

(B-2) 大きなレイノルズ数域での円柱の水力弾性振動

電力中央研究所

日 野 幹 雄

1. 序 論

流れの中におかれた物体は種々な流体力学的力の作用で振動をする。その主なものは次のようである。④ Karman vortex による振動；流れのレイノルズ数がある値を越えると物体の後方に左右交互に規則的な渦列 (Karman vortex) が発生し、物体は交番揚力および抵抗力をうける。このような周期力は Strouhal 数 $S=fD/U$ によって特徴づけられ、円柱の場合にはほぼ $S=0.2$ である。流速が大きくなってもはや肉眼では規則的な渦列を見分けることができなくなってもこのような周期力が $S=0.2$ を中心とするスペクトルをもって発生している。これについては Fung¹⁾ や Gerrad²⁾ その他の研究がある。また、井上や今井・種田らは乱流レイノルズ数にもとづく2次的な vortex の発生について研究を行っている。一般に、交番抵抗力よりは交番揚力の方が大きく、したがって物体は Karman vortex によって流れと直角方向の振動をする。⑤ fluttering；流れの中の物体に働く力が流れに対する物体の角度で変り、負減衰の流体力が生じこれが構造減衰を上まわるとき振動が増巾される。この種の振動は航空機における空力弾性振動の中心をなすものである。⑥ buffeting および攪乱流による振動；ある物体が他の物体の後流領域に入り、後流中の不規則な渦のために不規則振動を起す (buffeting) とか、また流れ自身のもつ乱れと共鳴して振動を生ずる場合がある。この種の振動はすでに航空力学の分野では Liepmann³⁾ によって論じられたが、最近 Davenport⁴⁾ は土木工学の分野における突風による構造物の振動の問題にこの考え方を導入した。こうした振動の他に、送電線の galloping とか (煙突の) oval 振動などが良く知られている。

これから本論文で論じようとするのは上記のいずれとも異った振動である。流れの乱れ成分が関連する点、上の⑥に近いが振動の原因は全く別である。それは、ごく最近 東京大学宇宙航空研究所の谷ら⁵⁾ によって行われた円柱の抗力に関する実験結果に基づいて、円柱に起ると予想される振動についての議論である。戦後、煙突が熔接構造にvari滑らかになってから振動障害が目立つようになったといわれる。そのため筒身に spiral をまくとか、vortex breaker と呼ばれる板片をつけることが行われている。筆者は、こうした振動と何らかの関連を予測して、理論および数値計算を行った。

2. 大きなレイノルズ数域での円柱の抵抗力係数

円柱の抵抗力係数はほぼレイノルズ数が 10^5 位のところで急激に減少することは良く知られている。しかし、それよりレイノルズ数の大きな所の実験データはなく長い間不明であった。わずかに Dryden⁶⁾ による煙突を利用したデータがあり、これはまた抵抗力係数の大きな値を示しており、ある意味では信憑性に疑いすらもたれていた。しかし、Roshko⁷⁾ の実験によりこの間のデータが埋まり、かつ Dryden のものと接続することが明らかにされた。(Dryden のデータはいわば名誉を回復したことになる。)

谷⁵⁾⁷⁾ はこのような抵抗係数の急激な減少とその後の回復は、境界層の剝離・再付着 (air bubble

の形成)などによると考え、Roshko⁷⁾はこれらの領域を順次 subcritical (亜臨界)・supercritical (超臨界)・transcritical (極超臨界)な領域と名付けた。その他、Fung¹⁾や Gerrad²⁾により実験的研究がなされたが、谷・山本・今木は直接円柱まわりの圧力分布を測定し精密な測定を行った。その結果、抵抗係数は滑らかな円柱では $Re \approx 3.8 \times 10^5$ で切り立つように急激に減少し再び Re の増加とともにある値に回復すること、円柱が粗な場合にはこの減少がゆるやかになることが明らかとなった。これは、従来の円柱の撓みから間接的に求められた曲線が滑らかな円柱についてもゆるやかな変化しか示さなかった点と著しく異っている。なお、supercritical では S は 0.2 より急に大きくなることが認められている。

3. 大きなレイノルズ数域における滑らかな円柱の不規則非線型振動

滑らかな円柱の supercritical 領域における抵抗係数の変化を模式化して示せば図-1 のようになる。もし、平均流速のレイノルズ数が $Re = 3.8 \times 10^5$ に近く、かつ流れが変動成分をもっていれば円柱に働く力は抵抗係数の急変に応じて大きく変化する。この力は 1 の③にのべた乱れそのものによる抗力の変化よりは遙かに大きく、もしこの力の周期が円柱の固有振動の周期と一致すれば著しく大きな振動現象が生ずると思われる。

