(A－3)　特性曲線の数値計算について

名古屋大学工学部　　足　立　昭　平

開水路の不定流を特性曲線を用いて数値計算する方法は，原理的には目新らしいものではない。しかし，従来の解法はもっぱら一様断面水路にかぎられているようであり，とくに特性曲線それ自体の追跡を目的としない場合には，固定格子点による数値計算法の方がより実際的であることなどのため，特性曲線の計算法に対する検討はなお十分でないように思われる。本文は高速度電子計算機を開水路不定流の研究に活用する緒口として，水路断面形および水路床勾配の変化の影響も含めた特性曲線の数値計算について考察したものである。

1. 基礎方程式

鉛直方向の加速度を無視できるような流れを対象とし，横からの流出入もなく，水路断面積Aが水深hに対して，

$$A = ah^m \quad \cdots\cdots (1)$$

であらわせるものとする。ただし，係数aは流下方向の距離xの関数とし，指数mは常数とする。

この水路における流れの連続方程式および運動量方程式は慣用の文字を用いてそれぞれ

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{h}{m}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{uh}{m}\frac{1}{a}\frac{da}{dx} = 0 \quad \cdots\cdots (2)$$

$$(1-\alpha)\frac{mu}{h}\frac{\partial h}{\partial t} + g\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} + \alpha u\frac{\partial u}{\partial x} - g\sin\theta + \frac{\tau_0}{\rho R} + u^2\frac{\partial \alpha}{\partial x} = 0 \quad \cdots\cdots (3)$$

と書きあらわされる。運動量の補正係数αは厳密にはu，h，a，mなどの関数であるが，その性質は明らかでなく，通常の水路では1に近い値をとると考えられるから，(3)式において，$(1-\alpha)$および$\partial\alpha/\partial x$を含む項をまとめて$\beta$とおいておくと，

$$g\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} - g\sin\theta + \frac{\tau_0}{\rho R} + \beta = 0 \quad \cdots\cdots (4)$$

となる。(2)式および(4)式は双曲線型の2元1階連立偏微分方程式であって，その特性曲線は，水深hを波速

$$c = \sqrt{gh/m} \quad \cdots\cdots (5)$$

でおきかえて，次式で与えられる。

正特性曲線　：　$\dfrac{dx}{dt} = u + c \quad \cdots\cdots (6)$　　$\dfrac{du}{dt} + 2m\dfrac{dc}{dt} = g(S - S_f - S_a) \quad \cdots\cdots (7)$

負特性曲線　：　$\dfrac{dx}{dt} = u - c \quad \cdots\cdots (8)$　　$\dfrac{du}{dt} - 2m\dfrac{dc}{dt} = g(S - S_f + S_a) \quad \cdots\cdots (9)$

ここに，$S = \sin\theta$，　$S_f = \dfrac{\tau_0}{\rho gR} + \beta = \dfrac{n^2u^2}{R^{M/2}}$，　$S_a = \dfrac{uc}{g}\dfrac{1}{a}\dfrac{da}{dx} \quad \cdots\cdots (10)$

とおく。

いわゆる摩擦勾配は$\tau_0/\rho gR$であって，それをManningの粗度係数nを用いて$n^2u^2/R^{4/3}$とあらわすのが定法であるが，ここではさらにβの項も含めてS_fを定義する。しかし，βの性質はよく分っていないから，Rの指数Mは便宜的に8/3を採用し，βの影響はnの中に含まれると解釈する。また巾広い水路では潤辺長を水路巾で近似できるから，　$R = h/m = c^2g$　とおき，

$S_f = gn^2u^2/c^M \quad (M = 8/3)$　とする。

2. 基礎方程式の無次元化と差分による近似

特性曲線は(6)〜(9)式で与えられるが，数値計算にあたって諸量をあらかじめ無次元化しておけば，種々の条件のもとにおける計算結果，あるいは計算精度を比較検討するのに便利である。いま常数 x_0，t_0，u_0，c_0，および S_0 を次の関係式

$$c_0 = u_0 = gS_0t_0, \quad \text{および} \quad x_0 = c_0t_0 = gS_0t_0 \quad \cdots\cdots (11)$$

を満足するように選び，x，t，u，c に代わる無次元量 X，T，U，C を定義すれば，

$$X = x/x_0, \quad T = t/t_0, \quad U = u/u_0, \quad C = c/c_0$$

x − t 平面における特性曲線の方程式(6)〜(9)式は，X − T 平面に対して，

$$\frac{dX}{dT} = U \pm C \quad \cdots\cdots (12), \qquad \frac{dU}{dT} \pm 2m\frac{dC}{dT} = I - K_f \mp K_a \quad \cdots\cdots (13)$$

