(C－1)　開水路湾曲部河床の安定形状

建設省　土木研究所　　須　賀　堯　三

1. 緒　言

わん曲部の流れは，遠心力と二次流の存在により極めて複雑な流況を呈する。摩擦の効果を考慮する場合には，強靱に理論的接近をはばみ，わん曲流全体を細部にわたって解明することはむずかしい。さらに，境界が可変である場合には，困難の度合は一層大きい。したがって，例えば河川のわん曲部の洗掘深さに関する従来の研究は，その多くが経験に基づくものであって，物理的根拠に乏しく，普遍性に欠ける。これは河道計画上の一つの問題点として残されている。そこで実用の参考に供するため，わん曲部河床の安定形状に関して理論的に考察をすすめ，一般的な一つの近似解を求めてみた。

河川のわん曲部の洗掘を論じる場合は，局所的な洗掘や堆積のほかに，流量の変化および洗掘の速度等を考慮する必要があるが，ここでは第一段階として極く単純な場合を想定する。すなわち，

(1)　定常状態（静的および動的平衡河床）

(2)　主として，最も安定するわん曲末端部

(3)　わん曲部を円弧に近似し，両側壁を垂直に固定した水路

(4)　わん曲角は十分大きい（例えば，$\theta_0 > 60°$）

(5)　河床材料特性は横断面で一様

などである。このようなモデルについて，常流状態で，わん曲末端部における二次流による土砂の移動を無視できる場合には，流速分布がわかれば安定形状を定めることができ，運動量の関係から洗掘の深さを求めることができる。ここでは，接線流速の鉛直分布を指数分布，平均流速を曲率半径の t 乗に比例すると仮定した。それぞれの仮定については実験によって検討した。その結果は，ほぼ理論の妥当性を裏づけることができ，わん曲部の護岸の根入れを設計する場合などの参考となりえよう。

2. 開水路わん曲部河床の洗掘特性

わん曲部の洗掘現象は複雑であるが，移動床実験（表－1）の結果等を総合すれば，だいたい次のようなことがいえる。すなわち，

(1)　わん曲流入部付近は，自由渦の仮定が成り立つ領域であって，内側が洗掘傾向，外側が堆積傾向にあるが，その程度は極くわずかである。上流の直線水路部と円滑に接続し，すぐ安定する。

(2)　わん曲流入部内側および末端部付近内側より砂堆が形成され始め，それが時間の経過にともなって，ほぼ接線方向よりわずか外側へ向う角度に伸びる。これは，それぞれ二次流の発達および末端部流況の急変によるものと考えられる。なお，実験には浮遊流砂の影響は含まれていない。

(3)　内側に堆積が始まると同時に，流れは外側へ集まる傾向となり，流速分布は強制渦へ近づく。

(4)　末端部以外（特に流入水の慣性で流れの集中が生じるところ，実験の場合，約 60° 付近）は，砂堆の通渦に伴って，ときには大きく振動し，流況が乱れることもある。砂堆に支配される現象であるから，相似則が問題とされなければならないが，実験ではこのとき最深河床が現われた。しかし，末端部の安定断面といちぢるしくかけ離れたものではない。（図－1，2参照）

(5)　わん曲の末端部は下流直線部の影響で比較的安定するところである。

(6) わん曲の末端部内側で，限界掃流力以下のとき，二次流の慣性によって運ばれてきた土砂が堆積して強制渦の仮定がくずれることがあるが，一般にその影響は内側のせまい範囲に限定される。