以下の理論の展開には、次の諸点を仮定しよう。

④ 流速変動の 2 次元性：渦のスケールが円柱の長さに較べて十分大きいか、または流れが周期変動を伴う場合であればその変化は円柱の軸方向に一様である。④ 流速変化の主要な成分の周期が、air bubble の形成の回復に十分な大きさであること。つまり、図-1 のような抵抗係数曲線が quasi-steady に成り立つものとする。

円柱の振動方程式は

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = f(u) \quad (1)$$

で表される。 x は変位、 t は時間、 m は系の質量、 C は減衰係数、 k はバネ定数、 $F(u)$ は円柱の単位面積に働く力で

$$F(u) = \frac{1}{2} \rho C_D u |u| + C_m \rho \frac{A_D}{D} \frac{du}{dt} \quad (2)$$

である。式(2)において、 ρ は水の質量、 C_D は抗力係数、 C_m は付加質量係数、 D は円柱の径、 $A_D = \pi D^2 / 4$ 、 u は流体の流速を表す。

流体力が不規則変化をする場合には、 $f(u)$ と x とを Fourier-Stieltjes 積分によって

$$f(t) = \int e^{i\omega t} dz(\omega), \quad x(t) = \int e^{i\omega t} dw(\omega) \quad (3)$$

と書けば、⁸⁾ 式(1)は

$$\left[-\omega^2 + \left(\frac{k}{m} \right) + i \frac{c}{m} \omega \right] dw(\omega) = dz(\omega) \quad (4)$$

となる。

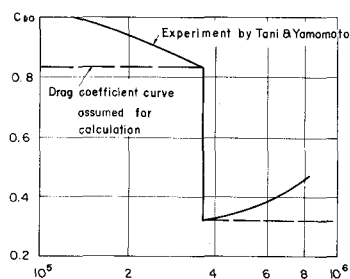


図-1 supercritical な領域での抗力係数 (模式図)

また、 f と x のスペクトルは

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{dz^*(\omega) dz(\omega)}{d\omega} = \phi(\omega), \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{dW^*(\omega) dW(\omega)}{d\omega} = \psi(\omega) \quad (5)$$

と表しうるから、式(4)・(5)から次のような流体カスペクトルと円柱の変位スペクトルの関係がえられる。

$$\psi(\omega) = \left[\left\{ \left(\frac{k}{m} \right) - \omega^2 \right\}^2 + \omega^2 \left(\frac{c}{m} \right)^2 \right]^{-1} \phi(\omega) \quad (6)$$

さて、次に流体力 $F[u(t)]$ のスペクトルに移ろう。これは、 $u(t)$ に関して非線型であるが、Rice⁹⁾ の雑音理論の非線型出力回路に関する Characteristic function の方法を応用することができる。

まず、流体力は virtual mass の項を省略すれば、

$$\begin{aligned} f[u(t)] &= \frac{1}{2} \rho C_{D0} u^2 \\ &= \frac{1}{2} \rho (C_{D0} - \lambda h(u, b)) (U_0^2 + 2U_0 u + u^2) \\ &\doteq \frac{1}{2} \rho C_{D0} U_0^2 \left[1 + 2 \frac{\sigma_u^{\frac{1}{2}}}{U_0} \cdot \frac{u}{\sigma_u^{\frac{1}{2}}} - \frac{\lambda}{C_{D0}} h(u, b) - 2 \frac{\lambda}{C_{D0}} \cdot \frac{\sigma_u^{\frac{1}{2}}}{U_0} \cdot \frac{u}{\sigma_u^{\frac{1}{2}}} h(u, b) \right] \end{aligned} \quad (7)$$

となる。こゝに、 $\sigma_u^{\frac{1}{2}} = \sqrt{u^2}$ 、 $b = U_{cr} - U_0$ 、 $U_{cr} (Re = 3.8 \times 10^5)$ に対応する流速、 U_0 = 平均流速、 $\lambda = U_{cr}$ における抵抗係数の急激な減少分、 $h(u, b) = u \geq b$ ($b \geq 0$) または $u \leq b$ ($b \leq 0$) のとき 1 である unit step function を表す。

