

流れと波の共存系の一解法について

神戸大学工学部 正会員 松 梨 順 三 郎

1. 緒 言

移動床上の流れによって砂面が波動的変形をうけると、一般に流れに周期運動が追加され、水面は波形的変動を伴う。この水面の変動は砂面のあらたな変動となつてかえってくる。したがって移動床の流れによる変形を研究の対象とする場合、流れと波の共存系についての知識が必要である。本研究はこのような立場から、流れの波と共存系について若干の理論的考察を試みたものである。研究の第一歩として、固定床を用いた。したがって、砂面の変動および砂の移動のない場で、水の流れと波が共存している系を取り扱った。

2. 理 論

(1) 第一次近似解の誘導 基礎方程式として、非線形項を省略したNavier-Stokesの運動方程式および連続の式を用いる。

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = g \sin \theta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_1}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} \right) \quad (1)$$

$$\frac{\partial w_1}{\partial t} = g \cos \theta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_1}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2} \right) \quad (2)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial w_1}{\partial z} = 0 \quad (3)$$

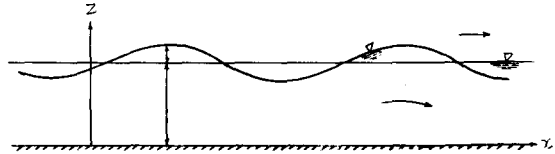


図-1 記号図

ここに、図-1は思考上の模型図であり、記号はすべて慣用のものを用いた。流れと波が共存する場合、 u 、 w 、 p はいずれも周期解と非周期解の和で与えられるような関数であると考えられる。ここではそれらを、

$$u_1 = u_{11}(z) e^{im_1(x-V_1 t)} + u_{12}(z) \quad (4)$$

$$w_1 = w_{11}(z) e^{im_1(x-V_1 t)} + w_{12}(z) \quad (5)$$

$$p/\rho = P_{11}(z) e^{im_1(x-V_1 t)} - P_{12}(z) \quad (6)$$

と仮定する。ここに、 u_1 、 w_1 、 p_1/ρ はこの共存系の第一次近似解とし、 U_{ij} 、 w_{ij} 、 P_{ij} はすべて z のみの関数とする。また、 $m_1 = 2\pi/L_1$ 、 $V_1 = L_1/T_1$ 、で L_1 は波長、 T_1 は波の周期を示す。式(4)、(5)、(6)を式(1)、(2)、(3)に代入すると、

$$\left(im_1 V_1 u_{11} + im_1 P_{11} - m_1^2 \nu u_{11} + \nu \frac{d^2 u_{11}}{dz^2} \right) e^{im_1(x-V_1 t)} + g \sin \theta + \nu \frac{d^2 u_{12}}{dz^2} = 0 \quad (7)$$

$$\left(im_1 V_1 w_{11} + \frac{dP_{11}}{dz} - m_1^2 \nu w_{11} + \nu \frac{d^2 w_{11}}{dz^2} \right) e^{im_1(x-V_1 t)} - g \cos \theta + \frac{dP_{12}}{dz} + \nu \frac{d^2 w_{12}}{dz^2} = 0 \quad (8)$$

$$\left(im_1 u_{11} + \frac{dw_{11}}{dz} \right) e^{im_1(x-V_1 t)} + \frac{dw_{12}}{dz} = 0 \quad (9)$$

となる。これらの関係が恒等的に満足されるためには、つぎの式(10)、(11)、(12)、(13)が同時に成立しなければならない。

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{d^2}{dz^2} - m_1^2 + \frac{im_1 V_1}{\nu} \right) u_{11} &= -\frac{im_1 P_{11}}{\nu} \\ \left(\frac{d^2}{dz^2} - m_1^2 + \frac{im_1 V_1}{\nu} \right) w_{11} &= -\frac{1}{\nu} \frac{dP_{11}}{dz} \\ im_1 u_{11} + \frac{dw_{11}}{dz} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$$g \sin \theta + \nu \frac{d^2 u_{12}}{dz^2} = 0, \quad -g \cos \theta + \frac{dP_{12}}{dz} + \nu \frac{d^2 w_{12}}{dz^2} = 0, \quad \frac{dw_{12}}{dz} = 0 \quad (11), (12), (13)$$