となる。ここに，　$I = S/S_0$，$K_f = S_f/S_0 = NU^2C^{-M}$，$K_a = S_a/S_0 = EUC$

さらに，　$N = gn^2c_0^{(2-M)}S_0^{-1}$，　$E = c_0^2g^{-1}a^{-1}(da/dx)$　$\cdots\cdots (14)$

である。水路床勾配 S および断面形の変化をあらわす $a^{-1}(da/dx)$ はいずれも距離 x のみの既知関数である。N については多分に不確定要素を残しているが，とりあえずは，時間的変化に対して平均値で満足することにして，これもまた x のみの関数として与えることにする。なお(12)，(13)式中の複符号は，上の符号が正特性曲線を，下の符号が負特性曲線をあらわしている。以下計算過程における複符号も同様である。

さて，(12)式および(13)式を ΔT について展開すれば，Taylor の定理から，

$$\Delta X = (U \pm C)\Delta T + \frac{1}{2!}\left(\frac{dU}{dT} \pm \frac{dC}{dT}\right)\Delta T^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{d^2U}{dT^2} \pm \frac{d^2C}{dT^2}\right)\Delta T^3 + \cdots\cdots$$

$$\Delta U \pm 2m\Delta C = (I - K_f \mp K_a)\Delta T + \frac{1}{2!}\frac{d}{dT}(I - K_f \mp K_a)\Delta T^2 + \cdots\cdots$$

ここに差分記号は前進差分をとる。上式をさらに ΔT^2 の項までの差分をとれば，

$$\Delta X = (U \pm C)\Delta T + \frac{1}{2}(\Delta U \pm \Delta C)\Delta T - \frac{1}{12}\left(\frac{d^2U}{dT^2} \pm \frac{d^2C}{dT^2}\right)\Delta T^3 + \quad \cdots\cdots (15)$$

$$\Delta U \pm 2m\Delta C = (Y_\pm)\Delta T + \frac{1}{2}\left[(Z_\pm)(U \pm C)\Delta T - \left(2\frac{\Delta U}{U} - M\frac{\Delta C}{C}\right)K_f \mp \left(\frac{\Delta U}{U} + \frac{\Delta C}{C}\right)K_a\right]\Delta T \quad \cdots\cdots (16)$$

$$+ \left[\frac{d^2}{dT^2}(Y_\pm) + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{U}\frac{d^2U}{dT^2} - \frac{M}{C}\frac{d^2C}{dT^2}\right)K_f \pm \left(\frac{1}{U}\frac{d^2U}{dT^2} + \frac{1}{C}\frac{d^2C}{dT^2}\right)K_a\right]\Delta T^3 +$$

ここに，

$$Y_\pm = I - K_f \mp K_a, \qquad Z_\pm = \dot{I} - K_f\frac{\dot{N}}{N} \mp K_a\frac{\dot{E}}{E} \quad \cdots\cdots (17)$$

3. 初期特性曲線

初期条件としては，流量一定として与えられるのが普通である。流量 Q と無次元変数 U，C との関係は，　$Q = Q_0UC^{2m}$，　ここに　$Q_0 = a(mc_0^2/g)^mc_0$　$\cdots\cdots (18)$

したがって，流量一定の条件は $dQ = 0$　，すなわち

$$dU = -2m\,(U/C)\,dC, \qquad \text{あるいは} \qquad dC = -(C/2mU)\,dU \quad \cdots\cdots (19)$$

となる。この条件を(12)，(13)式に代入すれば，初期特性曲線方程式が得られる。

$$dX/dT = U \pm C, \quad dU/dT = (Y_\pm)\,U/(U \mp C), \quad dC/dT = -(Y_\pm)\,C/2m(U \mp C) \quad \cdots\cdots (20)$$

ただし，$U/C \neq 1$ の場合は除外する。

(20)式から，適当な差分 $\varDelta T$ を選べば，

$$\varDelta X = (U \pm 1)\varDelta T + \frac{1}{4m}\frac{2mU \mp C}{U \mp C}(Y_\pm)\varDelta T^2 + \frac{1}{12m}\left\{\frac{2mU \mp C}{U \mp C}\frac{d}{dT}(Y_\pm) \mp \frac{4m^2-1}{4m}\frac{UC^2}{(U \mp C)^3}(Y_\pm)^2\right\}\varDelta T^3 + \cdots \quad (21)$$

$$\varDelta U = \frac{U}{U \mp C}\Big[(Y_\pm)\varDelta T + \frac{1}{2}\Big\{(Z_\pm)(U \pm C) - \frac{C}{2m(U \mp C)}(\overline{4m+M}\,K_f \pm \overline{2m-1}\,K_a)(Y_\pm)$$
$$- \frac{2m+1}{2m}\frac{C^2}{(U \mp C)^2}(Y_\pm)^2\Big\}\varDelta T^2 + \quad \cdots\cdots \quad (22)$$