式(7)で示される u と $f(u)$ との関係は次のように表すことができる。

$$f(u) = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{C_+} F_+(i\omega) e^{i\omega u} d\omega + \int_{C_-} F_-(i\omega) e^{i\omega u} d\omega \right) \quad (8)$$

こゝに、積分路 C_+ ・ C_- は w の実軸上を $(-\infty, \infty)$ および $(\infty, -\infty)$ に進み原点を反時計まわりに半周するようにとる。また、 $F_+(i\omega)$ と $F_-(i\omega)$ は

$$F_+(i\omega) = \int_0^\infty f(u) \exp(-i\omega u) du, \quad F_-(i\omega) = \int_{-\infty}^0 f(u) \exp(-i\omega u) du \quad (9)$$

である。 $f(u)$ に関する式(8)の表示式を用いて、 $f(u)$ の相関係数 $C_f(\tau)$ を表わせば

$$\begin{aligned} C_f(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t) f(t+\tau) dt \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \left\{ \left(\int_{C_+} F_+(i\omega_1) d\omega_1 + \int_{C_-} F_-(i\omega_1) d\omega_1 \right) \left(\int_{C_+} F_+(i\omega_2) d\omega_2 + \int_{C_-} F_-(i\omega_2) d\omega_2 \right) \times \right. \\ &\quad \left. \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \exp\{i\omega_1 u(t) + i\omega_2 u(t+\tau)\} dt \right\} \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \left\{ \left(\int_{C_+} F_+(i\omega_1) \exp\left(-\frac{\sigma_u^2}{2} \omega_1^2\right) d\omega_1 + \int_{C_-} F_-(i\omega_1) \exp\left(-\frac{\sigma_u^2}{2} \omega_1^2\right) d\omega_1 \right) \left(\int_{C_+} F_+(i\omega_2) \exp\left(-\frac{\sigma_u^2}{2} \omega_2^2\right) d\omega_2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \int_{C_-} F_-(i\omega_2) \exp\left(-\frac{\sigma_u^2}{2} \omega_2^2\right) d\omega_2 \right) \times \exp(-c(\tau) \omega_1 \omega_2) \right\} \quad (10) \end{aligned}$$

となる。こゝに、 $c(\tau)$ は $u(t)$ の相関係数 $u(t)u(t+\tau)$ を表す。 $f(u)$ の非線型性のため $C_f(\infty) = m^2$ は零でないので、 $C_f(\tau)$ のかわりに $\phi(\tau)$ を次のように定義する。

$$\phi(\tau) = C_f(\tau) - m^2 \quad (11)$$

m は式(10)式において $c(\tau) = 0$ とおいた積分である。式(10)の右辺の最終項 $\exp(-c(\tau) \omega_1 \omega_2)$ を $\omega_1 \omega_2$ の級数に展開すれば、式(10)・(11)は次のようになる。

$$\phi(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2}{n} R^n(\tau) \quad (12)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{c_+} F_+(iw')(iw')^n \exp(-\frac{1}{2}w'^2)dw' + \frac{1}{2\pi} \int_{c_-} F_-(iw')(iw')^n \exp(-\frac{1}{2}w'^2)dw' \\ R(\tau) &= c(\tau)/\sigma_u, \quad w' = \sigma_u^{\frac{1}{2}} w, \quad m = \alpha_0 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

直流部分 m を除いた $\phi(\tau)$ の Fourier 変換からスペクトル $\Phi(\omega)$ を導けば

$$\Phi(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha_n)^2}{n} S_u^{(n)}(\omega), \quad S_u^{(n)}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \{R(\tau)\}^n e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (14)$$

となる。一般に、相関関数 $R(\tau)$ は $\exp$ で表しうる。流れの最大渦径を L とすれば、 $R(\tau)$, $S_u^{(n)}(\omega)$ は

$$R(\tau) = \exp(-\frac{U_0}{L}\tau), \quad S_u^{(n)}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{4L/nU_0}{\{1+(L\omega/nU_0)^2\}} \quad (15)$$

