

(C-4) 非定常揚水試験から透水係数を求める一方法

千葉県開発局工業用水部 三宅 康夫
同 池田 達哉

揚水井から一定量を揚水し、観測井の時間～水位降下を測定することにより、地盤の透水係数を求める方法は、タイスの標準曲線解析法等種々考えられているが、筆者はこれを透水係数 ($k \text{ cm/s}$) と空げき率 ($\lambda\%$) をパラメーターにして図表化し、空げき率による水面降下の特性を見出した。これにより、種々の地盤の透水試験の計画への利用はもとより、透水係数の算定をより簡単化することが出来た。またタイスの公式から修正式を求め実験値により従来 of 式と比較した。

1. 自由水面のある井戸の非定常流

図-1に示すような円筒形座標系を考えると、任意時間 t 、任意距離 r における水位 $h(t, r)$ を表わす基本方程式は次のようになる。

運動方程式

$$\frac{1}{\lambda g} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial r} + \frac{v}{k} = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

連続の式

$$\lambda \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r h v)}{\partial r} = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここに v : 水平方向流速 k : 透水係数
 h : 水位 λ : 土の有効空げき率
 r : 井戸中心からの距離
 t : 時間
 g : 重力の加速度

(1)式において、 $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$ すなわち加速度の項を省略するも

$$v = -k \frac{\partial h}{\partial r} \quad \dots\dots\dots (3)$$

なるダルシーの法則が得られる。これを(2)式に代入し、 $h \neq H$ とおくと次の(4)式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} &= \frac{k}{\lambda r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r h \frac{\partial h}{\partial r} \right) \\ &= \frac{kH}{\lambda r} \left(r \frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + \frac{\partial h}{\partial r} \right) \quad \dots\dots\dots (4) \end{aligned}$$

$v = \eta^2 = \lambda r^2 / 4kHt$, $\eta = r / 2\sqrt{k\frac{H}{\lambda}t}$ なる変換⁽¹⁾を行なうと

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} &= \frac{\partial \eta}{\partial t} \cdot \frac{\partial h}{\partial \eta} = - \frac{1}{4\sqrt{k\frac{H}{\lambda}t}} \cdot \frac{r}{t} \frac{dh}{d\eta} \\ \frac{\partial h}{\partial r} &= \frac{\partial \eta}{\partial r} \cdot \frac{dh}{d\eta} = \frac{1}{2\sqrt{k\frac{H}{\lambda}t}} \cdot \frac{dh}{d\eta} \\ \frac{\partial^2 h}{\partial r^2} &= \frac{\partial^2 \eta}{\partial r^2} \frac{dh}{d\eta} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial r} \right)^2 \cdot \frac{d^2 h}{d\eta^2} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (5)$$

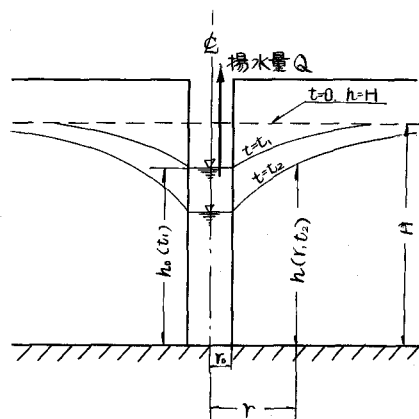


図-1

となり、これを(4)式に代入すると

$$\frac{d^2 h}{d\eta^2} + \left(\frac{1}{\eta} + 2\eta\right) \frac{dh}{d\eta} = 0 \quad \dots\dots\dots (6)$$

(6)式を1回積分すると

$$\frac{dh}{d\eta} = C \cdot \frac{e^{-\eta^2}}{\eta}$$

ここで $t = 0$ すなわち、 $\eta = \infty$ で $h = H$ なる条件のもとにさらに1回積分すると

$$h = H - C \int_{\eta}^{\infty} \frac{e^{-\eta^2}}{\eta} d\eta = H - \frac{C}{2} \int_u^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du \quad \dots\dots\dots (7)$$

が得られる。(7)式に $r = 0$ 、 $t > 0$ で $Q = 2\pi r k H \left(\frac{\partial h}{\partial r}\right)_{r=0}$ なる境界条件を用いると、

$$Q = 2\pi k CH \left(\frac{e^{-\eta^2}}{\eta} \cdot \frac{r}{2\sqrt{k\frac{H}{\lambda}t}}\right)_{r=0} = 2\pi k CH$$

$$\therefore C = \frac{Q}{2\pi k H} \quad \dots\dots\dots (7')$$

となり、これを(7)式に代入すると、

$$h = H - \frac{Q}{4\pi k H} \int_u^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du \quad \dots\dots\dots (8)$$