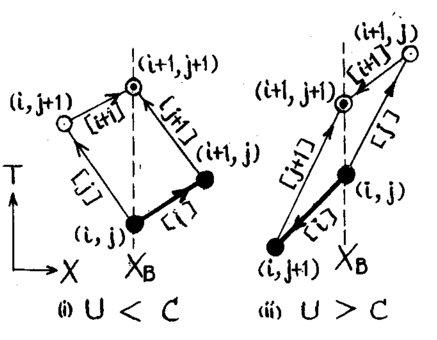
$$\varDelta C = \frac{-C}{2m(U \mp C)}\Big[(Y_\pm)\varDelta T + \frac{1}{2}\Big\{(Z_\pm)(U \pm C) - \frac{C}{2m(U \mp C)}(\overline{4m+M}\,K_f \pm \overline{2m-1}\,K_a)(Y_\pm)$$
$$- \frac{2m+1}{2m}\frac{UC}{(U \mp C)^2}(Y_\pm)^2\Big\}\varDelta T^2 + \quad \cdots\cdots \quad (23)$$

初期特性曲線については，さらに高次の差分表示が可能であるが，任意の特性曲線網については，$\varDelta T^2$ の項までであるから，上式の $\varDelta T^3$ の項は，採用した差分 $\varDelta T$ が適当であるかどうかの験算に用いる。

4. 特性曲線網

特性曲線群の第 i 番目の正特性曲線を〔i〕曲線，第 j 番目の負特性曲線を〔j〕曲線と呼称し，それらの交点を点（i, j）と名付ける。そして，点（i, j）から〔i〕曲線および〔j〕曲線に沿ってとった差分をそれぞれ $\varDelta_i$ および $\varDelta_j$ の差分記号であらわすことにする。

(1) 境界条件が与えられる $X = X_B$ における特性曲線網の算式：



図－1　$X = X_B$ を横切る網目

$U < C$，すなわち常流の場合と，$U > C$，すなわち射流の場合とでは負特性曲線の勾配が逆になるから，$X = X_B$ における特性曲線の一つの網目は，図－1に例示するようになる。図において，黒点および太線は波が上流から下流へ進む場合に初期条件から既知となる点および線をあらわし，矢印はそれぞれの網目に沿う差分の方向を示す。$U < C$ の場合には，下流から上流へ遡上る波が存在し，その波を対象とするときは，〔i〕曲線ではなくて，〔j〕曲線，したがって点（i+1, j）が与えられる。

まず，$X = X_B$ において，境界条件が，$C_B = \zeta(T)$ で与えられる場合をとりあげよう。

〔j+1〕曲線に関する差分方程式(19)および(20)式は，$\varDelta T^3$ 以下の項を省略して，

$$\varDelta_{j+1}X = \{(U-C) - (\varDelta_i U - \varDelta_i C)\}\varDelta_{j+1}T + \frac{1}{2}(\varDelta_{j+1}U - \varDelta_{j+1}C)\varDelta_{j+1}T \quad \cdots\cdots \quad (24)$$

$$\varDelta_{j+1}U - 2m\varDelta_{j+1}C = \{(Y_-) + (\varDelta_i Y_-)\}\varDelta_{j+1}T + \frac{1}{2}\Big[\{(Z_-) + (\varDelta_i Z_-)\}\{(U-C) + (\varDelta_i U - \varDelta_i C)\}\varDelta_{j+1}T \quad \cdots \quad (25)$$
$$- \frac{\varDelta_{j+1}U}{U + \varDelta_i U}(2K_f - K_a + 2\varDelta_i K_f - \varDelta_i K_a) + \frac{\varDelta_{j+1}C}{U + \varDelta_i U}(MK_f + K_a + M\varDelta_i K_f + \varDelta_i K_a)\Big]\varDelta_{j+1}T$$