となる。

式(9)に式(7)を代入して、 $F_+(iw) \cdot F_-(iw)$ を求め、式(13)の積分を行えば、 α_n は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \alpha_n &= \frac{1}{2} \rho C_{D0} U_0^2 \{ A_+ I_+(n-2, 0) + B_+ I_+(n-2, b') + C_+ I_+(n-1, b') + A_- I_-(n-2, 0) \\ &\quad + B_- I_-(n-2, b') + C_- I_-(n-1, b') \} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

$$\left. \begin{aligned} I_+(n, b') &= I_-(n, b') = \phi^{(n)}(-b/\sigma_u^{\frac{1}{2}}) \\ I_+(-1, b') &= \frac{1}{2} + \phi^{(-1)}(-b/\sigma_u^{\frac{1}{2}}), \quad I_-(-1, b) = -\frac{1}{2} + \phi^{(-1)}(-b/\sigma_u^{\frac{1}{2}}) \\ I_+(-2, b') &= -b/2\sigma_u^{\frac{1}{2}} + \phi^{(0)}(-b/\sigma_u^{\frac{1}{2}}) - (b/\sigma_u^{\frac{1}{2}})\phi^{(-1)}(-b/\sigma_u^{\frac{1}{2}}) \\ I_-(-2, b') &= b/2\sigma_u^{\frac{1}{2}} + \phi^{(0)}(-b/\sigma_u^{\frac{1}{2}}) - (b/\sigma_u^{\frac{1}{2}})\phi^{(-1)}(-b/\sigma_u^{\frac{1}{2}}) \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

$$\left. \begin{aligned} \phi^{(n)}(x) &= \frac{d^n}{dx^n} \left\{ \frac{\exp(-x^2/2)}{\sqrt{2\pi}} \right\}, \quad \phi^{(0)}(x) = \exp(-x^2/2)/\sqrt{2\pi}, \\ \phi^{(-1)}(x) &= \int_0^x \exp(-x^2/2)/\sqrt{2\pi} dx, \quad \phi^{(-2)}(x) = \int_0^x dx \int_0^x \exp(-x^2/2)/\sqrt{2\pi} dx \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

また、 $A \cdot B \cdot C$ は $b > 0$ ならば

$$\left. \begin{aligned} A_+ &= 2\sigma_u^{\frac{1}{2}}/U_0, \quad B_+ = 2\lambda\sigma_u^{\frac{1}{2}}/C_{D0}U_0, \quad C_+ = (\lambda/C_{D0})(1+2b/U_0) \\ A_- &= -2\sigma_u^{\frac{1}{2}}/U_0, \quad B_- = 0, \quad C_- = 0 \end{aligned} \right\} \quad (19a)$$

$b < 0$ ならば

$$\left. \begin{aligned} A_+ &= 2\sigma_u^{\frac{1}{2}}/U_0, \quad B_+ = 0, \quad C_+ = 0 \\ A_- &= -2\sigma_u^{\frac{1}{2}}/U_0, \quad B_- = -2\lambda\sigma_u^{\frac{1}{2}}/C_{D0}U_0, \quad C_- = (\lambda/C_{D0})(-1+2b/U_0) \end{aligned} \right\} \quad (19b)$$

となる。

以上に論じて来たような性質の水力弾性振動が、どの程度の貢献をなすかを計算してみた。結果は図-2に示すとうり、円柱の固有振動や乱れあるいは流れの周期性との関係で、普通に考えられている buffeting より大きな振動を起しうる事が示されている。また、円柱の抗力係数を撓みなどで間接的に測った場合の見掛けの曲線が風洞の乱れの強さによって滑らかになることが明らかとなった。この関係ははじめに仮定した乱れの2次元性とは無関係に成立する。そして、これ迄の抗力係数の実験値が、Criticalなレイノルズ数域で実験者や使用された風洞によって著しく異なる事実を理論的に明らかにしている。

最後に本論文の数値計算をおねがひした電力中央研究所 資料室 本島 睦さんに厚く感謝の意を表します。

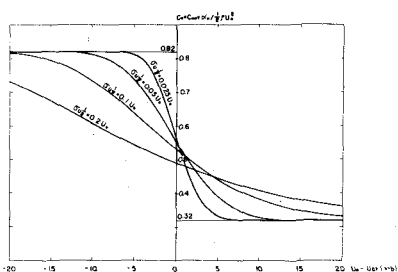


図-2a : 見掛けの抗力係数となれの強さとの関係
($U_{cr}d/\nu = 3.8 \times 10^5$, $L/U_0 = 10$)

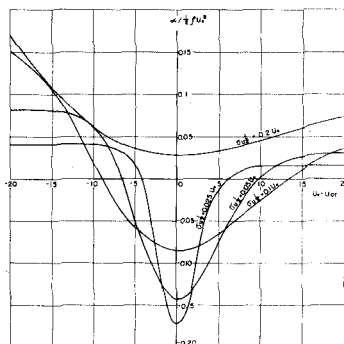


図-2b : エネルギー変換関数の第一項 (α_1)
($U_{cr}d/\nu = 3.8 \times 10^5$, $L/U_0 = 10$)