これらを連立方程式として解くと、その一般解として、

$$u_1 = \left\{ -\frac{1}{V_1} (Ae^{m_1 z} + Be^{-m_1 z}) + \frac{ik}{m_1} (Ce^{kz} - De^{-kz}) \right\} e^{im_1(x-V_1 t)} + \left(-\frac{g \sin \theta}{2\nu} z^2 + k_1 z + k_2 \right) \quad (14)$$

$$w_1 = \left\{ \frac{1}{V_1} (Ae^{m_1 z} - Be^{-m_1 z}) + (Ce^{kz} + De^{-kz}) \right\} e^{im_1(x-V_1 t)} + (k_3) \quad (15)$$

$$\frac{P_1}{\rho} = - (Ae^{m_1 z} + Be^{-m_1 z}) e^{im_1(x-V_1 t)} - (gz \cos \theta + k_4) \quad (16)$$

をうる。ここに $A, B, C, D, k_1, k_2, k_3, k_4$ は積分常数であり、 $k^2 = m_1^2 - im_1 V_1 / \nu$ とする。

つぎに境界条件は、 $\eta = ae^{im_1(x-V_1 t)}$ として、

$$a) \text{ 表面条件: } \left\{ F = \rho \nu \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial z} \right) \right\}_{z=h} = 0, \quad \left\{ G = -p + 2\rho \nu \frac{\partial w_1}{\partial z} \right\}_{z=h} = -\rho g \eta \quad (17), (18)$$

$$b) \text{ 水底条件: } [u_1]_{z=0} = 0, [w_1]_{z=0} = 0 \quad (19), (20)$$

を適用した。微小項を省略し、 $\beta = \{m_1 V_1 / 2\nu\}^{1/2}$ とすると、積分常数は、

$$A = \frac{-ga\{2 - (1+i)m_1/\beta\}}{4 \cosh m_1 h}, \quad B = \frac{-ga\{2 + (1+i)m_1/\beta\}}{4 \cosh m_1 h}, \quad C = 0, \quad D = \frac{(1-i)ga m_1}{2\beta V_1 \cosh m_1 h} \quad (21)$$

$$k = \frac{gh \sin \theta}{\nu}, \quad k_2 = 0, \quad k_3 = 0, \quad k_4 = -gh \cos \theta \quad (22)$$

と決定される。

以上で共存系の第一次近似解が得られたわけである。第二次近似解をうるにさきだち、この第一次近似解のもつ水理学的特性について若干の考察をおこなう。

(2) 共存系における流れの効果

波動が流れの共存によって、どのような影響をうけるかにつき、ここでは速度および波高の変化をとりあげた。波形の表面条件として、式 (17), (18) のほかに、

$$\left[\frac{\partial \eta}{\partial t} + u_1 \frac{\partial \eta}{\partial x} \right]_{z=h} = [w_1]_{z=h} \quad (23)$$

をとりあげ、 $u_{11} \ll u_{12}$ として、 u_1 の代りに u_{12} を適用すると、式 (23) は、

$$\nu^2 - \frac{g \sin \theta}{\nu} \frac{h^2}{2} V - \frac{g}{2m \cosh mh} \left\{ 2 \sinh mh - \frac{m}{\beta} \cosh mh + \frac{m}{\beta} e^{-\beta h} (\cos \beta h - \sin \beta h) \right\}$$

$$+\frac{gi}{2m\cosh mh}\left\{\frac{m}{\beta}\cosh mh-\frac{m}{\beta}e^{-\beta h}(\cos\beta h+\sin\beta h)\right\}=0 \quad (29)$$

