

(A-2) 変断面水路内の洪水の伝播と変形

中央大学理工学部 林 泰 造

§ 1. 緒 言

洪水波の伝播の現象に 1 階偏微分方程式の特性帯の理論が適用されたのは比較的近年のことである。¹⁾ 洪水波はいわゆる長波とは異り、その伝播速度がこの 1 階偏微分方程式の特性帯の移動速度で与えられることが、この波の特質であると考えられ、後に Lighthill²⁾ は別個に彼等の研究の中で、そのような波を Kinetic wave と名付けている。

筆者の従来の研究は、本質的には一様水路内の洪水波についてのものであって、変断面水路の場合には、その水路を比較的一様な区間ずつに区分して、各区間ごとに一様水路の理論を適用するという考え方であった。

ほとんど同じ頃、故田中 清教授も洪水波の理論的研究をなされたが、³⁾ その一連の研究の中で、変断面の場合も取扱われ、洪水波の理論的取扱いに、水路の一様性を仮定する必要はないことを示された。この変断面内の洪水波の研究は、比較的簡単な場合だけを取扱われたものであるが、優れた研究であったと思う。

その後、木村俊晃博士も変断面理論を取扱われ、⁴⁾ 洪水の伝播と変形について詳しく調べられたが、その着目するところは主として洪水の波頂附近におかれていた。

本研究においては、筆者は変断面を直接取扱い、故田中教授が取扱われなかった水深勾配、速度水頭勾配、加速度水頭勾配、ならびに水路勾配の変化、粗度係数の変化、を組み入れた理論研究を行う。

§ 2. 基本式

不定流の基本式は

$$-i + \frac{\partial h}{\partial x} + \alpha \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v^2}{2g} \right) + \frac{1+\eta}{g} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{n^2 v^2}{R^{4/3}} = 0 \quad (1)$$

および

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial (Av)}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

いま、流水断面積 A をつぎのように表わされるものと仮定する：

$$A(x, t) = B(x) \cdot h^r(x, t) \quad (3)$$

ただし

r : 常 数

$B(x)$: 係数 (単位水深時の河巾)

また、巾広断面と考えると、

$$R \doteq h \quad (4)$$

とする。(3), (4)を(1), (2)に代入すると, (1), (2)はそれぞれつぎのようになる。

$$-i + \frac{\partial h}{\partial x} + \alpha \frac{x}{\partial x} \left(-\frac{v^2}{2g} \right) + \frac{1+\eta}{g} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{n^2 v^2}{h^{4/3}} = 0 \quad (1')$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \left(\frac{1}{r} \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial x} h + \frac{\partial h}{\partial x} \right) v + \frac{1}{r} h \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (2')$$

§ 3. h の第 1 近似

(1')において $\frac{\partial h}{\partial x}$, $\alpha \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v^2}{2g} \right)$, $\frac{1+\eta}{g} \frac{\partial v}{\partial t}$ の項を近似的に無視すると,

$$-i + \frac{n^2 v^2}{h^{4/3}} = 0$$

よって
$$v = \frac{1}{n} i^{1/2} h^{2/3} \quad (3)$$

(3)を(2')に代入すると,

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \left(1 + \frac{1}{r} \frac{2}{3} \right) \frac{1}{n} i^{1/2} h^{2/3} \cdot \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{1}{n} i^{1/2} \left(\frac{B'}{B} - \frac{n'}{n} + \frac{1}{2} \frac{i'}{i} \right) \cdot h^{5/3} = 0 \quad (4)$$

たゞし,

$$B' = \partial B / \partial x, \quad n' = \partial n / \partial x, \quad i' = \partial i / \partial x$$

この解の特性曲線の方程式は

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{\left(1 + \frac{1}{r} \frac{2}{3} \right) \frac{1}{n} i^{1/2} h^{2/3}} = \frac{-dh}{\frac{1}{r} \frac{1}{n} i^{1/2} \left(\frac{B'}{B} - \frac{n'}{n} + \frac{1}{2} \frac{i'}{i} \right) h^{5/3}} \quad (5)$$

これから

$$\omega_1 = \frac{dx}{dt} = \left(1 + \frac{1}{r} \frac{2}{3} \right) \cdot v_1 \quad (6)$$

$$\frac{dh}{dx} = \frac{\frac{1}{r}}{1 + \frac{1}{r} \frac{2}{3}} \left(\frac{B'}{B} - \frac{n'}{n} + \frac{1}{2} \frac{i'}{i} \right) h \quad (7)$$

