

地下における二層流の非定常運動

東大工学部 正 会 員 嶋 祐 之
東大大学院 学生会員 玉 井 伸 往

序 海岸部では、陸上より流出する地下水とその下部に侵入した密度の大きな海水とが相互に影響しながら運動している。この両者の境界面の運動、特に先端の移動を考察する。実験は自由表面を有する流れについて行なわれたが、自由表面の変化は境界面の変化に比し微小であるので、解析は自由表面を有しない被圧地下水として扱った。滞水層は均一で等方性と考え、境界面は明確に分離していると仮定し、塩分分散は無視した。解析は、変数分離で基礎方程式を常微分化して解く方法¹⁾及び流出する淡水流量の分布を仮定して解く方法²⁾を行なった。

解析 考察する滞水層、境界面の模式図を図-1に示す。上層に関する量には添字 1 を、下層に関する量には 2 を付ける。

非定常運動においても、慣性項の影響は小さいと考え、近似的にダルシーの法則が成立すると仮定する。さらに侵入の長さはその厚さに比

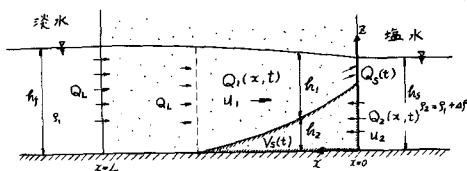


図-1 滞水層の模式図

べ大で滞水層は薄いと考え得て、Dupuitの準一様流の仮定が成立するものと考ええる。

1. 変数分離による方法

運動方程式は

$$\begin{cases} u_1 = -\frac{k}{\mu_1} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} = -\frac{k}{\mu_1} \frac{\partial p_1}{\partial x} \\ u_2 = -\frac{k}{\mu_2} \frac{\partial \phi_2}{\partial x} = -\frac{k}{\mu_2} \frac{\partial p_2}{\partial x} \end{cases} \quad (1-1-a)$$

$$(1-1-b)$$

である。ここに

$$\phi_1 = p_1 + \rho_1 g z, \quad \phi_2 = p_2 + \rho_2 g z \quad (1-2)$$

k : 滞水層の浸透係数

μ_1, μ_2 : 粘性係数

である。また準一様流の仮定から

$$\begin{cases} p_1 = \rho_1 g (h_1 + h_2 - z) \\ p_2 = \rho_1 g h_1 + \rho_2 g (h_2 - z), \end{cases} \quad (1-3-a)$$

$$(1-3-b)$$

であるから、これを式(1-1-a), (1-1-b)に代入すると

$$\begin{cases} u_1 = -\frac{k \rho_1 g}{\mu_1} \left(\frac{\partial h_1}{\partial x} + \frac{\partial h_2}{\partial x} \right) \\ u_2 = -\frac{k \rho_1 g}{\mu_2} \frac{\partial h_1}{\partial x} - \frac{k \rho_2 g}{\mu_2} \frac{\partial h_2}{\partial x} \end{cases} \quad (1-4-a)$$

$$(1-4-b)$$

この両式より

$$\frac{\partial h_2}{\partial x} = \frac{\mu_1 u_1 - \mu_2 u_2}{k (\rho_2 - \rho_1) g} \quad (1-5)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (h_1 + h_2) = -\frac{\mu_1 u_1}{k \rho_1 g} \quad (1-6)$$

であり、従って

$$\frac{\partial(h_1+h_2)}{\partial x} \bigg/ \frac{\partial h_2}{\partial x} = - \frac{\mu_1 u_1}{\mu_1 u_1 - \mu_2 u_2} \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1}$$

である。近似的に $\mu_1 = \mu_2$ と考え、淡水が海側へ流れ塩水が侵入する場合は、 $u_1 < 0, u_2 \geq 0$ であり

$$\left| \frac{\partial(h_1+h_2)}{\partial x} \bigg/ \frac{\partial h_2}{\partial x} \right| \leq \frac{|u_1|}{|u_2| + |u_1|} \frac{\Delta \rho}{\rho_1} \leq \frac{\Delta \rho}{\rho_1} \quad (1-7)$$

