(A−2) 変断面水路内の洪水の伝播と変形 の内容一部訂正と追補

中央大学理工学部 林 泰造

前刷中の式(25);(30),(31);(32);(33) 以後,にはそれぞれ一部誤りがあり,それらをつぎのように訂正する.

訂 正

式(23)から次式をうる:

$$\frac{dx}{dt} = \left(1+\frac{2}{3}\frac{1}{r}\right)\cdot\frac{1}{n}\left(\frac{h}{r}\right)^{2/3} i^{1/2}\cdot\phi \qquad (S\cdot 1)$$

$$\frac{dh}{dx} = -\frac{\dfrac{L'}{L}-\dfrac{n'}{n}+\dfrac{1}{2}\dfrac{i'}{i}+\left\{\dfrac{1}{\phi(x,t)}\dfrac{\partial\phi(x,t)}{\partial x}\right\}_{t=t_1+\tau}}{1+\dfrac{2}{3}\dfrac{1}{r}}\cdot\frac{h}{r} \qquad (S\cdot 2)$$

ここに

t_1:洪水位の任意のエレメント(wavelet)が $x=0$ の断面から発する時の時間(図-S·1).

$\tau = \int_0^x (1/\omega)\,dx$

L:$A = L(x)\cdot h^r$ の L ((3)の記号Bを L に変更する)

式(S·2)において $t=t_1+\tau$ としたのは,(S·2)が t_1 の瞬間に $x=0$ の断面を発する特性曲線にそって成立つものであるからである.ϕ は,(20)に(9)および(17)を代入することによりつぎのように与えられる:

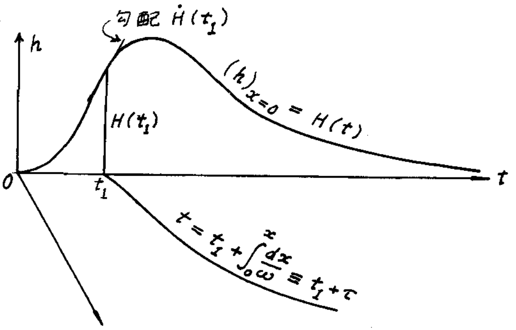

図-S·1

$$\phi(x,t) = \Bigg[1-\frac{1}{i}\Bigg[H(t-\tau)\left\{\left(\frac{L_0}{L}\right)\left(\frac{n}{n_0}\right)\left(\frac{i_0}{i}\right)^{1/2}\right\}^{\frac{m}{r}}\left\{-\frac{1}{c_I}\frac{\dot{H}(t-\tau)}{H(t-\tau)}+\frac{m}{r}\left(-\frac{L'}{L}+\frac{n'}{n}-\frac{1}{2}\frac{i'}{i}\right)\right\}$$
$$+\frac{\alpha}{g}V^2(t-\tau)\left\{\left(\frac{L_0}{L}\right)^{\frac{2}{3}\frac{1}{r}}\left(\frac{n_0}{n}\right)\left(\frac{i}{i_0}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}^{2m}\cdot\left\{-\frac{1}{c_I}\frac{\dot{V}(t-\tau)}{V(t-\tau)}+m\left(-\frac{2}{3}\frac{1}{r}\frac{L'}{L}-\frac{n'}{n}+\frac{1}{2}\frac{i'}{i}\right)\right\}$$
$$+\frac{1}{g}\dot{V}(t-\tau)\left\{\left(\frac{L_0}{L}\right)^{\frac{2}{3}\frac{1}{r}}\left(\frac{n_0}{n}\right)\left(\frac{i}{i_0}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}^{m}\Bigg]\Bigg]^{\frac{1}{2}} \qquad (S\cdot 3)$$

