

(C-3) モンテ・カルロ法による乱流拡散の二、三の計算について

電力中央研究所 日 野 幹 雄

1. 序論：近時の目覚ましい工業の発展——それも多くの場合関連企業が一地区に集ってコンビナートを形成している——に伴って水質汚濁や大気汚染が重大な問題となりつつある。工場からの有害排出物廃棄物を有効にかつ経済的に処理することは現在の技術段階では多くの場合困難がともなう。それゆえ、大気や流水の拡散作用に依存する場合はなほ多い。また単に化学工場とか火力または原子力発電所のみではなく、急速に膨脹する都市人口による下水処理においても費用や建設期間の点から未処理または半処理のまま汚物を海水中に放出する例（アメリカ Santa Monica Bay）もある。

このような河水・海水や大気による拡散の程度を知るために、現場調査や模型実験を行うとか拡散方程式の解析解や数値解を求める必要がある。しかしながら、現場調査は費用や規模が大きい上に結果から必ずしも一般則が得られないこと、模型実験では相似律を完全に満足することが困難であるなどの問題がある。拡散現象を記述する微分方程式を解くことも実際問題として難しいことが多い。

拡散現象は Fick の方程式(1)を解いて求められる。

$$\frac{Dc}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \frac{\partial c}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_y \frac{\partial c}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial c}{\partial z} \right) \dots\dots\dots (1)$$

こゝに、 c は濃度、 $x \cdot y \cdot z$ は座標軸、 $K_x \cdot K_y \cdot K_z$ はそれぞれの方向の乱流拡散係数である。この $K_x \cdot K_y \cdot K_z$ はもちろん場所の関数であるが、流速その他の平均的特性に関して explicit に表すことは一般に不可能であり、したがって、特殊の場合を除けば式(1)の解析解はもちろん数値解を得ることも困難である。

一様流の場合の Taylor の拡散理論による解は良く知られている¹⁾。また、管路や開水路の拡散は Taylor²⁾, Elder³⁾ によって解れている。Shear flow 内の Sutton の解⁴⁾も良く知られ、利用されているが、この Sutton の理論には井上⁵⁾ や小倉によって根本的な誤謬が指摘されており、現在では理論式というよりは、一種の経験的計算式として受け取られている。Sutton 式をこのように経験式として割り切って考え発展させた大気拡散式に Pasquill-Meade 式（英国気象局式）⁶⁾ がある。

大気の接地層内の拡散については、式(1)を直接解かずに相似の仮定で解く理論が最近発表されている。すなわち、Monin⁷⁾, Kao⁸⁾, 横山⁹⁾ は Euler 的相似理論を；また、Batchelor¹⁰⁾, Ellison¹¹⁾, Cermak^{12), 13)} は Lagrange 的相似理論を発表している。

しかし、微分方程式の解であるにしる相似理論であるにしる、解が適用しうるのは単純で理想化された流れの場に対してだけである。式(1)の数値積分によって解を求めることも出来るが¹⁴⁾、これとても流れの場の他に乱流拡散係数が与えられた場合である。一般的には拡散係数を流れの場の性質から知ることは難しい。しかし、乱れの特性は平均的場の特性で表しうることが多い。したがって、微分方程式を介することなく、直接流体力の乱流運動をシミュレートして拡散問題を解くことができる。¹⁵⁾

確率論的 (Stochastic) な現象をシミュレートするのに Monte Carlo が良く用いられ、OR (Operations Research) の分野では広く応用されている。また、Monte Carlo 法は定積分・積分方程式・境

界値問題など非確率論的 (non-Stochastic) な問題にも応用され、現在では Monte Carlo 法は「確率論的および決定論的な問題の解明に無作為抽出の方法を応用すること」と定義されている。確率的現象である乱流の問題に Monte Carlo 法が未だ応用されていないのは、現象がたゞ単にある確率分布にしたがう不規則現象であることの他に、相関とかスペクトルとかの統計的規則性の存在することがその一理由であると考えられる。例えば、煙の粒子の運動を追跡してみても上下左右に細かな不規則運動を繰り返しつつ全体として上とか下とかに運動しており、必して急激な運動の変化はない。つまり、不規則であるが滑らかな連続的な変化で、単なる酔歩とか Brown 運動とは現象が異なるためである。(最近 Monte Carlo 法を層流拡散に応用した論文が発表された。¹⁷⁾)