となる。ここに m , V などの添字は省略した。式 (29)において $e^{-\beta h}$ の項は他の項に比較して微小であるから、これを省略すると、式 (29) は、

$$V^2-\frac{g\sin\theta}{\nu}-\frac{h^2}{2}V-\frac{g}{m}(\tanh mh-\frac{m}{2\beta})+i\frac{g}{2\beta}=0 \quad (30)$$

となる。式 (30)の第一近似として、完全流体で流れの共存のない場合、すなわち、 $\nu=0$, $\sin\theta=0$ の場の解を求めると、微小振幅波の波速を与える関係式、

$$V_f=\sqrt{\frac{g}{m}\tanh mh}=V_0 \quad (31)$$

が得られる。つぎに、粘性流体で流れの共存のない場合、すなわち、 $\sin\theta=0$, $\beta=\sqrt{mV/2\nu}\doteq\sqrt{mV_0/2\nu}$ とすると、式 (30)の第二近似を与える方程式は、

$$V^2-\frac{g}{m}(\tanh mh-\frac{m}{2}\sqrt{\frac{2\nu}{mV_0}})+i\frac{g}{2}\sqrt{\frac{2\nu}{mV_0}}=0 \quad (32)$$

となる。この解を、 $V_s=V_2-i/m\tau_2$ とおくと、

$$V_2=V_0\left\{1-\frac{\sqrt{m\nu}}{2\sqrt{2V_0}\tanh mh}\right\}, \quad \frac{1}{\tau_2}=\frac{\sqrt{m^3V_0}\nu}{2\sqrt{2}\tanh mh}+\frac{\nu m^2}{8\tanh^2 mh} \quad (34), (35)$$

をうる。式 (33) より波形 η は、

$$\eta=ae^{im(x-Vt)}=ae^{-t/\tau_2}e^{im(x-V_2t)} \quad (36)$$

で与えられる。したがって、 V_2 および $1/\tau_2$ はそれぞれこの波形の伝播速度および波高の変化に関係する量であることがわかる。すなわち式 (34), (35) によると、流体の粘性によって波速は減少し、波高は時間の経過とともに減衰していくことがわかる。S. S. Hough の研究結果を参照すると、式 (35) の第 1 項は流体の内部粘性によるものであり、第 2 項は底面摩擦によるものであることがわかる。

つぎに式 (30)の第三近似値を与える方程式は、 $\beta=\sqrt{mV/2\nu}\doteq\sqrt{mV_0/2\nu}$ とし、式 (30)の第 2 項の V を、式 (33)で与えられる第二近似値 V_s で置換えることにより、

$$V^2-\frac{g\sin\theta}{\nu}-\frac{h^2}{2}V_s-\frac{g}{m}(\tanh mh-\frac{m}{2}\frac{2\nu}{mV_0})+i\frac{g}{2}\sqrt{\frac{2\nu}{mV_0}}=0 \quad (37)$$

とする。この方程式の解を、 $V_t=V_3-i/m\tau_3$ とおくと、

$$V_3=V_0(1-\alpha)+\left\{\frac{V_0}{2}-\frac{1}{8}\frac{\sqrt{2\nu mV}}{\tanh mh}(1-2\alpha)\right\}\left(\frac{v_s}{V_0}\right)+\frac{(1-\alpha)V_0}{4}\left(\frac{v_s}{V_0}\right)^2 \quad (38)$$

$$\frac{1}{\tau_3}=\frac{1}{\tau_2}+\frac{1}{2}\frac{\nu m^2}{8\tanh^2 mh}\left(\frac{v_s}{V_0}\right)-\frac{1}{4}\frac{1}{\tau_2}\left(\frac{v_s}{V_0}\right)^2 \quad (40)$$

となる。ここに $\alpha=\sqrt{m\nu}/\{2\sqrt{2V_0}\tanh mh\}$ であり、 $v_s=[u_{12}]_{z=h}=gh^2\sin\theta/2\nu$ である。式 (39) の右辺第 2 項および第 3 項は、流れの共存による波速への効果を与え、式 (40)の右辺第 2 項及び第 3 項は流れの共存による波高減衰への影響を与える。図-2, 3 はこれら流れの共存による効果を定量