である。よって、自由表面の変化は微小であるから、近似的に厚さ h_s の被圧された滞水層と考える。連続の方程式は

$$\begin{cases} \theta \frac{\partial}{\partial t} (h_s - h_2) + \frac{\partial}{\partial x} \{ u_1 (h_s - h_2) \} = 0 & (1-8-a) \\ \theta \frac{\partial}{\partial t} h_2 + \frac{\partial}{\partial x} (u_2 h_2) = 0 & (1-8-b) \\ \theta : \text{空げき率} & (1-8-c) \end{cases}$$

である。式 (1-4-a), (1-4-b) をそれぞれ式 (1-8-a), (1-8-b) に代入すると次式を得る。

$$-\frac{\theta}{K} \frac{\partial h_2}{\partial t} - h_s \frac{\partial^2 (h_1+h_2)}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h_2^2}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} (h_2 \frac{\partial h_1}{\partial x}) = 0 \quad (1-9)$$

$$\frac{\theta}{K} \frac{\partial h_2}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h_2^2}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x} (h_2 \frac{\partial h_1}{\partial x}) - \frac{\varepsilon}{z} \frac{\partial^2 h_2^2}{\partial x^2} = 0 \quad (1-10)$$

ここに

$$K = \frac{k \rho_1 g}{\mu_1} = \frac{k \rho_1 g}{\mu_2} : \text{ダルシーの浸透係数}; \quad \varepsilon = \frac{\Delta \rho}{\rho_1} \quad (1-11)$$

である。式 (1-9), (1-10) の和を作り一度積分すると

$$h_s \frac{\partial}{\partial x} (h_1+h_2) + \frac{\varepsilon}{z} \frac{\partial h_2^2}{\partial x} = C(t)$$

簡単のため、時間のみの関数 $C(t)$ は零に等しいと置く。

$$\frac{\partial h_1}{\partial x} = - \frac{\partial h_2}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{2 h_s} \frac{\partial h_2^2}{\partial x} \quad (1-12)$$

式 (1-12) を式 (1-10) に代入して h_1 を消去すれば

$$\theta \frac{\partial h_2}{\partial t} - \frac{K \varepsilon}{2} \frac{\partial^2 h_2^2}{\partial x^2} + \frac{K \varepsilon}{2 h_s} \frac{\partial}{\partial x} (h_2 \frac{\partial h_2^2}{\partial x}) = 0 \quad (1-13)$$

ここで h_2 は、 $\eta = x/a\sqrt{t}$ なる変数 η のみの関数と考えると式 (1-13) は次のように常微分化される。

$$\frac{\theta a^2}{K \varepsilon} \eta \frac{d h_2^2}{d \eta} + \frac{d^2 h_2^2}{d \eta^2} - \frac{1}{h_s} \frac{d}{d \eta} (h_2 \frac{d h_2^2}{d \eta}) = 0 \quad (1-14)$$

さらに、 $x=0$ での h_2 の値を h と記し、次の置換を行なうと

$$h_2 = h u, \quad \beta = h/h_s, \quad a = 2 \sqrt{\frac{K \varepsilon h}{\theta}}, \quad \eta = \frac{x \sqrt{\theta}}{2 \sqrt{K \varepsilon h t}}, \quad \varepsilon = \sqrt{2} \eta \quad (1-15)$$

方程式

$$\frac{d^2 u^2}{d \xi^2} + 2 \xi \frac{d u}{d \xi} - \beta \frac{d}{d \xi} (u \frac{d u^2}{d \xi}) = 0 \quad (1-16)$$

を得る。式 (1-16) で $u=0$ とすれば、 $u' \neq \infty$, $u'' \neq \infty$ であるから

$$u' (u' + \xi) = 0$$

これから、 $u \neq 0$ であれば

$$u' + \xi = 0 \quad (1-17)$$

を得る。考察している場合には、 u 曲線と横軸との交点があると仮定し、この座標値を C で示す。従って $\xi = C$ なる点で

$$u = 0, \quad u' = -C \quad (1-18)$$

である。 u を $\xi = C$ の近傍で級数に展開すれば

$$u = u(C) + \frac{u'(C)}{1!} (\xi - C) + \frac{u''(C)}{2!} (\xi - C)^2 + \frac{u'''(C)}{3!} (\xi - C)^3 + \frac{u^{IV}(C)}{4!} (\xi - C)^4 + \dots$$