乱流現象は乱子理論をモデル化してシミュレートすることができ、その思想や手法また作られた乱流モデルの Euler 的および Lagrange 的相関やスペクトルが実際の現象を良く真似ていることなどについてはずで文献 15), 16) に発表した。したがって、ここではこのような乱流モデル (複合乱数列) を応用した拡散計算の二三の例についてのべる。

2. 電子計算機による乱数拡散のシミュレーション

a) 一様流 (等方均一性乱流) 中の拡散: 複合乱数列モデルによる乱流拡散のシミュレーションの妥当性を検討するために、まず最も基本的な等方均一性乱れの一様流場で拡散の数値実験を行い、Taylor の拡散理論と比較しよう。

排出源からの (大きさや重さのない) 粒子を時間ステップ Δt 毎に追跡するものとし、 $t = i \Delta t$ における粒子の座標を (X_i, Y_i, Z_i) 、各点での乱れの成分を (u'_i, v'_i, w'_i) とすれば、各時間ステップにおける粒子の位置は式 (2) で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} X_i &= X_{i-1} + (U_{i-1} + u'_i) \Delta t \\ Y_i &= Y_{i-1} + v'_i \Delta t \\ Z_i &= Z_{i-1} + w'_i \Delta t \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

また、乱れの成分 v'_i は複合乱数列モデル I¹⁶⁾ で与える。すなわち、 $R_i^{(n)}$ を $\sigma = 1$ で Gauss 分布の乱数で、 n 階級の乱子の i ステップの乱子速度に対応するものとすれば、

$$v'_i = \left(\sum A_{u0} \left(\frac{\tau_n}{\tau_0} \right)^{\frac{1}{2}} R_{u1}^{(n)} \right), \quad \sum A_{v0} \left(\frac{\tau_n}{\tau_0} \right)^{\frac{1}{2}} R_{v1}^{(n)}, \quad \sum A_{w0} \left(\frac{\tau_n}{\tau_0} \right)^{\frac{1}{2}} R_{w1}^{(n)} \quad (3)$$

である。 τ_n は n 階級の乱子の寿命時間である。乱れの強さを $\sqrt{u_1'^2} = \alpha U_*$ などとすれば、 A_{u0}, A_{v0}, A_{w0} は、

$$A_{u0} = A_{v0} = A_{w0} = \alpha U_* / \sqrt{\sum_{i=0}^{N-1} (\tau_n / \tau_0)} \quad (4)$$

$U_0 = 1, U_* = 0.1, \alpha = 1$ とし、乱子の階級数を 5 又は 6 (したがって乱子の寿命時間はそれぞれ $2\Delta t, 4\Delta t, 8\Delta t, 16\Delta t, 32\Delta t$ および $64\Delta t$)、 $\Delta t = 1$ とし、まず粒子の Lagrange 相関および Lagrange スペクトルを計算する。図 - 1 および 2 はその一例であり、相関係数は

$$C(\tau) \propto e^{-\alpha \tau} \quad (5)$$

スペクトル関数は

$$S(f_*) \propto f_*^{-2} \quad (6)$$

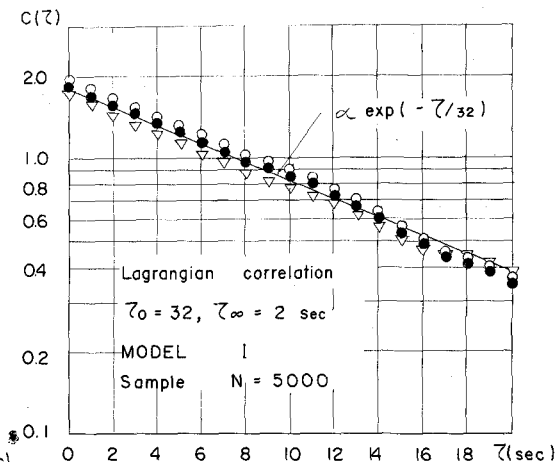
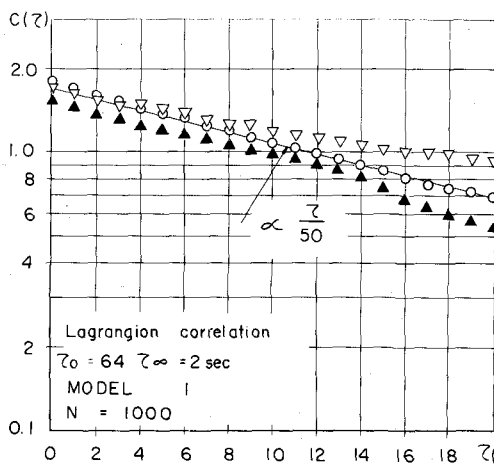