となる。

2. 境界条件に対する修正

今、揚水孔 r_0 における水位を h_0 とし、境界条件を次のように考える。

$$Q = 2\pi r_0 k h_0 \left(\frac{\partial h}{\partial r}\right)_{r=r_0} \quad \dots\dots\dots (9)$$

また(7)式から

$$\frac{\partial h}{\partial r} = C \cdot \frac{e^{-\eta^2}}{\eta} \cdot \frac{1}{2\sqrt{k\frac{H}{\lambda}t}}$$

となり、これを(9)式に代入すると

$$C = \frac{Q}{2\pi k h_0} e^{-\eta_0^2}, \quad \text{ただし} \quad \eta_0 = \frac{r_0}{2\sqrt{k\frac{H}{\lambda}t}}$$

これを(7)式に代入し、 $h = h_0$ とおくと、

$$h_0 = H - \frac{Q}{4\pi k h_0} e^{-u_0} \int_{u_0}^{\infty} \frac{e^{-u_0}}{u_0} du_0 \quad \dots\dots\dots (10)$$

ここに

$$K = \frac{Q}{4\pi k} e^{-u_0} \int_{u_0}^{\infty} \frac{e^{-u_0}}{u_0} du_0$$

とおくと

$$h_0 = \frac{H + \sqrt{H^2 - 4K}}{2} \quad \dots\dots\dots (11)$$

となる。この(10)式を用いて水位降下を表わすと次式が得られる。

$$h = H - \frac{Q}{4\pi k h_0} e^{-u_0} \int_u^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du \quad \dots\dots\dots (12)$$

3. 計算図表の作成

ふつう地盤の空けき率は、25～70%であり一方有効空けき率は、土砂の保水率を減じた値であるとされている。⁽²⁾ この考え方によると、有効空けき率は、洪積の泥層粘土に対し最小の5～10%から、最大は砂層の30%となっている。一方当県にて実施した河口部砂層における揚水試験から3%なる結果を得た。⁽³⁾ また別の実験⁽⁴⁾からは0.1%程度の値になったことを報告している。これらを考え合せると、水理的空けき率はいわゆる土質的なそれとは異なり、かなり小さい値を示すと考えられる。

また、 k と λ に関数関係のないことも図-2 から明らかとなった。⁽⁵⁾ 実用的な範囲を想定し、次のケースについて図表を作成した。

$$k = 1 \times 10^{-1}, 8 \times 10^{-2}, 6 \times 10^{-2}, 4 \times 10^{-2}, 2 \times 10^{-2}, 1 \times 10^{-2}, 8 \times 10^{-3}, 6 \times 10^{-3}, 4 \times 10^{-3}, 2 \times 10^{-3}, 1 \times 10^{-3} \quad (\text{cm/s})$$