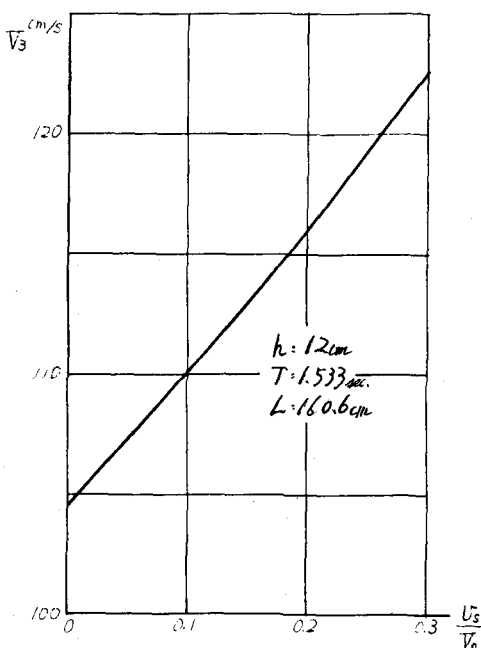


図-2 流速の増加による波速の変化

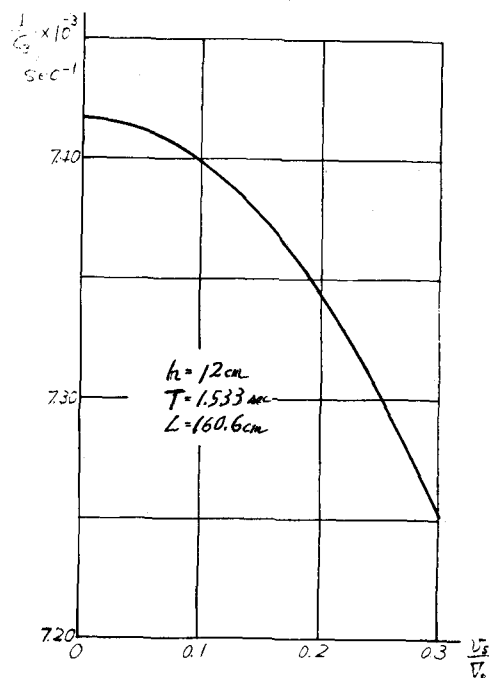


図-3 流速の増加による $1/\tau_3$ の変化

的に評価した結果を示す。これによると、波速および波高は、流れの増大とともに、粘性の効果にうちかって波速はかえって増大し、波高の時間的減衰はかえって緩まることがわかる。

(3) 第二次近似解の誘導 基礎方程式としては、第一次近似解によってNavier Stokesの運動方程式および連続式を線形化した、

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x} + w_1 \frac{\partial u_2}{\partial z} = g \sin \theta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_2}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} \right) \quad (41)$$

$$\frac{\partial w_2}{\partial x} + u_1 \frac{\partial w_2}{\partial x} + w_1 \frac{\partial w_2}{\partial z} = -g \cos \theta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_2}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_2}{\partial z^2} \right) \quad (42)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial w_2}{\partial z} = 0 \quad (43)$$

を用いる。前節で述べたように、第一次近似解の特性によると、流れが共存する場合には、粘性の波動に与える効果は非常に微弱で、これを省略してよいと考えられる。したがって、ここでは式(41)、

(42)の右辺第3項はいずれも省略した。つぎに流れの関数 ψ を導入し、

$$u_2 = \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (44), (45)$$

$$\psi = \varphi_{21}(z) e^{im_2(x - V_2 t)} + \varphi_{22}(z) \quad (46)$$

$$\varphi_{21}(0) = \varphi_{22}(0) = 0 \quad (47)$$

とする。式(41)、(42)をそれぞれ z および x で微分して p_2 を消去するわけであるが、この場合、

$$w_1 \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} \div w_2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} \quad (48)$$