3. わん曲部河床の安定横断形状

わん曲の半径 r 方向および水深h′方向の流速の影響を無視できるとき，半径方向および水深方向の接線流速分布をそれぞれ指数分布と仮定すれば，

$$u_m = c\ r^t \quad \cdots\cdots (1)$$

$$\frac{u}{u_*} = a\left(\frac{h'}{k_s}\right)^b \quad \cdots\cdots (2)$$

と表わされる。ここに，u は河床より h′の点の接線流速，u_mは平均流速，$u_* = \sqrt{\tau_0/\rho}$は摩擦速度，a, b, c, t は定数である。二次流の発達した状態では，長方形断面のとき $\tau \doteqdot 1$ であることが確かめられている。自然状態の横断面の場合も t は 1 に近い定数と考えられる。c は(1)，(2)式を用いて，

$$Q = \int_{R_i}^{R_o}\left(\int_0^h u\,dh'\right)dr = c\int_{R_i}^{R_o} h\,r^t\,dr$$

$$\therefore\ c = \frac{Q}{\int_{R_i}^{R_o} h\,r^t\,dr} \quad \cdots\cdots (3)$$

と表わされる。k_sは相当粗度で，横断一様な平均粒径 d_mとの間に，m, n を定数として，一般に，

$$\frac{k_s}{d_m} = m\left\{\frac{u_*^2}{(\rho_s/\rho-1)\,g\ d_m}\right\}^n \quad \cdots\cdots (4)$$

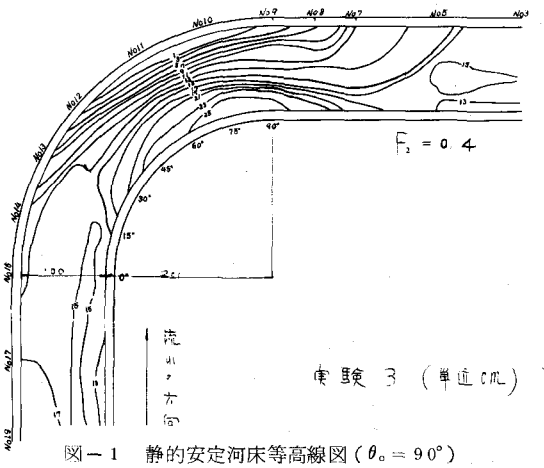
の関係が知られる。ρ_sおよび ρ はそれぞれ砂および水の密度である。わん曲部の横断水面勾配には，

$$\frac{dH}{dr} = \frac{u_m^2}{gr} \quad \cdots\cdots (5)$$

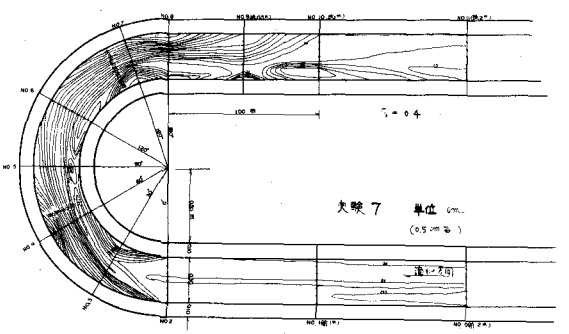
の関係が確かめられているから，その横断の r の点の水深 h (=H−Z)は，横断面の平均水位 H_m を基準に選べば，(1)式，(2)式および(5)式から定められ(6)式のようになる。ここに，$B = R_o - R_i$は水路巾，R_oおよび R_i はそれぞれわん曲の中心から外壁および内壁までの距離である。

Z は河床高で，水深 h が定められれば確定する。

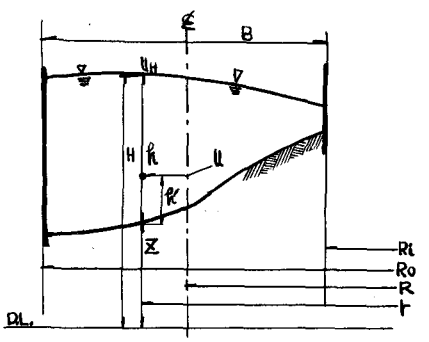
$$h = H_m + \frac{B^{2t}}{2g}\,\frac{c^2}{t}\left[\left(\frac{r}{B}\right)^{2t} - \frac{1}{2t+1}\left\{\left(\frac{R}{B}+\frac{1}{2}\right)^{2t+1} - \left(\frac{R}{B}-\frac{1}{2}\right)^{2t+1}\right\}\right] - Z \quad \cdots\cdots (6)$$