たゞし,

ω_1 : 伝播速度の第 1 近似

v_1 : 流速の第 1 近似

原点 $x = 0$ で

$$\left. \begin{aligned} h &= H(t) \\ B &= B_0, \quad n = n_0, \quad i = i_0 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

とし, (7)をといて(8)を満足するように積分常数をきめると,

$$h_1(x, t) = H\left(t - \int \frac{dx}{\omega}\right) \cdot \left[\left(\frac{B_0}{B} \right) \left(\frac{i_0}{i} \right)^{1/2} \left(\frac{n}{n_0} \right) \right]^{\kappa} \quad (9)$$

たゞし

$h_1(x, t)$: 水深の第 1 近似

$$K = \frac{1}{r} \Big/ 1 + \frac{1}{r} \frac{2}{3} \quad (10)$$

よって、(9)と(6) とが所要の h の第1近似解となる。(9)および(6)の意味するところを図示したものが図-1である。

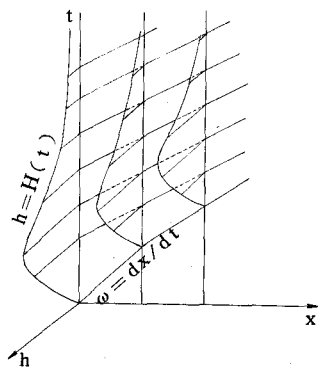


図-1

§ 4. v の第1近似

同様にして v の第1近似を求める。

(3) から

$$h = (nv/i^{1/2})^{3/2} \quad (11)$$

これを(2')に代入すると、

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \left(1 + \frac{1}{r} \frac{2}{3}\right)v \frac{\partial v}{\partial x} + \left(\frac{1}{r} \frac{2}{3} \frac{B}{B} + \frac{n'}{n} - \frac{1}{2} \frac{i'}{i}\right)v^2 = 0 \quad (12)$$

この解の特性曲線の方程式は

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{\left(1 + \frac{1}{r} \frac{2}{3}\right)v} = \frac{-dv}{\left(\frac{1}{r} \frac{2}{3} \frac{B}{B} + \frac{n'}{n} - \frac{1}{2} \frac{i'}{i}\right) \cdot v^2} \quad (13)$$

これから

$$\omega_1 = \frac{dx}{dt} = \left(1 + \frac{1}{r} \frac{2}{3}\right) \cdot v_1 \quad (14)$$

$$\frac{dv}{dt} = - \frac{\left(\frac{1}{r} \frac{2}{3} \frac{B}{B} + \frac{n'}{n} - \frac{1}{2} \frac{i'}{i}\right) \cdot v}{1 + \frac{1}{r} \frac{2}{3}} \quad (15)$$

原点 $x = 0$ で

$$v = V(t) \quad (16)$$

として、(16) を満すような(15)の解を求めると、

$$v_1(x, t) = V\left(t - \int \frac{dx}{\omega_1}\right) \cdot \left[\left(\frac{B_0}{B}\right)^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} \left(\frac{i_0}{i}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{n_0}{n}\right)\right]^{rk} \quad (17)$$

(14)と(17)とを図示したものも図-1と同様になる。

§ 5. Q の第1近似

$$Q = Av = Bh^r \cdot v$$

であるから、これに(9)および(17)を代入すると、

$$\begin{aligned} Q_1(x, t) &= Bh_0^r \left(t - \int \frac{dx}{\omega_1}\right) \cdot \left[\left(\frac{B_0}{B}\right) \left(\frac{i_0}{i}\right)^{1/2} \left(\frac{n_0}{n}\right)\right]^{rk} \cdot V\left(t - \int \frac{dx}{\omega_1}\right) \cdot \left[\left(\frac{B_0}{B}\right)^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} \left(\frac{i_0}{i}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{n_0}{n}\right)\right]^{rk} \\ &= B_0 h_0^r \left(t - \int \frac{dx}{\omega_1}\right) \cdot V\left(t - \int \frac{dx}{\omega_1}\right) \\ &= Q_0 \left(t - \int \frac{dx}{\omega_1}\right) \end{aligned} \quad (19)$$