図-1 複合乱数列によりシミュレートされた乱流場の Lagrange 相関係数

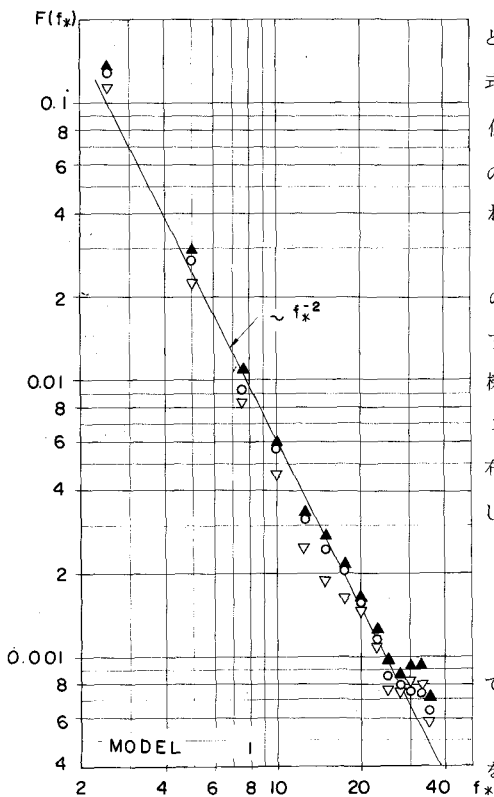


図-2 Lagrange スペクトル

となり、ともに乱子理論の与える結果と一致している。式(5)の指数 $A\tau$ は井上によれば τ/τ_0 であるが、この関係もほぼ成り立っている。したがって、5あるいは6ケの乱子階級で十分現実の乱流場のシミュレーションがなされていると考えて良い。

同一の条件で点源から500ケの粒子を放出し、 10×1 のセルの中に入る粒子数を求めた結果は、図-3, 4に示すようになる。乱数の発生および粒子の追跡は電子計算機 IBM 7090 を用いて行った。この場合の計算時間は12/100時間であった。同時に点源からの距離と粒子分布の重心および標準偏差も計算した。 X と $\bar{Y}^2$ の関係を示したのが図-5である。

等方均一性乱流場の拡散理論によれば¹⁾、拡散係数は、

$$D_Y = \frac{1}{2} \frac{d\bar{Y}^2}{dt} = \overline{v'^2} \int_0^t R_\xi d\xi \quad (7)$$

である。ここに、 R_ξ は Lagrange 相関係数

$$R_\xi = \overline{v(t)v(t-\xi)} / \overline{v'^2} \quad (8)$$

を表す。先にのべたように、 R_ξ は

$$R_\xi = e^{-\xi/\tau_0} \quad (9)$$

と表しうるから、 D_Y および $\bar{Y}^2$ は

$$D_Y = 2\overline{v'^2} \tau_0 (1 - e^{-\frac{t}{\tau_0}}) \quad (10)$$

[illegible]