図－1　静的安定河床等高線図（$\theta_0 = 90°$）



図－2　静的安定河床等高線図（$\theta_0 = 180°$）



図－3　横断面記号説明図

3.1　静的平衡横断形状

河床上のすべての点で限界掃流力になっている状態を静的平衡とする。いま，限界掃流力 u_{*c} を，

$$u_{*c}^2 = \alpha(\rho_s/\rho - 1)\, g\, dm^{\beta} \qquad (7)$$

と表わす。ここに，α，β は定数である。u_*をすべて u_{*c} にして，u_{*c} および k_s を(4)式および(7)式によって与え，(1)式を用いれば，(2)式の関係から水深 h は半径 r の関数として与えられ，

$$h = k_s\ c_s^{\frac{1}{b}}\ r^{\frac{t}{b}} \qquad (8)$$

ここに，

$$K_s = m\, a^{-\frac{1}{b}}\ \alpha^{n-\frac{1}{2b}} \{(\frac{\rho_s}{\rho} - 1)\, g\}^{-\frac{1}{2b}}\ dm^{\beta n+1-n-\frac{\beta}{2b}}\ (b+1)^{\frac{1}{b}} \qquad (9)$$

$$C_s = \left[\frac{Q}{K_s}\ \frac{\frac{t}{b} + t + 1}{\{R_i + \frac{B}{2}\}^{\frac{t}{b}+t+1} - (R - \frac{B}{2})^{\frac{t}{b}+t+1}} \right]^{\frac{b}{b+1}} \qquad (10)$$

である。K_sは r に無関係な定数である。C_sは静的平衡断面の定数 C のことで，(8)式を用いて(3)式から得られる。静的平衡断面形状を表わす Z と r の関係は(6)式に(8)式を代入して与えられる。しかし一般には，わん曲部の水面の横断変化は河床高の変化に対して無視できるから，(6)式の右辺第 2 項は省略されて，実用には次式を供することができる。すなわち，

$$Z = H_m - K_s\ C_s^{\frac{1}{b}}\ r^{\frac{t}{b}} \qquad (11)$$

3.2　動的平衡横断形状

横断面のウォシ・ロードを除く全流砂量をQ_Tとしたとき，Q_Tが縦断的に変化しない状態を動的平衡と呼んでいるが，横断流砂量分布も時間的に変化しないものとする。わん曲部の流砂量分布は，流砂の連続の条件とは無関係に，わん曲部の流況により定められる。影響を与える要素は多数考えられるが，ここでは，近似的に河床におけるせん断力の接線成分 τ_0が横断方向に指数的に分布するものとして，

$$u_* = u_{*i} (\frac{r}{R_i - \frac{B}{2}})^{\gamma} \qquad (12)$$

とおけるものとした。u_{*i} は内壁 $r = R_i = R_i - B/2$における u_*の値，γ は定数である。流砂量関数としては，掃流砂量および浮遊砂量を含めたものとして，Broun型公式を適用すれば，

$$Q_T = \int_{R_i}^{R_o} q_T\ dr = \int_{R_i}^{R_o} \frac{x}{(\rho_s/\rho - 1)^2\ g^2\ dm}\ u_*^y\ dr \qquad (13)$$