$$\lambda = 0.001, 0.01, 0.1$$

$$Q = 0.1 \quad (\text{m}^3/\text{min})$$

$$H = 10 \quad (\text{m})$$

これらに対し $t/r^2 \text{ (min/m}^2\text{)}$ を変数に図表化する
と図-3~5 のようになる。

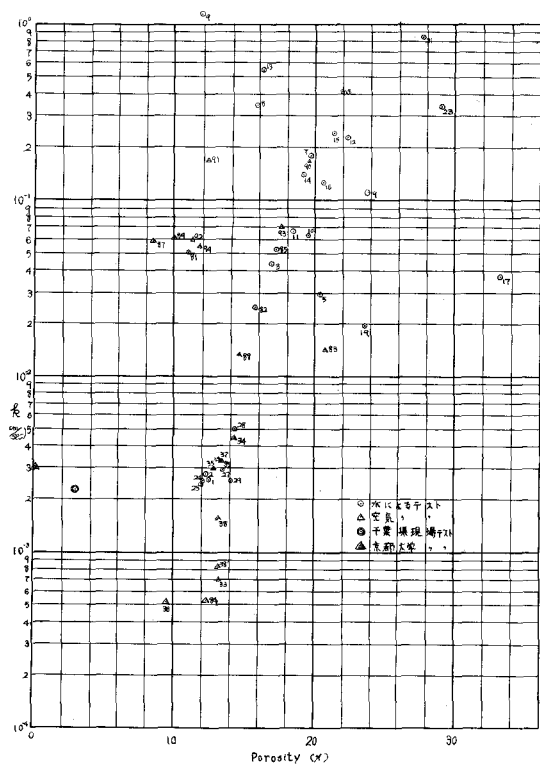
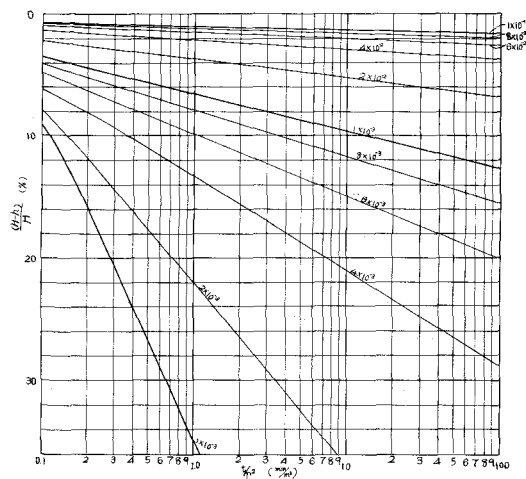


図 - 2



4. 図表の使用法

H , λ , Q , が任意の値である場合の図表の使用法について述べる。

(1) H , λ , Q が任意の場合

特に $\lambda < 0.01$ の場合: u にかかわらず, ほとんど直線になることから (7) 式を次のように近似する。

$$\frac{H_1 - h}{H_1} = \left(\frac{Q_1}{4\pi k} \right) \frac{1}{H_1^2} \left[-0.5772 - 2.3 \log \frac{r^2}{t} \cdot \frac{1}{4k} - 2.3 \log \frac{\lambda_1}{H_1} \right] \dots\dots\dots (3)$$

図-3~5 の諸元を H_1 , λ_1 , Q_1 で表わし, 任意の求めたい場合を H_2 , λ_2 , Q_2 とする。

$m = H_2/H_1$, $n = \lambda_2/\lambda_1$, $l = Q_2/Q_1$ とおく。一方 (4) 式を m , n , l について表わせば,

$$\begin{aligned} \frac{H_2 - h}{H_2} &= \left(\frac{Q_2}{4\pi k} \right) \frac{1}{H_2^2} \left[-0.5772 - 2.3 \log \frac{r^2}{t} \cdot \frac{1}{4k} - 2.3 \log \frac{\lambda_2}{H_2} \right] \\ &= \left(\frac{Q_1}{4\pi k} \right) \frac{1}{m^2} \frac{1}{H_1^2} \left[-0.5772 - 2.3 \log \frac{r^2}{t} \cdot \frac{1}{4k} - 2.3 \log \frac{n}{m} \cdot \frac{\lambda_1}{H_1} \right] \dots\dots (4) \end{aligned}$$

したがって, 任意のデータについて図を利用する場合

(1) データを $\frac{H-h}{H}$ で表現し, $\frac{m}{l}$ 倍する。

(2) $\frac{m}{l} \cdot \frac{(H-h)}{H} \sim t/r^2$ をセミログ紙にプロットし, $\log \frac{n}{m}$ 平行移動させて図に重ねる。

ただし, $\frac{n}{m} > 1$ では $\ominus$ 側に, $\log \frac{n}{m}$ 移動, $0 < \frac{n}{m} < 1$ では $\oplus$ 側に移動させる。

(2) k の決定

(3) 式を変形し, k に関する式とすると,

$$\frac{H-h}{H} = \left(\frac{Q}{4\pi H^2} \right) \frac{1}{k} \left[-0.5772 - 2.3 \log \frac{r^2}{t} \cdot \frac{\lambda}{4H} + 2.3 \log k \right]$$

こゝで $H = 10^m$, $Q = 0.1 \text{ ml/min}$, $\frac{t}{r^2} = 1, 10, \lambda = 0.001$ の時の $\frac{H-h}{H} \sim k$ を計算すると図-7 のようになる。