ここに

$$m = rK = 1\Big/1+\frac{2}{3}\frac{1}{r}$$

t_1 の瞬間に $x=0$ の断面を発する特性曲線(図-S·1)上では,いいかえると $t=t_1+\tau$ に対しては,$H(t-\tau)$,$\dot{H}(t-\tau)$,$\ddot{H}(t-\tau)$;$V(t-\tau)$,$\cdots$ は $H(t_1)$,$\dot{H}(t_1)$,$\ddot{H}(t_1)$;$V(t_1)$,$\cdots$ となる.このため,$\left\{\dfrac{1}{\phi(x,t)}\dfrac{\partial\phi(x,t)}{\partial x}\right\}_{t=t_1+\tau}$ は x のみの関数であることがわかる.そして,若干の計算の後,次式をうる:

$$\left[\frac{1}{\phi(x,t)}\frac{\partial\phi(x,t)}{\partial x}\right]_{t=t_1+\tau} = \frac{1}{\phi(x,t_1+\tau)}\frac{d\phi(x,t_1+\tau)}{dx}-\frac{1}{2\phi^2(x,t_1+\tau)}\frac{1}{i}X_1(x) \qquad (S\cdot 5)$$

ここに,

$$X_1(x) = m^2\frac{1}{V^2(t_1)}\Bigg[\left(\frac{L}{L_0}\right)^{\frac{1}{3}\frac{m}{r}}\left(\frac{n}{n_0}\right)^{m\left(\frac{1}{r}+2\right)}\left(\frac{i_0}{i}\right)^{m\left(1+\frac{1}{2}\frac{1}{r}\right)}\cdot\left[-\left\{-\frac{\dot{H}(t_1)}{H(t_1)}+c_I\frac{m}{r}\cdot\left(-\frac{L'}{L}+\frac{n'}{n}-\frac{1}{2}\frac{i'}{i}\right)\right\}\dot{H}(t_1)+\ddot{H}(t_1)-\frac{\dot{H}^2(t_1)}{H(t_1)}\right]$$
$$+\frac{\alpha}{g}V^2(t_1)\left[-\left\{-\frac{\dot{V}(t_1)}{V(t_1)}+c_I m\left(-\frac{2}{3}\frac{1}{r}\frac{L'}{L}-\frac{n'}{n}+\frac{1}{2}\frac{i'}{i}\right)\right\}\frac{2\dot{V}(t_1)}{V(t_1)}+\frac{\ddot{V}(t_1)}{V(t_1)}-\left\{\frac{\dot{V}(t_1)}{V(t_1)}\right\}^2\right]-\frac{1}{g}\frac{1}{m}V(t_1)\,\ddot{V}(t_1)\Bigg] \qquad (S\cdot 6)$$

注意すべきこととして,$\dfrac{1}{\phi}\dfrac{\partial\phi}{\partial t}_{t=t_1+\tau}$ の計算としては まず $\dfrac{1}{\phi}\dfrac{\partial\phi}{\partial t}$ の計算を行って,つぎに $t=t_1+\tau$ を代入するのであるが,$d\phi(x,t_1+\tau)/dx$ の計算では まず $t=t_1+\tau$ の代入を行

り，つぎに x について微分することを意味し，両者は異っている。

(S・5) を (S・2) に代入すると

$$\frac{dh}{dx} = - \frac{\frac{L'}{L} - \frac{n'}{n} + \frac{1}{2}\frac{i'}{i} + \frac{\phi'}{\phi} - \frac{X_1}{2\phi i}}{i + \frac{2}{3}\frac{1}{r}} \cdot \frac{h}{r} \qquad (t = t_1 + \tau \quad \text{に対して}) \tag{S・7}$$

これを積分すると

$$h(x,t) = H(t-\tau)\left[\left(\frac{L_0}{L}\right)\left(\frac{n}{n_0}\right)\left(\frac{i_0}{i}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\phi_0}{\phi}\right)\right]^{\frac{m}{r}} \cdot \exp\left[\frac{m}{2r}\int_0^x \frac{X_1}{\phi^2 i}\,dx\right] \tag{S・8}$$