である。ここに，x および y は定数で，Broun公式では x=10，y=5 である。Q_Tはわん曲上下流の水理量によって与えられる。下流の単位巾あたりの流砂量を q_{T2} とすれば，$Q_T = Bq_{T2}$ である。q_{T2} は，下流側の摩擦速度 u_{*2} $(=\sqrt{gh_2 I_2})$ によって定められる。動的平衡断面における水深 h は，(12)式および(13)式から u_{*i} を消去して u_*の分布を定め，(4)式および(1)式を用いれば，(2)式から，

$$h = K_k\ C_k^{\frac{1}{b}}\ r^{2n\gamma+(t-\gamma)/b} \qquad (14)$$

ここに，

$$K_k = u_{*i}^{2n-\frac{1}{b}} \cdot (R_i - \frac{B}{2})^{-(2n-\frac{1}{b})\gamma} \cdot m\, a^{-\frac{1}{b}} \{(\frac{\rho_s}{\rho} - 1)\, g\}^{-n}\ dm^{1-n}\ (b+1)^{\frac{1}{b}} \qquad (15)$$

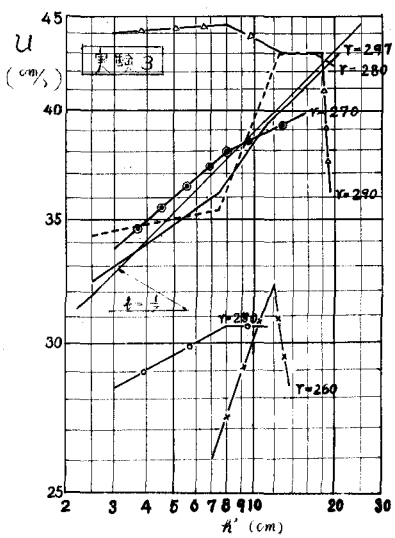
$$u_{*i} = \sqrt{gh_2 I_2} \left[\frac{(Y\gamma + 1)}{\{(\frac{R_i}{B} + \frac{1}{2})\ (1 + \frac{1}{\frac{R_i}{B} - \frac{1}{2}})^{Y\gamma}\ (\frac{R_i}{B} - \frac{1}{2})} \right]^{\frac{1}{Y}} \qquad (16)$$

5. 実験による検討と結言

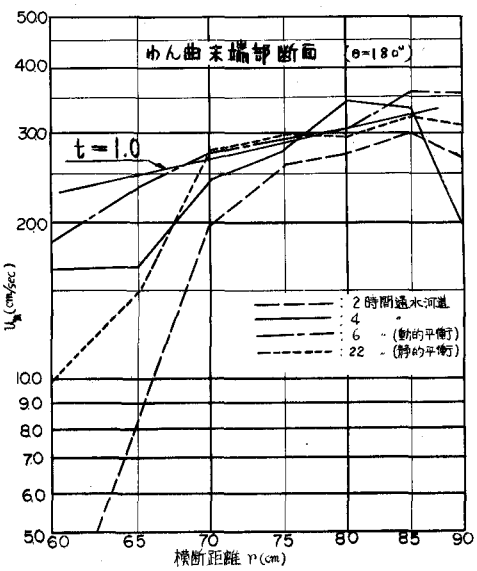
実験に関する諸量は表－1のとおりである。測定内容は，水位，流速分布，二次流速分布，河床せん断力分布，河床高などとした。河床せん断力 τ_0 分布の測定はPreston型のSurface Pitot Tubeによった。また，静的平衡以外の河床状態における水理量の測定は固結剤アロン41および42を使用し，河床を固めてから行った。この方法は河床の上部3～5cmをそのままの状態で固結するもので，表面の状態に変化を与えず，粗度も変らないので，よい成績をおさめた。なお，表－1で θ_0 は水路のわん曲角，通水時間は実験開始前の時間のことである。h_s，F_s は水路下流端（後5m）の値である。