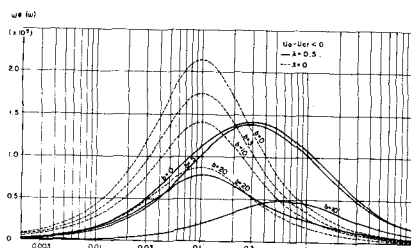


図-3a

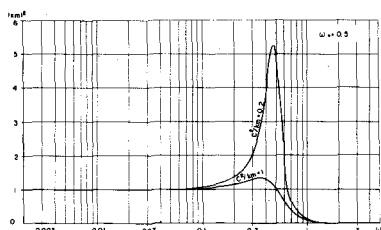


図-3b

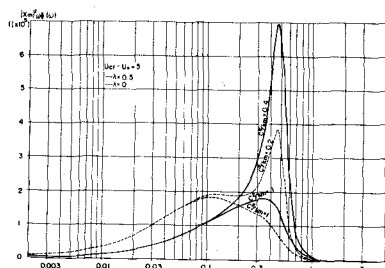


図-3c

図-3abc : $U_0 < U_{cr}$ の場合の抗力スペクトルと振動スペクトルの計算
($U_{cr}d/\nu = 3.8 \times 10^5$, $L/U_0 = 10$)

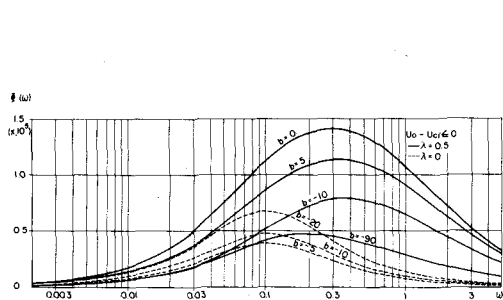


図-4a

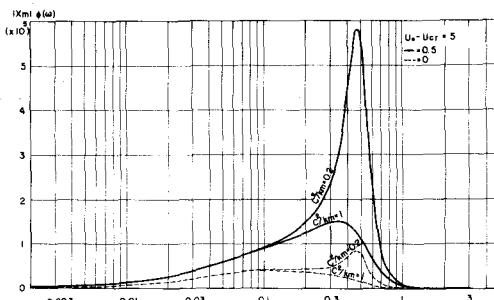


図-4b

図-4ab : $U_0 > U_{cr}$ の場合の抗力スペクトルと振動スペクトル
($U_{cr}d/\nu = 3.8 \times 10^5$, $L/U_0 = 10$)

参 考 文 献

- 1) Fung, Y.C.: Fluctuating lift and drag acting on a cylinder in a flow at supercritical Reynolds numbers, J. Aerospace Sci, vol.27, No.11, 801-814, (1960).
- 2) Gerrard, J.H.: An experimental investigation of the oscillating lift and drag of a circular cylinder shedding turbulent vortices. J. Fluid Mech., vol.11, Part 2, 244-256, (1961).
- 3) Liepman, H.W.: On the application of statistical concepts to the buffeting problem, J. Aer. Sci., vol.19, No.12, 793-822, (1952).
- 4) Devenport, A.G.: The application of statistical concepts to the wind loading of structures, Proc. Inst. Civil Engrs., vol.19, 449-472, (1961).
- 5) 谷 一 郎 : On the periodic shedding of vortices from a circular cylinder at high Reynolds numbers, Presented at the IUTAM Symposium on Concentrated Vortex Motions in Fluids, Ann. Arbor, Michigan, July (1964).
- 6) Dryden, H.L. and Hill, G.C.: Wind pressure on circular cylinders and chimneys, Bur. Stand. J. Res., Wash., vol.5, 653-93, (1930).
- 7) Roshko, A.: Experiments on the flow past a circular cylinder at very high Reynolds number, J. Fluid Mech., vol.10, No.3, 345-356, (1961).
- 8) Batchelor, G.K.: The theory of homogeneous turbulence, Cambridge Univ. Press. (1953).
- 9) Rice, S.O.: Mathematical analysis on random noise, Bell System Tech. J., vol.23, p.283, (1944); vol.24, p.46, (1945).