同様にして (28) を積分すると次式をうる：

$$v(x,t) = V(t-\tau)\left[\left(\frac{L_0}{L}\right)^{\frac{2}{3}\frac{1}{r}}\left(\frac{n_0}{n}\right)\left(\frac{i}{i_0}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\phi}{\phi_0}\right)\right]^m \cdot \exp\left[-\frac{m}{2}\int_0^x \frac{X_1}{\phi^2 i}\,dx\right] \cdot \left[1 - \frac{m}{2V(t-\tau)}\int_0^x \left\{\left(\frac{L}{L_0}\right)^{\frac{2}{3}\frac{1}{r}}\left(\frac{n}{n_0}\right)\left(\frac{i_0}{i}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\phi_0}{\phi}\right)\right\} \cdot \frac{X_2}{\phi^2 i} \cdot \exp\left\{\frac{m}{2}\int_0^x \frac{X_1}{\phi^2 i}\,dx\right\} dx\right] \tag{S・9}$$

ここに

$$X_2(x) = -\frac{V(t-\tau)}{m}\left\{\left(\frac{L_0}{L}\right)^{\frac{2}{3}\frac{1}{r}}\left(\frac{n_0}{n}\right)\left(\frac{i}{i_0}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\phi}{\phi_0}\right)\right\}^m \cdot X_1(x) + m\frac{\dot{V}(t-\tau)}{V^2(t-\tau)}\left\{\left(\frac{L_0}{L}\right)^{\frac{2}{3}\frac{1}{r}}\left(\frac{n_0}{n}\right)\left(\frac{i}{i_0}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\phi}{\phi_0}\right)\right\}^{-m} \cdot \left[\dot{H}(t-\tau)\left\{\left(\frac{L_0}{L}\right)\left(\frac{n}{n_0}\right)\left(\frac{i_0}{i}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{m}{r}} + \frac{\alpha}{g}V(t-\tau)\,\dot{V}(t-\tau)\left\{\left(\frac{L_0}{L}\right)^{\frac{2}{3}\frac{1}{r}}\left(\frac{n_0}{n}\right)\left(\frac{i}{i_0}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}^{2m}\right] \tag{S・10}$$

したがって，流量はつぎのように与えられる：

$$q(x,t) = Q(t-\tau)\left[1 - \frac{m}{2V(t-\tau)}\int_0^x \left\{\left(\frac{L}{L_0}\right)^{\frac{2}{3}\frac{1}{r}}\left(\frac{n}{n_0}\right)\left(\frac{i_0}{i}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\phi_0}{\phi}\right)\right\}^m \cdot \frac{X_2}{\phi^2 i} \cdot \exp\left\{\frac{m}{2}\int_0^x \frac{X_1}{\phi^2 i}\,dx\right\} dx\right] \tag{S・11}$$

追　補 - I　最高水位，最大流量の低減

$x = 0$ の断面から発する最高水位を追跡すると，その特性曲線上では，

$H(t-\tau) = H_{max}$， $\dot{H}(t-\tau) = 0$， $\ddot{H}(t-\tau) = \ddot{H}_{max}$ ； $V(t-\tau) = V_{max}$， $\dot{V}(t-\tau) = 0$，
$\ddot{V}(t-\tau) = \ddot{V}_{max}$

であるから，これらを (S・8) および (S・11) に代入することにより次式をうる：

$$h_{max}(x) = H_{max}\left[\left(\frac{L_0}{L}\right)\left(\frac{n}{n_0}\right)\left(\frac{i_0}{i}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\phi_0}{\phi}\right)\right]^m \cdot \exp\left[\frac{m^3\ddot{H}_{max}}{2V^3_{max}}\int_0^x \frac{1}{\phi i}\left\{\left(\frac{L}{L_0}\right)^{\frac{m}{3r}}\left(\frac{n}{n_0}\right)^{m(\frac{1}{r}+2)}\left(\frac{i_0}{i}\right)^{m(\frac{1}{2r}+1)} - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{m} - \alpha\right)\frac{V^2_{max}}{gH_{max}}\right\} dx\right] \tag{S・12}$$

$$q_{max}(x) = Q_{max}\left[1 + \int_0^x \psi \cdot e^{m\int \psi\, dx}\,dx\right] \tag{S・13}$$

ここに

$$\psi = \frac{m^2\ddot{H}_{max}}{2\phi^2 i\,V^2_{max}}\left(\frac{L}{L_0}\right)^{\frac{m}{3r}}\left(\frac{i_0}{i}\right)^{m(\frac{1}{2r}+1)}\left(\frac{n}{n_0}\right)^{m(\frac{1}{r}+2)} - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{m} - \alpha\right)\frac{V^2_{max}}{gH_{max}} \tag{S・14}$$