であり、 $u'(C) = -C$ であることは式 (1-18) よりわかる。 u'' , u''' , ... を求めるには、式 (1-16) を微分して式 (1-18) の条件を代入して u' を求め、これを繰返し次々に求める。5階の微係数までを計算すると

$$\begin{aligned}
u = & -C(\xi - C) + \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\beta C^2\right)(\xi - C)^2 + \left(-\frac{1}{72C} + \frac{5}{18}\beta C - \frac{1}{2}\beta^2 C^3\right)(\xi - C)^3 \\
& + \left(\frac{1}{576C^2} + \frac{5}{96}\beta + \frac{29}{144}\beta^2 C^2 + \frac{5}{8}\beta^3 C^4\right)(\xi - C)^4 \\
& + \left(-\frac{11}{86400C^3} + \frac{7}{4320}\frac{\beta}{C} - \frac{2437}{10800}\beta^2 C + \frac{1}{3}\beta^3 C^3 - \frac{7}{8}\beta^4 C^5\right)(\xi - C)^5 + \dots \quad (1-19)
\end{aligned}$$

この級数の収束を数学的に厳密に証明することは筆者には不可能であるので、実用的に以下述べる目安をつけるに止める。貯水池から土中へ浸透する一層の液体の場合を参照すれば C は 1 に近い値であり、 $0 < \beta < 1$ であるから、 $\beta C < 1$ と仮定する。 $(\xi - C)^n$ の項の係数は、 n が大きくなっても一項の値が $n(\beta C)^n$ を越えることはないと思われ、また n 項の和であるからただか $n^2(\beta C)^n$ を越えない。 $0 < \beta C < 1$ であるから $(\xi - C)^n$ の係数は

$$A = n^2 \left(\frac{1}{1 + \Delta h} \right)^n$$

と表わすことができ

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{A} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2} \frac{1}{1 + \Delta h} = \frac{1}{1 + \Delta h} \\
\lim_{n \rightarrow \infty} A &= \left(\frac{1}{1 + \Delta h} \right)^n = 0
\end{aligned}$$

従って上記仮定の下に収束半径は無限大である。 $\beta C < 1$ の仮定は、境界条件 $\xi = 0$ で $u = 1$ を式(1-19)に代入して C を β の関数として求めた結果でも常に満足されているから、実用的には式(1-19)の級数の収束性を細かくいう必要はないと思われる。

上記境界条件から C の値を求めると(近似的に C^4 の項までを含む演算で求める)、 β のそれぞれの値に対して以下のごとく決まる。

$$\begin{array}{llllllll}
\beta : & 0.5 & , & 0.6 & , & 0.7 & , & 0.8 & , & 0.9 & , & 1.0 & , \\
C : & 1.048 & , & 1.033 & , & 1.014 & , & 1.009 & , & 0.996 & , & 0.986 & ,
\end{array} \quad (1-20)$$

これらの値に対して、 ξ と u の関係を算定した結果を図-2に示す。

侵入するくさびの先端の位置は、先端で $\xi = C$ 、または $\xi = \sqrt{2} \eta$ であるから

$$x = C \sqrt{\frac{2K\epsilon h}{\theta}} \sqrt{t} \quad (1-21)$$

しかるにこの解法では、境界条件として $\xi = 0$ すなわち $\eta = 0$ で $u = h_2/h = 1$ としている。 $\eta = x/a\sqrt{t}$ であるから、 $\eta = 0$ の条件は $x = 0$ と $t = \infty$ とを同時に表わしてしまう。従って淡水の補給はなく、終局的には重い液体の層の上に軽い液体の層が乗って二層を成す場合にしか当てはまらない。