ここに，U，C，$(Y_\pm)$，$(Z_\pm)$ はすべて点（i, j）における値である。いま $X = X_B$ 上の差分を $\varDelta_B$ であらわせば，

$$\varDelta_{j+1} = \varDelta_B - \varDelta_i \quad \cdots\cdots \quad (26)$$

であって，$\varDelta_{j+1}X = -\varDelta_i X$，$\varDelta_{j+1}T = \varDelta_B T - \varDelta_i T$，$\varDelta_{j+1}U = \varDelta_B U - \varDelta_i U$，$\varDelta_{j+1}C = \varDelta_B C - \varDelta_i C$ であるから，既知の〔i〕曲線上の関係式を考慮して(24)，(25)式を整頓し，さらに $\varDelta T^3$ の項を省略すれば，

$$\left\{(U-C)+\frac{1}{2}(\Delta_i U-\Delta_i C)+\frac{1}{2}(\Delta_B U-\Delta_B C)\right\}\Delta_B T=\left\{-2C-\Delta_i C+\frac{1}{2}(\Delta_B U-\Delta_B C)\right\}\Delta_i T \qquad \cdots\cdots (27)$$

$$\Delta_B U-2m\Delta_B C=-4m\Delta_i C+\{(Y_+)-(Y_-)\}\Delta_i T+(Z_-)\Delta_B T+\frac{1}{2}\Big[(Z_-)\{(U+C)\Delta_i T+(U-C)(\Delta_B T-\Delta_i T)\}(\Delta_B T-\Delta_i T)$$
$$+(Z_+)(U+C)\Delta_i T^2-\left\{\frac{\Delta_B U}{U}(2Kf-K_a)-\frac{\Delta_B C}{C}(MKf+K_a)\right\}(\Delta_B T-\Delta_i T)-\frac{\Delta_i U}{U}\{2Kf\Delta_B T-K_a(\Delta_B T-2\Delta_i T)\}$$
$$+\frac{\Delta_i C}{C}\{MKf\Delta_B T+K_a(\Delta_B T-2\Delta_i T)\}\Big] \qquad \cdots\cdots (28)$$

が導かれる。一方境界条件 $C_B=\zeta(T)$ から，点 (i, j) における $d\zeta/dT$, $d^2\zeta/dT^2$ を $\dot{\zeta}$, $\ddot{\zeta}$ であらわして，

$$\Delta_B C=\Delta_B T\dot{\zeta}+\frac{1}{2}\Delta_B T^2\ddot{\zeta} \qquad \cdots\cdots (29)$$

が与えられる。(27), (28) および (29) 式を $\Delta_B T$, $\Delta_B U$, $\Delta_B C$ について解けばよいわけであるが，ΔT^3 のorder が省略できるという前提にたてば，これらを ΔT と ΔT^2 の項に分けて，

$$\Delta_B T=\Delta_B' T+\Delta_B'' T, \quad \Delta_B C=\Delta_B' C+\Delta_B'' C, \quad \text{および} \quad \Delta_B U=\Delta_B' U+\Delta_B'' U \qquad \cdots\cdots (30)$$

とおき，第 1 近似 Δ_B' を，

$$\Delta_B' T=\{-2C/(U-C)\}\Delta_i T, \quad \Delta_B' C=\Delta_B' T\dot{\zeta}, \quad \Delta_B' U=2m(\Delta_B' C-2\Delta_i C)+(Y_-)\Delta_B' T+\{(Y_+)-(Y_-)\}\Delta_i T \qquad \cdots\cdots (31)$$

第 2 近似 Δ_B'' を

$$\Delta_B'' T=\frac{C}{(U-C)^2}\left\{\Delta_i U-\frac{U}{C}\Delta_i C+\frac{1}{2}\left(\frac{U}{C}+1\right)(\Delta_B' U-\Delta_B' C)\right\}\Delta_i T, \qquad \cdots\cdots (32)$$

$$\Delta_B'' C=\Delta_B'' T\dot{\zeta}+\frac{1}{2}(\Delta_B' T)^2\ddot{\zeta} \qquad \cdots\cdots (33)$$

$$\Delta_B'' U=2m\Delta_B'' C+(Y_-)\Delta_B'' T+\frac{1}{2}\Big[\{(Z_-)(U+C)-(Z_+)(U+C)\}\Delta_i T-\frac{\Delta_B' U}{U}(2Kf-K_a)+\frac{\Delta_B' C}{C}(MKf+K_a)$$
$$-\left\{\frac{\Delta_i U}{U}\left(2Kf-\frac{U}{C}K_a\right)-\frac{\Delta_i C}{C}\left(MKf+\frac{U}{C}K_a\right)\right\}\frac{2C}{U+C}\Big]\left(-\frac{U+C}{U-C}\Delta_i T\right) \qquad \cdots\cdots (34)$$