たゞし

$Q_1(x, t)$: 流量の第1近似

$Q_0(t)$: 原点 $x = 0$ における流量

§ 6. h の第2近似

(1')から

$$v = \frac{1}{n} i^{1/2} h^{2/3} \cdot \left[1 - \frac{1}{i} \left\{ \frac{\partial h_1}{\partial x} + \alpha \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v_1^2}{2g} \right) + \frac{1+\eta}{g} \frac{\partial v_1}{\partial t} \right\} \right]^{1/2}$$

あるいは

$$\phi(x, t) \equiv \left[1 - \frac{1}{i} \left\{ \frac{\partial h_1}{\partial x} + \alpha \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v_1^2}{2g} \right) + \frac{1+\eta}{g} \frac{\partial v_1}{\partial t} \right\} \right]^{1/2} \quad (20)$$

とおけば、上式は

$$v = \frac{1}{n} i^{1/2} h^{2/3} \cdot \phi(x, t) \quad (21)$$

この $\phi(x, t)$ は、木村氏論文の K_0 に相当する。(20) の h_1 および v_1 にそれぞれ (9) および (17)

を代入することにより、 ϕ は x と t との既知関数である。

(21) を (2') に代入すると、

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{n} i^{1/2} h^{2/3} \left(1 + \frac{1}{r} \frac{2}{3} \right) \phi \cdot \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{1}{n} i^{1/2} \left(\frac{B'}{B} - \frac{n'}{n} + \frac{1}{2} \frac{i'}{i} + \frac{1}{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \phi \cdot h^{5/3} = 0 \quad (22)$$

この解の特性曲線の方程式は

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{\frac{1}{n} i^{1/2} h^{2/3} \left(1 + \frac{1}{r} \frac{2}{3} \right) \phi} = \frac{-dh}{\frac{1}{r} \frac{1}{n} i^{1/2} \left(\frac{B'}{B} - \frac{n'}{n} + \frac{1}{2} \frac{i'}{i} + \frac{1}{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \phi \cdot h^{5/3}} \quad (23)$$

これから

$$\omega_2 = \frac{dx}{dt} = \left(1 + \frac{1}{r} \frac{2}{3} \right) \cdot \phi(x, t) \cdot v_1 \quad (24)$$

$$h_2(x, t) = H \left(t - \int \frac{dx}{\omega_2} \right) \cdot \left[\left(\frac{B_0}{B} \right) \left(\frac{i_0}{i} \right)^{1/2} \left(\frac{n}{n_0} \right) \left(\frac{\phi_0}{\phi} \right) \right]^x \quad (25)$$

たゞし

ω_2 : 伝播速度の第2近似

$h_2(x, t)$: 水深の第2近似

ϕ_0 : 原点 $x = 0$ における ϕ の値

§ 7. v の第2近似

(21)から

$$h = (nv/i^{1/2}\phi)^{3/2} \quad (26)$$

これを(2')に代入すると、

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \left(1 + \frac{1}{r} \frac{2}{3}\right) v \frac{\partial v}{\partial x} + \left[\left(\frac{2}{3} \frac{1}{r} \frac{B'}{B} + \frac{n'}{n} - \frac{1}{2} \frac{i'}{i} - \frac{1}{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) v - \frac{1}{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right] \cdot v = 0 \quad (27)$$

この解の特性曲線の方程式は

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{\left(1 + \frac{1}{r} \frac{2}{3}\right) v} = \frac{-dv}{\left[\left(\frac{2}{3} \frac{1}{r} \frac{B'}{B} + \frac{n'}{n} - \frac{1}{2} \frac{i'}{i} - \frac{1}{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) v - \frac{1}{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right] \cdot v} \quad (28)$$

この解は

$$\omega_2 = \frac{dx}{dt} = \left(1 + \frac{1}{r} \frac{2}{3}\right) \cdot v_2 \quad (29)$$

$$v_2(x, t) = V\left(t - \int \frac{dx}{\omega}\right) \cdot \left[\left(\frac{B_0}{B}\right)^{\frac{2}{3} \frac{1}{r}} \left(\frac{n_0}{n}\right) \left(\frac{i_0}{i}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\phi_0}{\phi}\right) \right]^{rK} - u(x, t) \quad (30)$$

こゝに

$$u(x, t) = -rK \left[\left(\frac{B_0}{B}\right)^{\frac{2}{3} \frac{1}{r}} \left(\frac{i_0}{i}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{n_0}{n}\right) \left(\frac{\phi_0}{\phi}\right) \right]^{rK} \cdot \int \left[\left(\frac{B}{B_0}\right)^{\frac{2}{3} \frac{1}{r}} \left(\frac{i_0}{i}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{n}{n_0}\right) \left(\frac{\phi_0}{\phi}\right) \right]^{rK} \cdot \frac{1}{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial t} dx \quad (31)$$