表－1　実験諸元

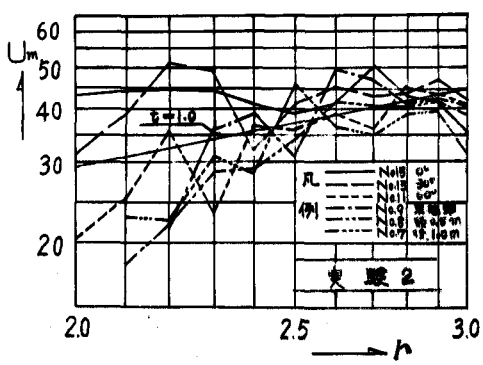
実験番号	水路			下流水理量			河床砂（均一）			通水時間	河床状態	備考
								安息角				
	θ_0	B_m	R/B	$Q_{\ell/s}$	h_s cm	F_s	dm mm	乾	水中			
1	90°	1	2.5	70	11.2	0.6	2.33	35°	23°	44	準静的平衡	
2	90°	1	2.5	80	14.0	0.49	2.33	35°	23°	18	準静的平衡	
3	90°	1	2.5	282	8.0	0.4	0.46	32°	25°	18	準静的平衡	
4	180°	0.3	2.5	10	9.0	0.4	0.98	40°	34°	2		アロンにて固定
5	180°	0.3	2.5	10	9.0	0.4	0.98	40°	34°	4		アロンにて固定
6	180°	0.3	2.5	10	9.0	0.4	0.98	40°	34°	6	準動的平衡	アロンにて固定
7	180°	0.3	2.5	10	9.0	0.4	0.98	40°	34°	22	準静的平衡	



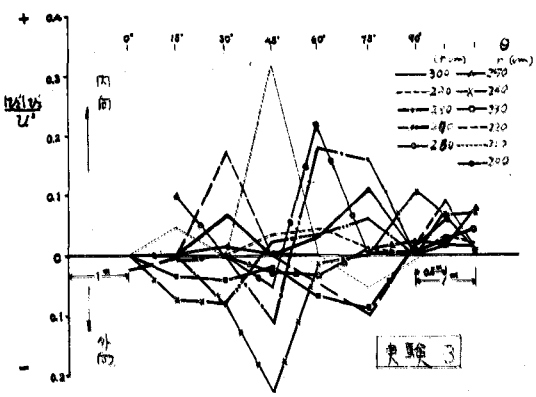
図－4　流速の垂直分布（θ_0=90°）



図－5　平均流速分布（θ_0=180°）



図－6　平均流速分布（θ_0 = 90°）



図－7　底層二次流のエネルギー

$$C_k = \frac{Q}{K_k} \left. \frac{2n\gamma + (t-\gamma)/b + t + 1}{\{(R+\frac{B}{2})^{2n\gamma+(t-\gamma)/b+t+1} - (R-\frac{B}{2})^{2n\gamma+(t-\gamma)/b+t+1}\}} \right]^{\frac{b}{b+1}} \quad \cdots\cdots (17)$$

のようになる。K_sは r に無関係な定数である。C_kは動的平衡断面の定数Cのことで，(14)式を用いて(3)式から得られる。動的平衡断面形状を表わすZは，(14)式を(6)式に代入すれば，r の関数として与えられる。しかし，(6)式の右辺第2項は省略されて次の実用式が得られる。すなわち，

$$Z = H_m - K_k \; C_k^{\frac{1}{b}} \; r^{2n\gamma+(t-\gamma)/b} \quad \cdots\cdots (18)$$

4. わん曲末端部の安定河床の高さ

わん曲末端部は下流直線部の影響で河床は比較的安定しやすい。このとき(1)式および(2)式のような流速分布が適用できるならば，運動量式から下流河床との相対的な関係が求められる。わん曲の末端部を断面1，およびそれより下流で河床高と水理量の横断方向の変化が無視できるような位置に断面2を定める。断面1, 2の水理量を表わす記号にはそれぞれ添字1, 2を付す。断面1, 2間の距離ΔXが十分短かくて，その間の摩擦力と水の重力の流れ方向の成分の合計が他の量に比して無視しうるならば，連続の条件$Q = h_2 B u_2 = g^{1/2} F_2 B h_2^{3/2}$を用いて，運動量の関係は，