とできよう。これによって点 (i+1, j+1) が既知点となり，〔i+1〕曲線の出発点が得られたことになる。

なお点 (i+1, j) の側から別の地点の境界条件によって計算が進められて来る場合や，常流に生ずる負の波を対象とする場合には，〔j〕曲線が既知として与えられるから，全く同様の手順で $X=X_B$ 上の点 (i+1, j+1) を決定する算式が導かれる。その結果だけを示すと次式のようである。

$$\left.\begin{aligned}
&\Delta_B' T=(2C/U+C)\Delta_j T, \quad \Delta_B' C=\Delta_B' T\dot{\zeta}, \quad \Delta_B' U=-2m(\Delta_B' C-2\Delta_j C)+(Y_+)\Delta_B' T+\{(Y_-)-(Y_+)\}\Delta_j T\\
&\Delta_B'' T=\frac{C}{(U+C)^2}\left\{-\Delta_j U+\frac{U}{C}\Delta_j C+\frac{1}{2}\left(\frac{U}{C}-1\right)(\Delta_B' U+\Delta_B' C)\right\}, \quad \Delta_B'' C=\Delta_B'' T\dot{\zeta}+\frac{1}{2}(\Delta_B' T)^2\ddot{\zeta}\\
&\Delta_B'' U=-2m\Delta_B'' C+(Y_+)\Delta_B'' T+\frac{1}{2}\Big[\{(Z_+)(U-C)-(Z_-)(U+C)\}\Delta_j T-\frac{\Delta_B' U}{U}(2Kf+K_a)\\
&\quad+\frac{\Delta_B' C}{C}(MKf-K_a)+\left\{\frac{\Delta_j U}{U}\left(2Kf-\frac{U}{C}K_a\right)-\frac{\Delta_j C}{C}\left(MKf+\frac{U}{C}K_a\right)\right\}\frac{2C}{U+C}\Big]\left(-\frac{U-C}{U+C}\right)\Delta_j T
\end{aligned}\right\} \cdots\cdots (35)$$

同様に，$X=X_B$ において，C_B および U_B がともに T の関数として与えられるときは，$X=X_B$ 上の各点を出発点として特性曲線網を作成できる。この場合は Δ_j および Δ_{j+1} が求める未知量であり，その算式は

$$\left.\begin{aligned}
&\Delta_j' T=\frac{U+C}{2C}\Delta_B T, \quad \Delta_j' U=\frac{1}{2}\left[\Delta_B U+2m\Delta_B C+\{(Y_+)(U-C)+(Y_-)(U+C)\}(\Delta_B T/2C)\right]\\
&\Delta_j' C=\frac{1}{4m}\left[\Delta_B U+2m\Delta_B C+\{(Y_+)(U-C)-(Y_-)(U+C)\}(\Delta_B T/2C)\right]\\
&\Delta_j'' T=\frac{1}{4C}\left\{\frac{U-C}{2C}(\Delta_B U+\Delta_B C)+\Delta_j' U-\frac{U}{C}\Delta_j' C\right\}\Delta_B T\\
&\Delta_j'' U=\frac{1}{2}\{(Y_+)\Delta_{i+1}'' T+(Y_-)\Delta_j'' T\}+\frac{1}{4}\Big[\{(Z_+)(U-C)+(Z_-)(U+C)\}\frac{U^2-C^2}{4C^2}\Delta_B T\\
&\quad-\left\{\frac{\Delta_B U}{U}(2Kf+K_a)-\frac{\Delta_B C}{C}(MKf-K_a)\right\}\frac{U-C}{2C}-\left\{\frac{\Delta_j U}{U}\left(2\frac{U}{C}Kf-K_a\right)-\frac{\Delta_j C}{C}\left(M\frac{U}{C}Kf+K_a\right)\right\}\Big]\Delta_B T\\
&\Delta_j'' C=\frac{1}{4m}\{(Y_+)\Delta_{i+1}'' T-(Y_-)\Delta_j'' T\}+\frac{1}{8m}\Big[\{(Z_+)(U-C)+(Z_-)(U+C)\}\frac{U^2-C^2}{4C^2}\Delta_B T-
\end{aligned}\right\} \cdots\cdots (36)$$

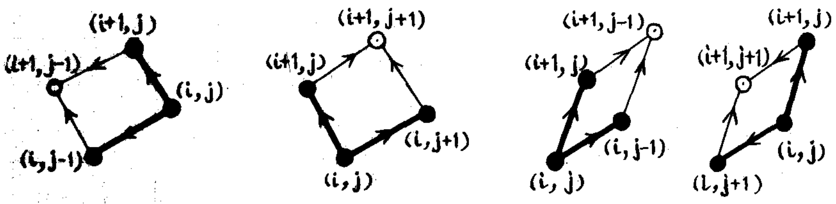
$$-\left\{\frac{\Delta_B U}{U}(2K_f+K_a)-\frac{\Delta_B C}{C}(MK_f-K_a)\right\}\frac{U-C}{2C}+\left\{\frac{\Delta_j U}{U}\left(2K_f-\frac{U}{C}K_a\right)-\frac{\Delta_j C}{C}\left(MK_f+\frac{U}{C}K_a\right)\right\}\Big]\Delta_B T \Bigg\}$$