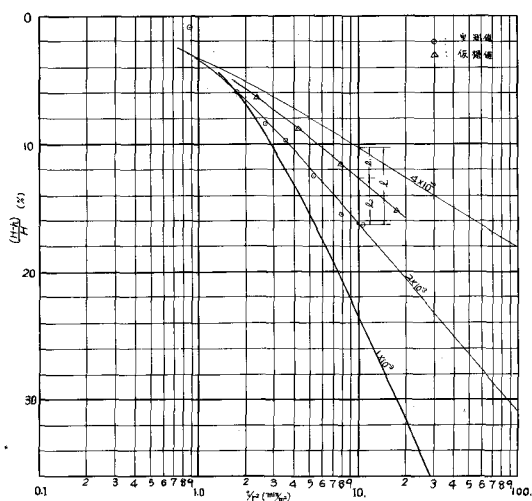


図 - 6

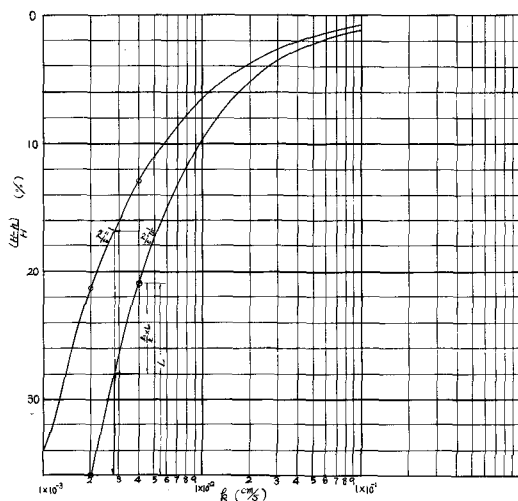


図 - 7

⑧ 実例による使用法

$H = 11.78$, $Q = 0.044 \text{ m}^3/\text{min}$, $\lambda = 0.03$ の k を求める。

$$m = H_2 / H_1 = 1.18, \quad l = Q_2 / Q_1 = 0.44$$

$$n = \lambda_2 / \lambda_1 = 3$$

$$m^2/l = 3.18, \quad \frac{n}{m} = 2.54$$

表-1 をプロットし, $\log 2.54$ の側に移動させると, $k = 2 \times 10^{-3} \text{ (cm/sec)}$ の線上になり k が求められる。線上にならない場合は (Δ) 印, $\frac{1}{l} \cdot L$ を求め, 図-7 から求める。

表-1 実測値 $r = 2.4$

$t(\text{min})$	試験値 (m)	降下量 (m)	$H-h$ H (%)	t/r^2	$\frac{H-h}{H}$ の修正 (%)
0	0.405	0	0	0	0
5	0.371	0.034	0.29	0.87	0.92
10	0.185	0.220	1.87	1.73	5.95
15	0.092	0.313	2.65	2.6	8.43
20	0.044	0.361	3.06	3.47	9.73
30	-0.055	0.460	3.90	5.2	12.4
45	-0.169	0.574	4.85	7.81	15.4
60	-0.201	0.606	5.14	10.40	16.3

5. 修正式の計算結果

2. で求めた修正式により, 実測値と比較すると, 図-8 のようになる。すなわち上で求めた $k = 2 \times 10^{-3} \text{ (cm/sec)}$ は修正式によると, $k = 2.5 \times 10^{-3} \text{ (cm/sec)}$ となり $r = 2.4$ の場合には, それほどの影響のないことが分った。 $r = 1$ 程度では, かなり井戸内水位の影響があると思われるので, 修正式によりチェックする必要があると思われる。

6. 結 語

現場観測から地盤の透水係数を求める方法は, 色々あるが, いずれも理論的に欠かんがあったり定常状態をつくるのに時間を要したりする欠点があるので, 筆者は非定常状態から透水係数を容易に求め得る一方法を提案した。

なお境界条件を修正した一私案は(4)式を解くに当り $H \approx h$ と仮定している根本問題の解決にはならないが, 境界条件において $h = h_0$ としたものである。5. の修正式の計算結果にも述べているように, 観測井が揚水井に近い場合には修正式は相当効果があると思われる。

この問題についてはさらに研究を進めたいと考えておりますので, 関係諸兄のご批判をいただけるなら幸いに存じます。

最後に, 本計算にご協力をいただいた, 同部の石合徳人, 村田勇の両君に謝意を表します。

参考文献

- (1) 野満隆治: 井戸理論の一進展(第2報), 地球物理, 7-1
- (2) 土木学会: 水理公式集(昭和38年増補改訂版) p.311
- (3) 千葉県: 小櫃川河口ダム調査報告, 1964, 3.
- (4) 赤井浩一・他: 自由水面をもつ地下水の揚水試験に対する考察, 土と基礎, vol. 11, No. 7, 1964, p.15~19
- (5) Muskat, M: The Flow of Homogeneous Fluid through Porous Media, (1937) p.103~109.

