次以上の摂動分に対する検討が考えられる。しかし、式の複雑化と現象に対する見通しが背反し、現象の本質に把握することが難しくなるようである。今後、彎曲部における流れの安定性の面から、各領域の特性、特に、内、外岸近傍の流れについて検討したいと考えている。

参 考 文 献

- 1) Squire H. B. and K. G. Winter : J. Aero. Sci. 18, (1951).
- 2) Hawthorne W. R. : Proc. Roy. Soc. A206, (1951)
- 3) Lighthill M. J. : J. Fluid Mech. 1, (1956). 4) Marris A. W. : Trans. ASME, Ser. D, Dec., (1963)
- 5) Hawthorne W. R. : Research Frontiers in Fluid Dynamics (Ed. Seeger & Temple) John Wiley & Sons p.p. 1-29 (1965)
- 6) Rozovskii I. L. : Flow of water in Bends of Open channels, Acad. sci, Ukrainian SSR, (1957)
- 7) Ben-Chic Yen : Report of Inst. of Hydro. Res., Univ. of Iowa (1965)
- 8) 村本嘉雄・井上喬之 : 京大防災研年報 8 号 (1965), 9) 村本嘉雄 : 京大防災研年報 9 号 (印刷中)