また〔i+1〕曲線については，

$$\Delta_{i+1}X=\Delta_j X\ ,\quad \Delta_{i+1}T=\Delta_j T-\Delta_B T\ ,\quad \Delta_{i+1}U=\Delta_j U-\Delta_B U\ ,\quad \Delta_{i+1}C=\Delta_j C-\Delta_B C \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (37)$$

ただし，この場合には正負いずれの特性曲線も，$X=X_B$ 上から出発すると考えるから，差分の方向は，〔i+1〕曲線について，図－1の矢印と反対方向をとる。

(2) 既知の正および負特性曲線〔i〕および〔j〕から特性曲線網を完成する算式：



(i) U < C（上流へ）　(ii) U < C（下流へ）　(iii) U > C（下流へ）　(iv) U > C（上流へ）

図－2　二つの既知曲線からの網目の計算方向

図－2は，X－T平面における特性曲線の網目の計算方向を示したものである。しかし，上流へ進める場合も下流へ進める場合も算式は全く同じであって，ただ差分をとる方向が異なるだけである。

これらの網目において，〔j〕曲線に沿ってとった差分と〔i+1〕曲線に沿ってとった差分の和は，当然〔i〕曲線のそれと〔j－1〕曲線のそれとの和に等しくなければならない。いま新らたに差分記号 V を

$$\Delta_{i+1}-\Delta_i=\Delta_{j-1}-\Delta_j=V \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (38)$$

と定義し，　$\Delta_{i+1}X=\Delta_i X+VX$ ，$\Delta_{j-1}X=\Delta_j X+VX$ ，$\Delta_{i+1}T=\Delta_i T+VT$ ，$\cdots\cdots\cdots$ etc とおくことにする。（図－2の(ii)および(iv)の場合は j－1 を j＋1 に書き換える）

(38)式の V の記号を用いて，〔i+1〕曲線および〔j－1〕曲線に関する差分方程式(15)，(16)式を変形し，さらに既知の〔i〕曲線および〔j〕曲線上の関係式を代入すれば，

〔i+1〕に関して，

$$VX=\left\{(\Delta_j U+\Delta_j C)+\frac{1}{2}(VU+VC)\right\}\Delta_i T+\left\{(U+C+\Delta_j U+\Delta_j C)+\frac{1}{2}(\Delta_i U+\Delta_i C+\ U+\ C)\right\}\ T \qquad \cdots\cdots (39)$$

および

$$\begin{aligned}VU+2m\,VC=&\Big[(\Delta_j Y_+)+\frac{1}{2}\Big\{(\Delta_j Z_+)\Delta_i T-(2K_f+K_a)\Big(\frac{VU}{U}-\frac{\Delta_i U\Delta_j U}{U^2}\Big)+(MK_f-K_a)\Big(\frac{VC}{C}-\frac{\Delta_i C\Delta_j C}{C^2}\Big)\Big\}\Big]\Delta_i T\\&+\Big[(Y_+)+(\Delta_j Y_+)+\frac{1}{2}\Big\{(Z_+)+(\Delta_j Z_+)-(2K_f+K_a)\Big(\frac{U}{U}+\frac{\Delta_i U}{U}-\frac{\Delta_i U\Delta_j U}{U^2}\Big)+(MK_f-K_a)\\&\Big(\frac{VC}{C}+\frac{\Delta_i C}{C}-\frac{\Delta_i C\Delta_j C}{C^2}\Big)\Big\}\Big]VT \qquad \cdots (40)\end{aligned}$$

〔j－1〕に関して，

$$VX=\left\{(\Delta_i U-\Delta_i C)+\frac{1}{2}(VU-VC)\right\}\Delta_j T+\left\{(U-C+\Delta_i U-\Delta_i C)+\frac{1}{2}(\Delta_j U-\Delta_j C+VU-VC)\right\}VT \qquad \cdots\cdots\cdots (41)$$