$$\int_{Ri}^{Ro} h_1 u_m^2 \, dr + \frac{g}{2} \int_{Ri}^{Ro} h_1^2 \, dr = g F_2^2 B h_2^2 + \frac{g}{2} B h_2^2 + \frac{g}{2} \int_{Ri}^{Ro} (z_2 - z_1)(h_1 + h_2) \, dr$$

$$\therefore \frac{2}{g} C^2 \int_{Ri}^{Ro} h_1 r^{2t} \, dr + \int_{Ri}^{Ro} h_1^2 \, dr - B h_2^2 (2F_2^2 + 1)$$

$$- B h_2 z_2 - z_2 \int_{Ri}^{Ro} h_1 \, dr + \int_{Ri}^{Ro} h_1 z_1 \, dr + h_2 \int_{Ri}^{Ro} z_1 \, dr = 0 \quad \cdots\cdots (19)$$

と表わされる。ここに，F_2は断面2のフルード数である。z_1として，(11)式または(18)式の近似式を用いることにすれば，(19)式で$z_1 = H_m - h_1$を代入することにより，

$$H_{m1} = \frac{B h_2^2 (2F_2^2 + 1) + h_2 A - 2C^2 P/g}{A + B h_2} + z_2 \quad \cdots\cdots (20)$$

のように，わん曲末端部断面平均水位H_{m1}としてまとめられる。ここに，$A = \int_{Ri}^{Ro} h_1 \, dr$, $P = \int_{Ri}^{Ro} h_1 r^{2t} \, dr$ である。静的平衡および動的平衡によって，AおよびPはそれぞれ，

$$A_s = \frac{b K_s C_s^{\frac{1}{b}}}{b+t} \{ (R+\frac{B}{2})^{\frac{b+t}{b}} - (R-\frac{B}{2})^{\frac{b+t}{b}} \} \quad \cdots\cdots (21)$$

$$P_s C^2 = \frac{b \; K_s C_s^{\frac{1}{b}+2}}{2tb+b+1} \{ (R+\frac{B}{2})^{1+2t+\frac{1}{b}} - (R-\frac{B}{2})^{1+2t+\frac{1}{b}} \} \quad \cdots\cdots (22)$$

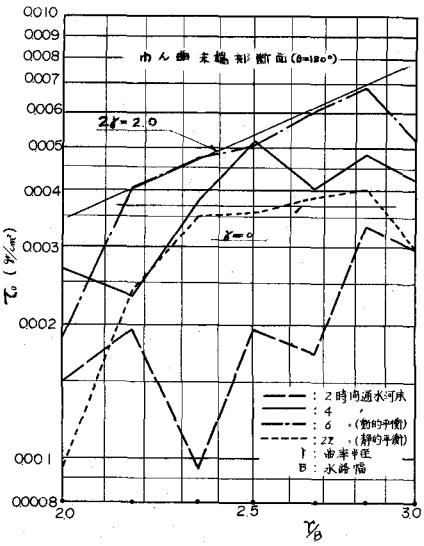
$$A_k = \frac{K_k \; C_k^{\frac{1}{b}}}{2n\gamma+1+(t-\gamma)/b} \{ (R+\frac{B}{2})^{2n\gamma+1+\frac{(t-\gamma)}{b}} - (R-\frac{B}{2})^{2n\gamma+1+\frac{(t-\gamma)}{b}} \} \quad \cdots\cdots (23)$$

$$P_k C^2 = \frac{K_k \; C_k^{\frac{1}{b}+2}}{2n\gamma+2t+1+(t-\gamma)/b} \{ (R+\frac{B}{2})^{2n\gamma+2t+1+\frac{(t-\gamma)}{b}} - (R-\frac{B}{2})^{2n\gamma+2t+1+\frac{(t-\gamma)}{b}} \} \quad \cdots\cdots (24)$$

である。これより，下流条件（z_2, h_2, F_2, I_2）が与えられれば，下流との相対関係において，わん曲末端部の安定断面（静的および動的平衡）が求められる。