および

$$\phi = \left[1 - \frac{1}{i}\left[H_{max}\left\{\left(\frac{L_0}{L}\right)\left(\frac{n}{n_0}\right)\left(\frac{i_0}{i}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{m}{r}} \cdot \frac{m}{r} \cdot \left(-\frac{L'}{L} + \frac{n'}{n} - \frac{1}{2}\frac{i'}{i}\right) + \frac{\alpha}{g}V^2_{max}\left\{\left(\frac{L_0}{L}\right)^{\frac{2}{3}\frac{1}{r}}\left(\frac{n_0}{n}\right)\left(\frac{i}{i_0}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}^{2m} \cdot m\left(-\frac{2}{3}\frac{1}{r}\frac{L'}{L} - \frac{n'}{n} + \frac{1}{2}\frac{i'}{i}\right)\right]\right]^{\frac{1}{2}} \tag{S・15}$$

さらに特殊の場合として一様断面水路（断面積は $A = L_0 \cdot h^r$， L_0 は const.）の場合には，(S・12) はつぎのようになり，従来の研究結果と一致する。

$$h_{max} = H_{max} \cdot \exp\left[\frac{m^3\ddot{H}_{max}}{2V^2_{max}i}\left\{1 - \left(\frac{2}{3}\frac{1}{m} - \alpha\right)\frac{V_{max}}{gH_{max}}\right\} x\right] \tag{S・16}$$

追　補 - Ⅱ　一般的水路形状の場合（記号 図-S・2）

$R = A/B$ を (1) に代入し，(1) と (2) とから v を消去すると，

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{n}\left(\frac{A}{B}\right)^{2/3} i^{1/2}\left[\frac{5}{3} - \frac{2}{3}\frac{A}{B^2}\frac{\partial B}{\partial y}\right]\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{n}\left(\frac{A}{B}\right)^{5/3} i^{1/2}\left[\frac{5}{3}\frac{1}{A}\left\{\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)_y - Bi\right\} - \frac{n'}{n} - \frac{2}{3}\frac{1}{B}\left\{\left(\frac{\partial B}{\partial x}\right)_y - \frac{\partial B}{\partial y} i\right\} + \frac{1}{2}\frac{i'}{i}\right] = 0 \qquad (S\cdot17)$$

したがって，その補助方程式は

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{n}\left(\frac{A}{B}\right)^{2/3} i^{1/2}\cdot\left(\frac{5}{3} - \frac{2}{3}\frac{A}{B^2}\frac{\partial B}{\partial y}\right) \qquad (S\cdot18)$$

および

$$\frac{dh}{dx} = -\frac{\frac{5}{3}\frac{1}{A}\left\{\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)_y - Bi\right\} - \frac{n'}{n} - \frac{2}{3}\frac{1}{B}\left\{\left(\frac{\partial B}{\partial x}\right)_y - \frac{\partial B}{\partial y} i\right\} + \frac{1}{2}\frac{i'}{i}}{\frac{5}{3} - \frac{2}{3}\frac{A}{B^2}\frac{\partial B}{\partial y}}\cdot\frac{A}{B} \qquad (S\cdot19)$$

ここに

$\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)_y, \left(\frac{\partial B}{\partial x}\right)_y$: y を一定にして x だけ変化させたときの $\partial A/\partial x$ および $\partial B/\partial x$ の値