$$\begin{aligned}VU-2m\,VC=&\Big[(\Delta_i Y_-)+\frac{1}{2}\Big\{(\Delta_i Z_-)\Delta_j T-(2K_f-K_a)\Big(\frac{VU}{U}-\frac{\Delta_i U\Delta_j U}{U^2}\Big)+(MK_f+K_a)\Big(\frac{VC}{C}-\frac{\Delta_i C\Delta_j C}{C^2}\Big)\Big\}\Big]\Delta_j T\\&+\Big[(Y_-)+(\Delta_i Y_-)+\frac{1}{2}\Big\{(Z_-)+\Delta_i(Z_-)-(2K_f-K_a)\Big(\frac{VU}{U}+\frac{\Delta_j U}{U}-\frac{\Delta_i U\Delta_j U}{U^2}\Big)+(MK_f+K_a)\Big(\frac{VC}{C}+\frac{\Delta_j C}{C}-\frac{\Delta_j C\Delta_j C}{C^2}\Big)\Big\}\Big]VT\\&\cdots\cdots\cdots (42)\end{aligned}$$

が得られる。前項と同様に　$V=V'+V''$　とおいて高次の微小項を省略すれば，

まず，(39)，(41)式から VX を消去して，

$$\left.\begin{aligned}V'T&=\frac{\Delta_i T\Delta_j T}{2C}\left(\frac{\Delta_i U}{\Delta_i T}-\frac{\Delta_j U}{\Delta_i T}-\frac{\Delta_i C}{\Delta_i T}-\frac{\Delta_j C}{\Delta_j T}\right)\\V''T&=\frac{1}{4C}\Big[V'U(\Delta_j T-\Delta_i T)-V'C(\Delta_j T+\Delta_i T)+\{(\Delta_j U-\Delta_j C)-(\Delta_i U+\Delta_i C)\}V'T\Big]\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots (43)$$

つぎに，(40)，(42)式を加え合わせて，

$$V'U=\frac{\Delta_i T\Delta_j T}{2}\left[\frac{(\Delta_j Y_+)}{\Delta_j T}+\frac{(\Delta_i Y_-)}{\Delta_i T}+\frac{1}{2}\left\{\frac{(\Delta_j Z_+)}{\Delta_j T}\right\}\right]+\frac{1}{2}\left[(Y_+)+(Y_-)+\frac{1}{2}\{(Z_+)+(Z_-)\}\right]VT$$

$$\begin{aligned}V''U=&\frac{1}{2}\left[\left\{(Y_+)+(Y_-)+\frac{1}{2}(Z_+)+\frac{1}{2}(Z_-)\right\}V''T+\left\{(\Delta_j Y_+)+(\Delta_i Y_-)+\frac{1}{2}(\Delta_j Z_+)\right\}V'T\right]\\&-\frac{1}{4}\left[\left(\frac{VU}{U}-\frac{\Delta_i U\Delta_j U}{U^2}\right)\{2K_f(\Delta_i T+\Delta_j T)+K_a(\Delta_i T-\Delta_j T)\}-\left(\frac{VC}{C}-\frac{\Delta_i C\Delta_j C}{C^2}\right)\{MK_f(\Delta_i T+\Delta_j T)-K_a(\Delta_i T-\Delta_j T)\}\right.\\&\left.+\left\{\left(2\frac{\Delta_i U+\Delta_j U}{U}-M\frac{\Delta_i C+\Delta_j C}{C}\right)K_f+\left(\frac{\Delta_i U-\Delta_j U}{U}-\frac{\Delta_i C-\Delta_j C}{C}\right)K_a\right\}V'T\right]\end{aligned}\quad\cdots\cdots\cdots\ (44)$$

さらに，(40)，(42)式を差引いて，

$$V'C=\frac{\Delta_i T\Delta_j T}{4m}\left[\frac{(\Delta_j Y_+)}{\Delta_j T}-\frac{(\Delta_i Y_-)}{\Delta_i T}+\frac{1}{2}\left\{\frac{(\Delta_j Z_+)}{\Delta_j T}-\frac{(\Delta_i Z_-)}{\Delta_i T}\right\}\right]+\frac{1}{4m}\left[(Y_+)-(Y_-)+\frac{1}{2}\{(Z_+)-(Z_-)\}\right]V'T$$

$$\begin{aligned}V''C=&\frac{1}{4m}\left[\left\{(Y_+)-(Y_-)+\frac{1}{2}(Z_+)-\frac{1}{2}(Z_-)\right\}V''T+\left\{(\Delta_j Y_+)-(\Delta_i Y_-)+\frac{1}{2}(\Delta_j Z_+)+\frac{1}{2}(\Delta_i Z_-)\right\}V'T\right]\\&-\frac{1}{8m}\left[\left(\frac{VU}{U}-\frac{\Delta_i U\Delta_j U}{U^2}\right)\{2K_f(\Delta_i T-\Delta_j T)+K_a(\Delta_i T+\Delta_j T)\}-\left(\frac{VC}{C}-\frac{\Delta_i C\Delta_j C}{C^2}\right)\{MK_f(\Delta_i T-\Delta_j T)-K_a(\Delta_i T+\Delta_j T)\}\right.\\&\left.+\left\{\left(2\frac{\Delta_i U-\Delta_j U}{U}-M\frac{\Delta_i C-\Delta_j C}{C}\right)K_f+\left(\frac{\Delta_i U+\Delta_j U}{U}-\frac{\Delta_i C+\Delta_j C}{C}\right)K_a\right\}V'T\right]\end{aligned}\quad\cdots\cdots\ (45)$$