同様な場合を考えた Rumer & Harleman の近似解³⁾では侵入は常に滞水層の厚さの $1/2$ 点から生ずる場合を考えて

$$x = \sqrt{\frac{K\epsilon h_s}{\theta}} \sqrt{t} \quad (1-22-a)$$

を与えている。これを式(1-21)で考えると $\beta = 1/2$ であるから

$$x = 1.05 \sqrt{\frac{K\epsilon h_s}{\theta}} \sqrt{t} \quad (1-22-b)$$

である。

また J. Bear & G. Dagan⁴⁾も同様な場合を $\beta = 1$ で考察し

$$x = 1.32 \sqrt{\frac{K\epsilon h_s}{\theta}} \sqrt{t} \quad (1-23-a)$$

を与えている。この場合を式(1-20)で考えてみれば次式を得る。

$$x = 1.39 \sqrt{\frac{K\epsilon h_s}{\theta}} \sqrt{t} \quad (1-23-b)$$

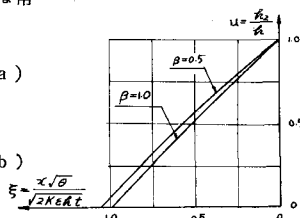


図-2 u と ξ の関係

2. 流量分布を仮定する方法

準一様流の仮定が満足されると考えれば

$$u_1 = \frac{Q_1(x, t)}{h_1}, \quad u_2 = \frac{Q_2(x, t)}{h_2} \quad (2-1)$$

である。ここに $Q_1(x, t)$, $Q_2(x, t)$ は x 軸正方向の流れのとき付である。式(2-1)を式(1-5)に代入して次式を得る。

$$\frac{\partial h_1}{\partial x} = \frac{Q_2}{K\varepsilon(h_s - h_1)} - \frac{Q_1}{K\varepsilon h_1} \quad (2-2)$$

連続の方程式(1-8-a), (1-8-b) の両辺の和をとれば

$$Q_1 + Q_2 = Q_L(t) \quad (2-3)$$

を得る。よって式(2-2)は次のようになる。

$$\frac{\partial h_1}{\partial x} = \frac{Q_L}{K\varepsilon(h_s - h_1)} - \frac{Q_1 h_s}{K\varepsilon h_1(h_s - h_1)} \quad (2-4)$$

塩水で占められている領域の体積を $V_s(t)$ と記すと、連続性より

$$\theta \frac{dV_s(t)}{dt} = Q_L - Q_s \quad (2-5-a)$$

また

$$V_s(t) = \int_{h_{10}}^{h_s} x(h_1, t) dh_1 \quad (2-5-b)$$

である。ここに h_{10} は $x=0$ での h_1 の値である。

基本的な仮定は、 $Q_1(x, t)$ が $x=l$, $h_1=h_s$ での Q_L なる値から、 $x=0$, $h_1=h_{10}$ での Q_s なる値へ既述の法則に従って変化することがある。最初に二層を隔てておいて、その境を取り除くと塩水の侵入が始まる場合は、 $|Q_L|$ が徐々に増大するであろうが、その変化は初期に大きく、以後定常状態での値に漸近するであろう。初期には自由表面の勾配は大きく、 $|Q_s|$ は非常に大きいから、これに対し $|Q_L|$ の変化は無視しうると考え、 Q_L は一定値を保つものとする。従って未知数 h_1 と $Q_s(t) \equiv Q_2(0, t)$ で書かれた方程式は(2-4)及び(2-5)の両式である。

Q_1 の分布の近似は、最初上層にある流量が流れていれば淡水流量をくさび先端で変化させたとき、前の流れの影響が残って図-3の点線のごとくであろうが、淡・塩水を分離して置くと、初期には滞水層全域に対しては流れがないから、最終値への収束はその場合より早いと思われるので、図の実線の如き直線で近似する。

$$Q_1 = Q_L + \frac{Q_L - Q_s}{h_s - h_{10}}(h_1 - h_s) \quad (2-6)$$

これを式(2-4)に代入し、 $x=0$ で $h_1=h_{10}$ の条件の下に積分すれば

$$h_1^2(x, t) - h_{10}^2 = -2 \frac{h_s Q_s - h_{10} Q_L}{K\varepsilon(h_s - h_{10})} x \quad (2-7)$$

Q_s , Q_L が一定であれば、これは定常状態に対する放物線を示す。

ここでは Q_s 及び Q_L の変化に応じた放物線群が得られる。

塩水により占められる体積 V は式(2-7)を式(2-5-b)に代入して

$$V_s = -\frac{K\varepsilon(h_s - h_{10})^3(h_s + 2h_{10})}{6(h_s Q_s - h_{10} Q_L)} \quad (2-8)$$