図-3 計算結果の Output data

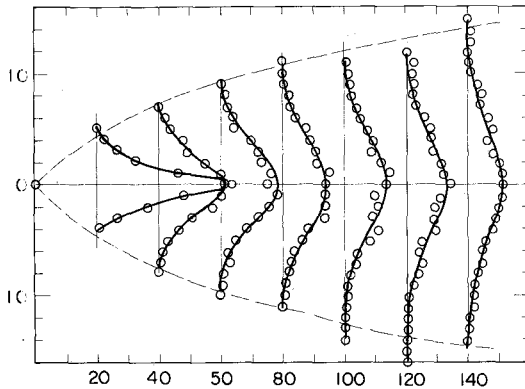


図 - 4 一様流中の拡散

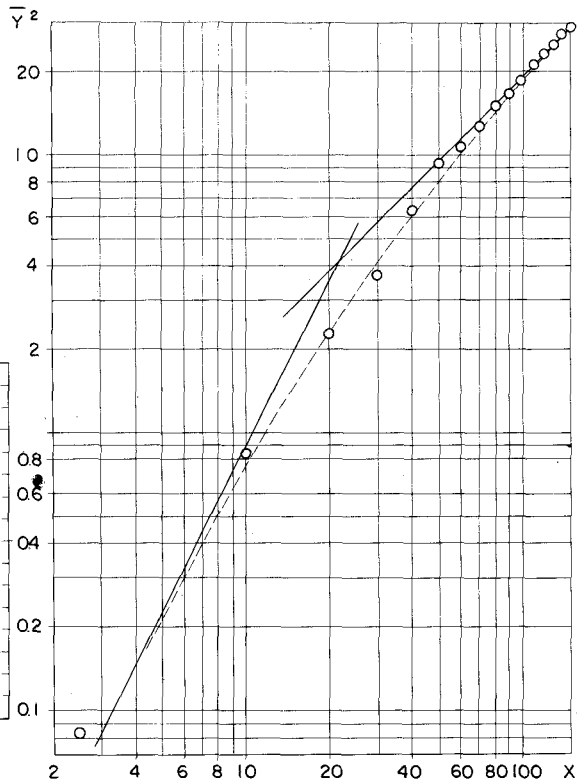


図-5 粒子の拡りと点源からの距離との関係

$$Y^2 = 2v'^2 \tau_0^2 \left\{ \frac{x}{U_0 \tau_0} - \left(1 - e^{-\frac{x}{U_0 \tau_0}} \right) \right\} \quad (11)$$

となる。この関係は点源に近い所では $\overline{Y^2} \propto x^2$ となり、点源から遠く離れると $\overline{Y^2} \propto x$ となる。図-5 にみられるようにこれらの関係は複合乱数列によるシミュレーションでも証明される。

なお、乱れの強さが等しい単純な random walk model で同一の数値実験をした結果を図-6に示す。この場合には、粒子の拡がり巾はずっと狭くなっている。それは各ステップ毎の粒子の運動に相関がなく、ある時間ステップに上方に動いても次のステップには上下同じ確率で運動するからである。つまり、粒子の乱流運動の寿命時間あるいは渦径が小さく、拡散係数 $D_y = 1/\sqrt{\nu^2}$ が小さいからである。

b) 境界層内の拡散： 地表面の煙源からの煙の拡散巾・地表濃度については、先に述べたように Monin⁷⁾やその他の Euler 的相似理論や Ellison¹¹⁾その他の Lagrange 的相似理論が最近発表されている。

このような剪断流中での拡散も上述と同一の方法で解くことができる。ただし、 u' と w' との間に Reynolds 応力を生み出す相関のある点と、乱れの強さが Richardson 数の関数である点とを考慮する必要がある。 u' と w' との間の相関を取り入れるには

$$\mathbf{w}_i = \tilde{\mathbf{w}}_i - \mu \mathbf{u}_i \quad (12)$$

とおき、 $\tilde{w}_i$ は上述の方法で作られる u_i とは無関係な乱れ成分であるとすれば良い。かつ、乱れの強さ

は方向性をもつこと ($\sqrt{u_1^2} = \alpha U_*$, $\sqrt{v_1^2} = \beta U_*$, $\sqrt{w_1^2} = \gamma U_*$) を考慮すれば,

$$\left. \begin{aligned} A_{uo} &= \alpha U_* / \sqrt{\sum_{i=0}^{N-1} (\tau_i / \tau_o)} \\ A_{vo} &= \beta U_* / \sqrt{\sum_{i=0}^{N-1} (\tau_i / \tau_o)} \\ A_{wo} &= \gamma U_* / \sqrt{1 - \frac{1}{\alpha^2 \gamma^2}} / \sqrt{\sum_{i=0}^{N-1} (\tau_i / \tau_o)} \\ \mu &= 1 / \alpha^2 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