§ 8. Q の第 2 近似

$$Q_2(x, t) = Av = Bh_2^r \cdot v_2$$

$$= Q_0\left(t - \int \frac{dx}{\omega_2}\right) - BH^r \left(t - \int \frac{dx}{\omega_2}\right) \cdot u(x, t) \cdot \left[\left(\frac{B_0}{B}\right) \left(\frac{i_0}{i}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{n}{n_0}\right) \left(\frac{\phi_0}{\phi}\right) \right]^{rK} \quad (32)$$

たゞし

$$Q_2(x, t) : \text{流量の第 2 近似}$$

§ 9. $\phi(x, t)$ の値

(20)に(9)および(17)を代入すると、

$$\begin{aligned} \phi(x, t) = & \left(1 - \frac{1}{i} \left[h_0 \left(t - \int \frac{dx}{\omega_1}\right) \cdot \left\{ \left(\frac{B_0}{B}\right) \left(\frac{i_0}{i}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{n}{n_0}\right) \right\}^K \cdot \left\{ -\frac{1}{\omega_1} \frac{H\left(t - \int \frac{dx}{\omega_1}\right)}{H\left(t - \int \frac{dx}{\omega_1}\right)} + K \left(-\frac{B'}{B} - \frac{1}{2} \frac{i'}{i} + \frac{n'}{n}\right) \right\} \right. \right. \\ & + \frac{\alpha}{g} V^2 \left(t - \int \frac{dx}{\omega_1}\right) \cdot \left\{ \left(\frac{B_0}{B}\right)^{\frac{1}{r} \frac{2}{3}} \left(\frac{i_0}{i}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{n_0}{n}\right) \right\}^{2rK} \left\{ -\frac{1}{\omega} \frac{V\left(t - \int \frac{dx}{\omega_1}\right)}{V\left(t - \int \frac{dx}{\omega_1}\right)} + rK \left(-\frac{1}{r} \frac{2B'}{3B} + \frac{1}{2} \frac{i'}{i} - \frac{n'}{n}\right) \right\} \\ & \left. + \frac{1+\eta}{g} V \left(t - \int \frac{dx}{\omega_1}\right) \left\{ \left(\frac{B_0}{B}\right)^{\frac{1}{r} \frac{2}{3}} \left(\frac{i_0}{i}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{n_0}{n}\right) \right\}^{rK} \right]^{\frac{1}{2}} \right) \quad (33) \end{aligned}$$

特に，波頂を追跡するときには，原点 $x = 0$ では波頂で，

$$\partial H / \partial t = 0 \quad \text{および} \quad \partial V / \partial t = 0$$

が同時に成立つとすると，

$$\begin{aligned} \phi(x, t) = & \left(1 - \frac{1}{i} \left[H_{\max} \cdot \left\{ \left(\frac{B_0}{B} \right) \left(\frac{i_0}{i} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{n}{n_0} \right) \right\}^K \cdot K \left(-\frac{B'}{B} - \frac{1}{2} \frac{i'}{i} + \frac{n'}{n} \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\alpha}{g} V_{\max}^2 \left\{ \left(\frac{B_0}{B} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{i}{i_0} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{n_0}{n} \right) \right\}^{2K} \cdot 2rK \left(-\frac{1}{r} \frac{2}{3} \frac{B'}{B} + \frac{1}{2} \frac{i'}{i} - \frac{n'}{n} \right) \right] \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

となる。

引 用 文 献

- 1) 林 泰 造, Mathematical theory of flood waves, Proc. First Japan Nat. Congress for App. Mech., 1951, p.431.
- 2) M.J.Lighthill-G.B.Whitham, On kinetic waves.I. Flood movement in rivers, Proc.Roy. Soc. A.Vol. 229, 1955, p.281
- 3) 田 中 清, On the quasi-steady flow in open channel, Technology Rep. of Osaka Univ., Vol.2, No.44, 1952, p.183.
- 4) 木村俊晃, 変断面水路における洪水流の頂点・鞍点の伝播速度と水深・流量変化に関する理論的考察, 土木研究所報告, 101号の5, 1958, p.1