と近似すると，

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u_2}{\partial z} - \frac{\partial w_2}{\partial x} \right) + \frac{\partial u_1}{\partial z} \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial w_2}{\partial z} + u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_2}{\partial z} - \frac{\partial w_2}{\partial x} \right) \\ + \frac{\partial w_1}{\partial z} \frac{\partial u_2}{\partial z} - \frac{\partial w_1}{\partial x} \frac{\partial w_2}{\partial z} + w_2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} - w_1 \frac{\partial^2 w_2}{\partial x \partial z} = 0 \end{aligned} \quad (49)$$

となる。つぎに，式(44)，(45)の u_2 ， w_2 を上式に代入するわけであるが，この場合，

$$\frac{\partial w_1}{\partial z} (\varphi_{21}'' e^{im_2(x-V_2t)} + \varphi_{22}'') \div \frac{\partial w_1}{\partial z} \varphi_{21} e^{im_2(x-V_2t)} + \frac{\partial w_2}{\partial z} \varphi_{22}'' \quad (50)$$

と近似するとともに，式(4)，(5)，(6)で示される第一近似解を代入すると，

$$e^{im_1(x-V_1t)} \{ \varphi_{21}'' (im_2 u_{11} + w_{11}') + \varphi_{21}' (im_2 u_{11}' - m_1 m_2 w_{11} - m_2^2 w_{11}) + \varphi_{21} (-im_1 m_2^2 u_{11} - im_2^3 u_{11} - im_2 u_{11}'') \}$$

$$+ \varphi_{22}'' (-im_2 \varphi_{21}') + \{ \varphi_{21}'' (im_2 u_{12} - im_2 V_2) + \varphi_{21}' (im_2 u_{12}') + \varphi_{21} (im_2^3 V_2 - im_2^3 u_{12} - im_2 u_{12}'') \} = 0 \quad (51)$$

となる。この式が恒等的に成立するためには，つぎの二式，

$$\varphi_{21}'' (im_2 u_{11} + w_{11}') + \varphi_{21}' (im_2 u_{11}' - m_1 m_2 w_{11} - m_2^2 w_{11}) + \varphi_{21} (-im_1 m_2^2 u_{11} - im_2^3 u_{11} - im_2^3 u_{11}'') = 0 \quad (52)$$

$$\varphi_{22}'' (-im_2 \varphi_{21}') + \{ \varphi_{21}'' (im_2 u_{12} - im_2 V_2) + \varphi_{21}' (im_2 u_{12}') + \varphi_{21} (im_2^3 V_2 - im_2^3 u_{12} - im_2 u_{12}'') \} = 0 \quad (53)$$

が同時に成立すればよい。これらの式によると，式(52)で φ_{21} の解が決定されると，式(53)から容易に φ_{22} の解が求まることがわかる。そこでまず式(52)の一般解を求める。式(52)を $m_1 z = \xi$ によって変数変換するとともに，その係を指数展開によって与えると，

$$\xi f_1(\xi) \frac{d^2 \varphi_{21}}{d\xi^2} + F_2(\xi) \frac{d \varphi_{21}}{d\xi} + F_3(\xi) \varphi_{21} = 0 \quad (54)$$

となる。ここに，

$$f_1(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \xi^{n-1} = A_1 + A_2 \xi + A_3 \xi^2 + \dots \quad (55)$$

$$F_2(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \xi^n = B_0 + B_1 \xi + B_2 \xi^2 + \dots \quad (56)$$

$$F_3(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \xi^n = C_0 + C_1 \xi + C_2 \xi^2 + \dots \quad (57)$$

とする。Frobeniusの方法によって，式(54)の級数解を求めると，

$$\varphi_{21} = A \sum_{n=0}^{\infty} h_n \xi^n + B \xi \delta \sum_{n=0}^{\infty} g_n \xi^n \quad (58)$$