となる。Reynolds 応力に寄与するのは大きな渦であるから、最大階級の乱子のみが $-u'w' = U_*^2$ に関係すると考えれば,

$$\left. \begin{aligned} A_{wo} &= \gamma U_* \sqrt{1 - \frac{\sum (\tau_n / \tau_o)}{\alpha^2 \gamma^2}} / \sqrt{\sum (\tau_i / \tau_o)} \\ \mu &= \sum (\tau_n / \tau_o) / \alpha^2 \end{aligned} \right\} \quad (13a)$$

とすべきである。また、乱れの強さは

$$\left. \begin{aligned} (\overline{w'^2})^{1/2} / U_* &\propto (1 - R_r)^{1/2} \\ R_r &= \frac{K_n}{K_a} \frac{\frac{g}{T} \frac{d\theta}{dT}}{(\frac{dU}{dT})^2} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

で与えられる。図-7 は一つの計算例である。

c) 複雑な流れの場での拡散：複合乱数列モデル（あるいは修正モンテ・カルロ法）が最も有効であるのは、流れの場や乱れの特性が複雑な場合である。解析的解を導くことはもちろん数値解を得ることも難かしい流れの場において本論文で説明した方法の特性が発揮される。図-8 は半円形の小山のある場合、地表面にある煙源からの煙の拡散状況を計算した例である。平均流はポテンシャル流として与えたから、地表

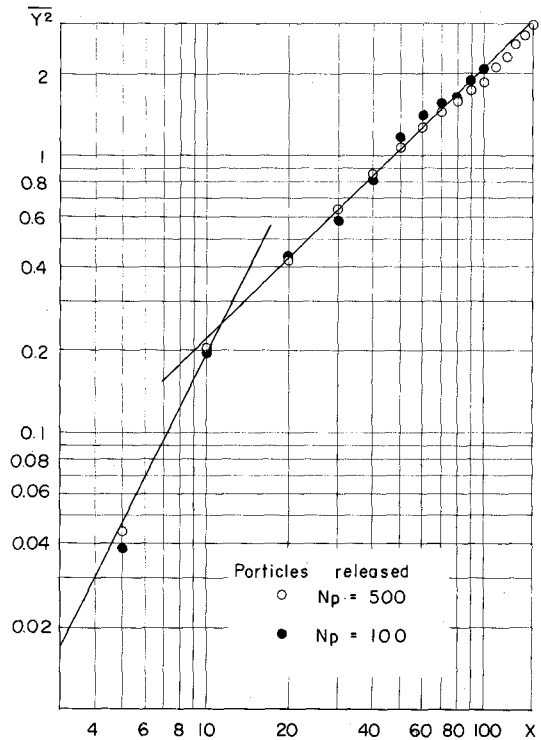


図-6 単純な random walk model による数値実験の結果 (U_* , $\sqrt{u'^2}$, Δt 等は図-5 の場合と同じ)