(S・19) を適当な数値積分法により積分すれば洪水位が伝播とともに生じてゆく変化を求めることができる。このようにして洪水追跡を行うことができる（図-S・3）。

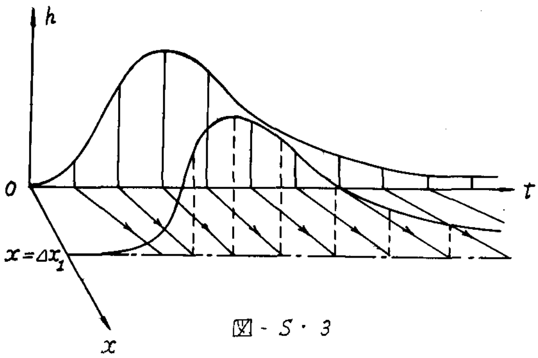

図-S・3

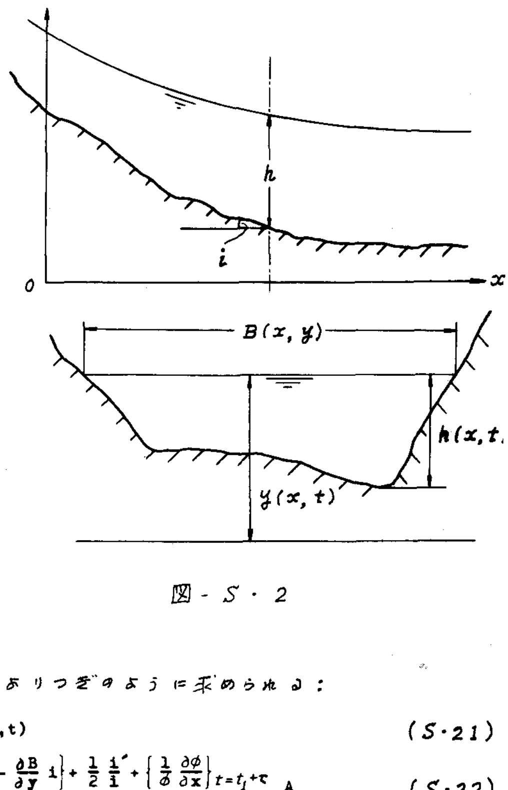

図-S・2

(S・18) は洪水の伝播速度を表わす。すなわち

$$\omega_I = \left(\frac{5}{3} - \frac{2}{3}\frac{A}{B^2}\frac{\partial B}{\partial y}\right)\cdot v_I \qquad (S\cdot20)$$

ただし，ω_I，v_I : 伝播速度，流速の各第1近似値。

上式からつぎの関係が認められる：

$\partial B/\partial y = 0$ のとき　　$\omega = (5/3)v$

$B^2/A \geqq \partial B/\partial y > 0$ のとき　$(5/3)v > \omega \geqq v$

$\partial B/\partial y > B^2/A$ のとき　　$v > \omega$

一般断面の場合の 第2近似解 も同様の計算によりつぎのように求められる：

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{n}\,\frac{A}{B}^{2/3} i^{1/2}\cdot\left(\frac{5}{3} - \frac{2}{3}\frac{A}{B^2}\frac{\partial B}{\partial y}\right)\cdot\phi(x,t) \qquad (S\cdot21)$$

$$\frac{dh}{dx} = -\frac{\frac{5}{3}\frac{1}{A}\left\{\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)_y - Bi\right\} - \frac{n'}{n} - \frac{2}{3}\frac{1}{B}\left\{\left(\frac{\partial B}{\partial x}\right)_y - \frac{\partial B}{\partial y} i\right\} + \frac{1}{2}\frac{i'}{i} + \left\{\frac{1}{\phi}\frac{\partial \phi}{\partial x}\right\}_{t=t_1+\tau}}{\frac{5}{3} - \frac{2}{3}\frac{A}{B^2}\frac{\partial B}{\partial y}}\cdot\frac{A}{B} \qquad (S\cdot22)$$

$$\phi(x,t) = \left[1 - \frac{1}{i}\left\{\frac{\partial h_I}{\partial x} + \alpha\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{v_I^2}{2g}\right) + \frac{1}{g}\frac{\partial v_I}{\partial t}\right\}\right]^{1/2} \qquad (S\cdot23)$$

実際計算上は第1近似値 h_I，v_I を (S・23) に代入して数値微分により ϕ を求め，つぎにその ϕ を (S・22) に代入して (S・22) の数値積分により h を求めてゆく。この計算は一見大変なようであるが，Stoker 等の2階偏微分方程式を数値積分するこれまでの方法に比べれば計算の手間はずっと簡単であり，また精度も優れているものと思われる。