をうる。ここに A および B は積分常数で， $m_2 < m_1$ を考慮すると，

$$\delta = 1 - \frac{B_0}{A_1} = 1 + \frac{m_2}{m_1(-m_2+m_1)} > 1 \quad (59)$$

である。つぎに第二近似解の境界条件は，式(17)～(20)で示される第一近似解のものと同一とす

ることが望ましいが、ここでは計算の困難をさけるため、つぎの条件を適用した。

$$a) \text{ 表面条件: } \left\{ \frac{\partial \eta}{\partial t} + u_{22} \frac{\partial \eta}{\partial x} - w_2 \right\}_{z=h} = 0, \quad \left\{ G = -P_2 + 2\rho\nu \frac{\partial w_2}{\partial z} \right\}_{z=h} = \rho g \eta \quad (80), (81)$$

$$b) \text{ 水底条件: } [u_2]_{z=0} = 0, \quad [w_2]_{z=0} = 0 \quad (82), (83)$$

$\eta = a e^{im_2(x-V_2 t)}$ とすると、式 (80) および (81) はそれぞれ、

$$a [\varphi'_{22}]_{z=h} + [\varphi_{21}]_{z=h} - V_2 a = 0 \quad (84)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{および} \quad \int_0^h (-m_2^2 V_2 \varphi_{21} + m_2^2 u_{12} \varphi_{21}) dz - 2im_2\nu [\varphi'_{21}]_{z=h} + ga = 0 \\ \int_0^h (m_2^2 u_{11} \varphi_{21} - im_2 w_{11} \varphi'_{21}) dz = 0 \end{aligned} \right\} \quad (85)$$

となる。また式 (82) は、

$$[\varphi'_{21}]_{z=0} = 0, \quad [\varphi'_{22}]_{z=0} = 0 \quad (86), (87)$$

式 (83) は、

$$[\varphi_{21}]_{z=0} = 0 \quad (88)$$

となる。

式 (47) およびこれと同一の条件式 (88) を満足するように、式 (78) で示される φ_{21} を決定すると、 $A=0$ となり、

$$\varphi_{21} = B \xi^\delta \sum_{n=0}^{\infty} g_n \xi^n \quad (89)$$

となる。この φ_{21} はそのまま条件式 (86) を満足する。つぎに、式 (85) の第一式によって積分常数 B を決定すると、

$$B = \frac{-ga}{x_0 + y_0 + z_0} \quad (90)$$

となる。ここに、

$$x_0 = -\frac{m_2^2 V_2}{m_1} \left\{ \frac{g_0}{\delta+1} (m_1 h)^{\delta+1} + \frac{g_1}{\delta+2} (m_1 h)^{\delta+2} + \frac{g_2}{\delta+3} (m_1 h)^{\delta+3} + \dots \right\} \quad (91)$$

$$y_0 = \frac{g \sin \theta}{2\nu} \frac{m_2^2}{m_1^3} \left\{ 2hm_1 \frac{g_0}{\delta+2} (m_1 h)^{\delta+2} + \frac{2hm_1 g_1 - g_0}{\delta+3} (m_1 h)^{\delta+3} + \frac{2hm_1 g_2 - g_1}{\delta+4} (m_1 h)^{\delta+4} + \dots \right\} \quad (92)$$

$$z_0 = -2i\nu m_1 m_2 (m_1 h)^{\delta-1} \left\{ \delta g_0 + g_1 (\delta+1) m_1 h + g_2 (\delta+2) (m_1 h)^2 + g_3 (\delta+3) (m_1 h)^3 + \dots \right\} \quad (93)$$

とする。以下の計算結果については講演時に発表します。

参 考 文 献

- 1) S.S. Hough: On the Influence of viscosity on Waves and Currents, Proceedings, London Math. Soc., Vol. 28, No. 1, 1896-1897.
- 2) 浜田徳一・加藤始: 流水をさかのぼる波についての一計算, 第8回海岸工学講演集, 土木学会, 昭和36年.