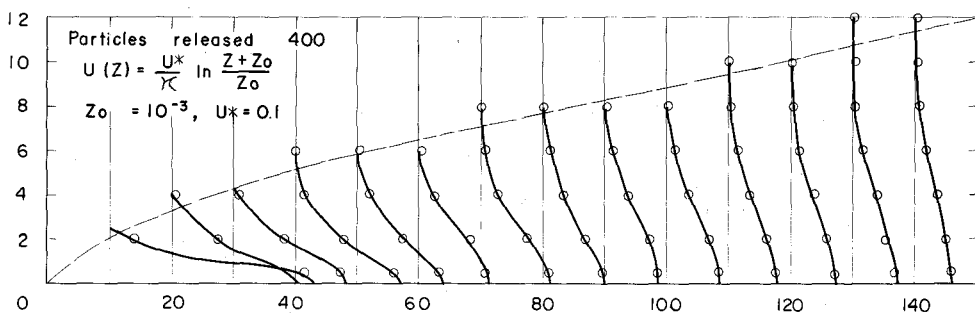


図-7 接地気層内の煙の拡散

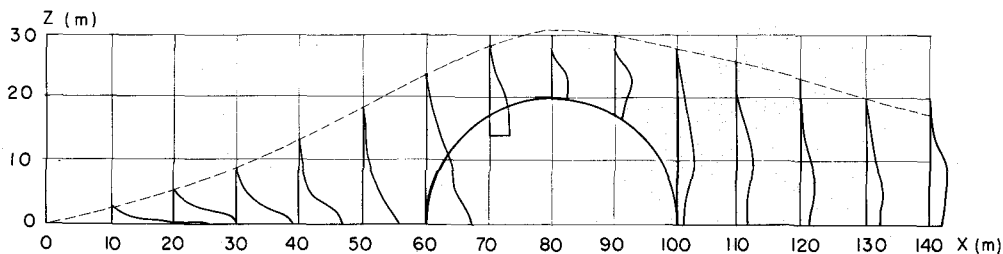


図-8 半円形の小山のある場合の地表煙源からの拡散

面の境界層の影響や小山の後流の影響は入っていない。これらの要素を input data としてサブ・ルーティンに組むことにより計算結果の信頼度を高めることができる。

本論文の作成にあたり三菱原子力工業KK 計算課 日野 和子・中瀬 澄子両氏に IMB 7090 プログラムの助力をおおがいた。ここに感意を表したい。

参 考 文 献

- 1) Taylor, G.I.: Diffusion by continuous movements. Proc. Lond. Math. Soc. Ser. 2, vol. XX, 196-212, (1921).
- 2) Taylor, G.I.: The dispersion of matter in turbulent flow through a pipe, Proc. Roy. Soc. A., vol. 223, 446-468, (1954).
- 3) Elder, J.W.: The dispersion of marked fluid in turbulent shear flow, J. Fluid Mech., vol. 5, 544-560, (1959).
- 4) Sutton, O.G.: Micrometeorology, McGraw-Hill, (1953).
- 5) 井上 栄一: 地表風の構造, 農業技術研究所報告, A (物理・統計), 第2号, (1952)
- 6) Pasquill, F.: Atmospheric Diffusion, D. van Nostrand Comp. (1962).
- 7) Monin, A.S.: Smoke propagation in the surface layer of the atmosphere, in "Advance in Geophysics" vol. 6, 331-344, Academic Press, (1959).
- 8) Kao, S.-K.: The effects of thermal stratification on turbulent diffusion from a continuous fixed source, Tellus, vol. 12, 359-363, (1960).
- 9) Yokoyama, O.: On the thickness of smoke plume in diabatic surface layer, J. Met. Soc., Japan, Ser. II, vol. 40, 83-92, (1962).
- 10) Batchelor, G.K.: Advance in Geophysics, vol. 6, Academic Press, (1959).
- 11) Ellison, T.H.: Meteorology, Sci. Progress, vol. 47, 495-506, (1959)
- 12) Cermak, J.E.: Lagrangian similarity hypothesis applied to diffusion in turbulent shear flow, J. Fluid Mech., vol. 15, 49-64, (1963).
- 13) Malhotra, R.C. and Cermak, J.E.: Wind-tunnel modeling of atmospheric diffusion, J. Geoph. Res., vol. 68, 2181-2184, (1963).
- 14) Аппаро, Л.Р.: Распространение тяжелой примеси в атмосфере при ветре, изменяющемся с высотой, ИЗВ. АКАД. НАУК СССР, Серия Геофизическая, No. 5, (1963)
- 日野 幹雄訳: 大気拡散の数値計算法 (風速分布を考慮した大気中での重い粒子の拡散), 電力中央研究所・技研業務資料 (火力: 64005) (1964)
- 15) 日野 幹雄: モンテ・カルロ法による乱流現象のシミュレーションへの試み, 土木学会 第19回年次学術講演会前刷 第II部, 4月, (1964)
- 16) Hino, M.: Digital computer simulation of random phenomena, 土木学会論文集 (投稿中)
- 17) Bugliarello, G. and Jackson, III, E.D.: Random walk study of convective diffusion, Proc. ASCE, vol. 90, No. EM4, Aug. (1964).