ここに，$(Y_+)=I-K_f-K_a$，$(Y_-)=I-K_f+K_a$，$(Z_+)=\dot{I}-K_f\frac{\dot{N}}{N}-K_a\frac{\dot{E}}{E}$，$(Z_-)=\dot{I}-K_f\frac{\dot{N}}{N}+K_a\frac{\dot{E}}{E}$ であつて，

$$\left.\begin{aligned}(\Delta_j Y_+)&=(Z_+)\Delta_j T-\frac{\Delta_j U}{U}(2K_f+K_a)+\frac{\Delta_j C}{C}(MK_f-K_a)\\(\Delta_i Y_-)&=(Z_-)\Delta_i T-\frac{\Delta_i U}{U}(2K_f+K_a)+\frac{\Delta_i C}{C}(MK_f-K_a)\\(\Delta_j Z_+)&=\left\{\ddot{I}-K_f\left(\frac{\ddot{N}}{N^2}-\frac{\dot{N}^2}{N}\right)-K_a\left(\frac{\ddot{E}}{E^2}-\frac{\dot{E}^2}{E}\right)\right\}(U-C)\Delta_j T-K_f\frac{\dot{N}}{N}\left(2\frac{\Delta_j U}{U}-M\frac{\Delta_j C}{C}\right)-K_a\frac{\dot{E}}{E}\left(\frac{\Delta_j U}{U}+\frac{\Delta_j C}{C}\right)\\(\Delta_i Z_-)&=\left\{\ddot{I}-K_f\left(\frac{\ddot{N}}{N^2}-\frac{\dot{N}^2}{N}\right)+K_a\left(\frac{\ddot{E}}{E^2}-\frac{\dot{E}^2}{E}\right)\right\}(U+C)\Delta_i T-K_f\frac{\dot{N}}{N}\left(2\frac{\Delta_i U}{U}-M\frac{\Delta_i C}{C}\right)-K_a\frac{\dot{E}}{E}\left(\frac{\Delta_i U}{U}+\frac{\Delta_i C}{C}\right)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\ (46)$$

である。なおこれらはいずれも点（i，j）における値である。

5. 常数 x_0，t_0，u_0，c_0 の値

以上の算式によって特性曲線網は順次計算されるわけであるが，これらは ΔT^3 と同程度以上と見られる微小項を省略して導かれたものである。そして，無次元化した変量 X，T，U および C はそれぞれ x_0，t_0，u_0 および c_0 を単位と考えた数値であるから，計算の対象となる問題における諸量の大きさが，これらの単位でどの程度の数値になるかを理解しておかねばならない。

時間単位 t_0 を一つの基準値にとり，これを波の半周期あるいは最高水深 h_{max} に達するまでの水位上昇時間に選ぶことにし，S_0 は与えられた水路区間における最大勾配にとる。波速 c の t_0 時間における平均増加率を（σg）とおき，h_{max} に対応する最大波速を c_{max} とおけば，x_0，u_0，c_0 は (11) 式から

$$c_0=(S_0/\sigma)\,c_{max},\quad x_0=(S_0/\sigma)\,c_{max}\,t_0=(S_0/\sigma^2)\,h_{max}\quad\cdots\cdots\cdots\ (47)$$

となる。たとえば，$\sigma=10^{-4}$（$t_0=1.5$ 時間，$h_{min}=2$ 米，$h_{max}=10$ 米 とするとき，$\sigma=1.04\times10^{-4}$）の程度の場合，最大水深に対応する波速の無次元量 C_{max} は（$10^{-4}/S_0$）の程度であり，Froude 数が極端に大きくない限り，U_{max} もこれよりか桁外れに大きくなることはない。無次元変量の最大値がこの程度とすれば，多くの場合 ΔU，ΔC は ΔT に対してかなり小さくなると考えられるから，上に示した算式はさらに省略可能な微小項を含んでいることになる。なお $\sigma=10^{-4}$ なら，$X=1$ が $X=S_0 h_{max}\times10^{8}$ に対応する。