また式(2-5-a)より

$$\theta \frac{dV_s}{dQ_s} \frac{dQ_s}{dt} = Q_L - Q_s$$

であるから

$$\alpha = \frac{h_{10}}{h_s} \quad (2-9)$$

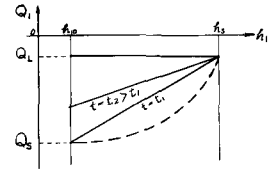


図-3 上層の流量の近似

と置けば

$$\frac{dQ_s}{dt} = \frac{6}{\theta K \varepsilon h_s^3 (1-\alpha)^3 (1+2\alpha)} (Q_s - \alpha Q_L)^2 (Q_L - Q_s) \quad (2-10)$$

ここに α は時間によらず一定と仮定する。式 (2-10) は Q_s を決める微分方程式であり、初期条件 $t=0$ で $Q_s = \infty$ の下に積分し

$$\bar{Q}_s = \frac{Q_s}{Q_L} \quad (2-11)$$

$$t = \frac{Q_L^2 \cdot \bar{Q}_s}{\theta K \varepsilon h_s^3 (1-\alpha)^3 (1+2\alpha)} \quad (2-12)$$

と置けば次式が得られる。

$$\bar{t} = \frac{1}{6} \left\{ \ln \left| \frac{\bar{Q}_s - \alpha}{\bar{Q}_s - 1} \right| - (1-2\alpha) \frac{1}{\bar{Q}_s - \alpha} \right\} \quad (2-13)$$

侵入するくさび先端の移動を知るには、式 (2-7) において $h_1 = h_s$ なる点の時間変化を知ればよい。従って

$$x = \frac{Q_L \cdot x}{K \varepsilon h_s^2 (1-\alpha)^2 (1+\alpha)} \quad (2-14)$$

と置けば

$$\bar{x} = -\frac{1}{2} \frac{1}{\bar{Q}_s - \alpha} \quad (2-15)$$

が得られる。 Q_s を媒介変数として、式 (2-13), (2-15) から ($\bar{x}$, $\bar{t}$) の関係を求めればよい。

実験及び考察 実際に用いた水路は幅 20cm, 長さ 200cm のもので、この中にプラスチック球及び砂を詰めて行なった。淡水面と塩水面を一定水位差に保ち、その後遮閉板を抜いて塩水の侵入を開始させた。塩水は過マンガン酸カリウムで着色した。境界面は判然と区別でき、実験時間中での拡散は無視できると思われる。プラスチック球での実験は遅い現象なので直接読み取りながら記録し、砂の場合は測定時刻ごとにガラス鉛筆で軌跡を描き、後に記録した。

空けき率及びダルシーの浸透係数は、水路に充填されたものを直接調べるわけにいかないで、同様な詰め方をしたと思われる試料に対する測定値を用いた。含まれる空気量に対しても、便宜的に同じ解釈をした。測定値は

$$\text{プラスチック球} \quad K=0.50 \text{ cm/sec}, \quad \theta=37.5\%$$

$$\text{砂} \quad K=1.45 \text{ cm/sec}, \quad \theta=39.7\%$$

である。

さらに α 及び単位幅流量 Q_L は定常状態に達したときの値を用いた。 $\Delta h = h_f - h_s$ で示すと、それらは、

$$\alpha = 0.353 \quad \frac{\Delta h^2}{\varepsilon^2 h_s L} \quad (2-16) \quad Q_L = -\frac{K}{2L} \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} \Delta h^2 \quad (2-17)$$

で示される。⁵⁾ (参考文献 4)。L は水位差を測定した間隔である。

媒体がプラスチック球、砂についての実験結果を図-4~図-7 に示す。プラスチック球の実験資料は $L=100\text{cm}$ のものである。砂での実験結果は解析と良く一致するが、プラスチック球での実験が合致しない理由は、次の 2 つが考えられる。その 1 は、 α が最初から一定であっても、くさび先端の位置は α により図-8 のごとく異なる。プラスチック球での実験では、塩水侵入点 $x=0$ の塩水層の厚さ h_{20} が最終値に近づくまでの時間が大きい。初期 300 秒の間に達した厚さと最終値を比較してみると、プラスチック球が 75%, 砂で 90% 前後で、90% に達するのに約 2,000 秒要する。その頃には $\bar{Q}_s$ の変化は緩やかであり、 α の時間変化と同じオーダーであり、式 (2-11) を導く際にその項が問題となると思われ