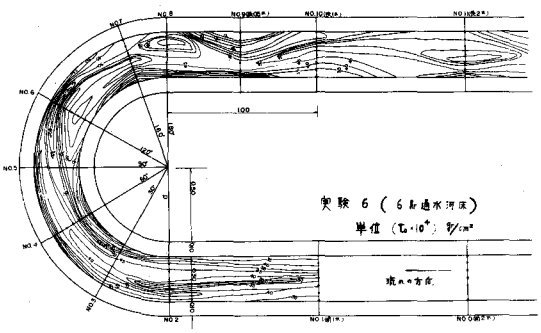
表－2　実験値および仮定の判定

定数記号	実験値（実験番号）						仮定の判定	備　　考
	1	2	3	6	7	平均		
a			12			(8)	r>Rでほぼ妥当	図－4の値から計算
b	?	1/7	1/7			1/7		$\frac{\partial b}{\partial r} \fallingdotseq 0$ (r>R)
t	0.9	1.0	1.0	1.1	1.0	1.0	妥　当	ほぼ強制渦分布
γ	－	－	－	1.0	－	?	妥　当	動的平衡は1ケースのみ
$\Delta x/B$	1.8	2.2	1.8	1.8	2.0	1.9	未計算	水位の回復はほぼ0.5

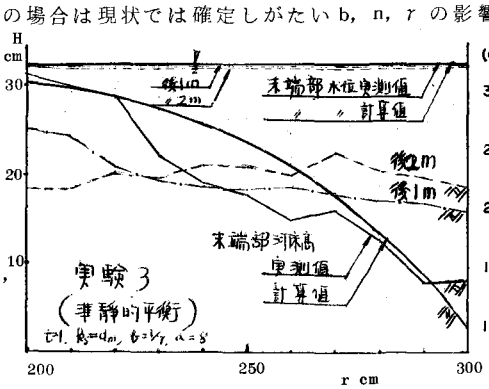


図－8　河床せん断力分布図(1)

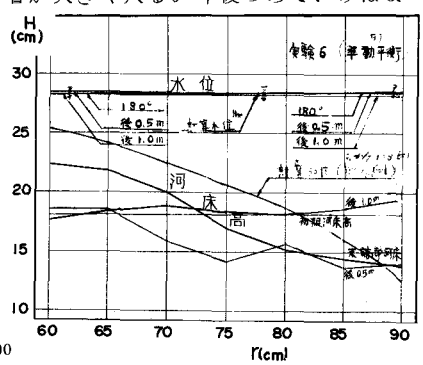
実験の結果を表－2に示す。表層流の流速分布は安定河床の場合にも強制渦の分布に近い。水深方向の流速分布は測定誤差も大きいが，静的平衡になりきっていないこともあってばらついている。しかし，水路の内側に近いところを除けば，ほぼb＝constとみなしてもよい。は実験数が不足であるが，測定の傾向はよい。わん曲末端部河床の安定性はよく，河巾の2倍位下流ではほぼ一様になる。二次流は末端部では小さくなるが，その影響は特に動的平衡の場合では大きさのみには依らない。しかし，極く内側の付近を除けば，全体としての影響はあまりないようであった。安息角による河床の変形はなかった。図－10，11は安定横断の計算値を実測値と比較したものである。この場合，限界掃流力に岩垣式，粗度として静的平衡では $k_s=dm$，動的平衡では $m=10^3$，$n=2$，また，$Y=5$ とした。aの静的平衡の場合の計算値は多少疑問なので，平均的値を用いた。理論値の両側壁付近は除いて考える必要がある。静的平衡はよいが，動的平衡の場合は現状では確定しがたいb，n，γ の影響が大きく入る。今後つめていけばよい結果が得られるようになろう。その他，二次流，土砂に働らく半径方向の力，τ_0分布，θ_0，R/B，渦の影響，土砂の篩分現象，運動量の各項等を追求する予定である。



図－9　河床せん断力分布図(2)



図－10　末端部静的平衡横断面例



図－11　末端部動的平衡横断面例