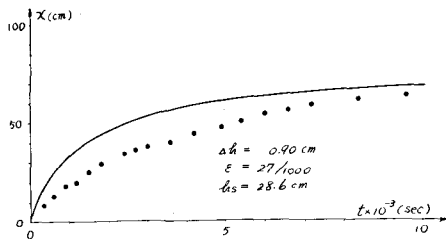


図-4 実験結果 (プラスチック球)

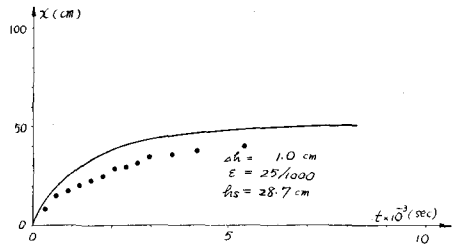


図-5 実験結果 (プラスチック球)

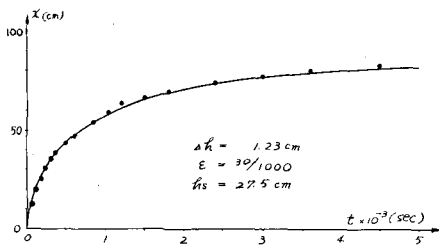


図-6 実験結果 (砂)

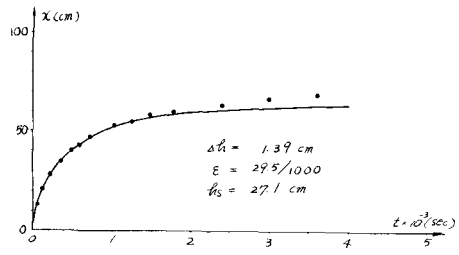


図-7 実験結果 (プラスチック球)

る。これは浸透係数が小さなことが原因であろう。その2は、浸透係数が大きくないと、準一様流の仮定と式(1-8)の形の連続の方程式はともに成立し得ない、ことである。準一様流の流れの場では、ポテンシャルを考え、 $w = \partial\phi/\partial z = -K_z \partial H/\partial z$ と考える。連続の方程式を考える際は鉛直流速を無視しては前述の形にならないから、左辺は有限値である。然るに $\partial H/\partial z = 0$ であるから、等方性であれば、 $K_z = K_x = \infty$ でないと合致しない。

結語 1) 自由表面を有する流れでも、その勾配が緩かであれば、被圧地下水と同様の取扱いができる； 2) 侵入する楔先端の移動に対し与えられていた従前の近似式の相違は、塩水侵入点での厚さを考えれば説明できる； 3) 運動方程式において鉛直流速を無視する準一様流の取扱いは、非定常運動では浸透係数が大きい場合にしか適用できないと思われる。

最後に、大学院博士課程早川典生氏の批評と、学部学生原納信介、牧野慧両君の実験への協力があったことを記し謝意を表わしたい。

参 考 文 献

- 1) P.Kochina ; Theory of ground water movement, Princeton Univ. Press, pp.505-511.
- 2) J.Bear, G.Dagan ; Moving interface in coastal aquifers, Proc. of A.S.C.E., Vol.90, HY4, July, 1964.
- 3) R.R.Rumer, D.R.F.Harleman ; Intruded salt-water wedge in porous media, Proc of A.S.C.E., Vol.89, HY6, Nov.1963.
- 4) 昭和39年度 河川湖委員会報告, 東大土木 河川研究室

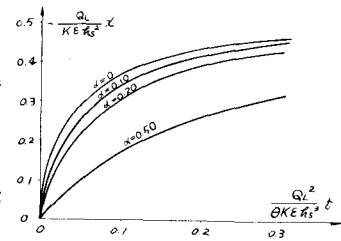


図-8 楔先端の移動に及ぼす α の影響