

電力中央研究所	伊 藤 剛
三菱原子力工業 KK	渡 辺 二 郎
三菱原子力工業 KK	平 本 和 子
電力中央研究所	日 野 幹 雄

1 — はじめに：最近電子計算機による高潮の数値計算の試みがいくつかなされている。著者達もこの様な機会をもちいく通りかの計算を行った。その際に遭遇した問題点のうち、今後水理学上の同種の数値計算に共通すると思われる次の二三の点について述べる。

- (i) 微分方程式の差分式化にともなう計算安定性。
- (ii) 二現象の重ね合せ。
- (iii) 格子点間隔の異なる二領域の接続方法。

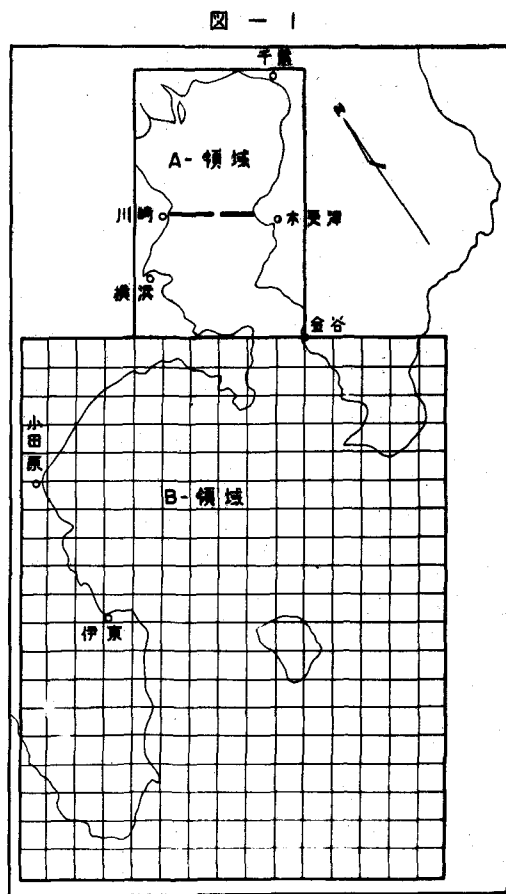
実際に計算の対象としたのは東京湾で、ここに伊勢湾台風クラスの台風が襲来した際の東京湾沿岸の高潮々位および東京湾中央に防潮と産業道路の二つの役割をもつ横断堤を建造することの潮位減衰の効果を調べた。この種の計算は前にすでに2回行われているが、今回は特に次の点を目的としてなされた。使用した電子計算機はIBM7090である。

- (i) 前の計算は防潮堤のつけねに500 m巾の開口部のある場合を行ったが、開口部を横断堤の中央にもうける。
- (ii) オランダの P.Ph. Jansen 教授の質疑に答えるために、Daily Tide と高潮の重ね合せの可否はどうか。
- (iii) 計算値と実測値を一致させるために、湾口係数を用いるが、より合理的な境界条件の与え方はないか。

今回の計算では、積分領域は東京湾外に広げ図-1のようにした。格子点間隔はAで1.5Km, Bで6 km, 積分の時間間隔は30sec である。これらはともに計算安定条件の一つ

$$\frac{\Delta B}{\Delta t} > \sqrt{2g h_{\max}} \dots\dots\dots (1)$$

を満している (ΔB : 格子点間隔, Δt : 時間間隔, $h_{\max}$: 最大水深) 。



2. 微分方程式および外力 : 高潮は台風や低気圧などの気象擾乱によって港湾内の水位が異常に上昇する現象であって直接の原因となる外力は風と気圧である。水深方向に積分して二次元化した運動および連続の方程式は次のようである。

$$\frac{\partial M}{\partial t} = -g(h+\zeta) \frac{\partial(\zeta-\zeta_0)}{\partial x} + fN - \frac{\tau_b^x}{\rho_w} + \frac{\tau_s^x}{\rho_w} \dots\dots\dots (2)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -g(h+\zeta) \frac{\partial(\zeta-\zeta_0)}{\partial y} - fM - \frac{\tau_b^y}{\rho_w} + \frac{\tau_s^y}{\rho_w} \dots\dots\dots (3)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\right) \dots\dots\dots (4)$$

また、防潮堤開口部では y 方向の慣性項を考慮して式(3)のかわりに式(4)を用いる。

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\frac{N}{(h+\zeta)} \frac{\partial N}{\partial y} - g(h+\zeta) \frac{\partial(\zeta-\zeta_0)}{\partial y} - fM - \frac{\tau_b^y}{\rho_w} + \frac{\tau_s^y}{\rho_w} \dots\dots\dots (5)$$

ここに、記号は次のように定義されている。

$M = x$ 方向の流量, $N = y$ 方向の流量, $x, y =$ 座標 (y を防潮堤に直角に北に向う方向とする)

$\zeta =$ 水位上昇, $\zeta_0 =$ 気圧降下の水柱換算値, $f =$ Coriolis parameter, $\tau_b =$ 海底摩擦力

$\tau_s =$ 海面摩擦力,

また、外力は次のように与えられる。

$$\vec{\tau}_s = \rho_a \tau^2 |\mathbf{W}| \mathbf{W} \quad (\rho_a \tau^2 = 3.2 \times 10^{-6}) \dots\dots\dots (6)$$

$$\vec{\tau}_b = \rho_w \tau^2 |\mathbf{V}| \mathbf{V} - k \vec{\tau}_s \dots\dots\dots (7)$$

$$\zeta_0 = \frac{a}{\rho_w g} \left\{ 1 + \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \right\}^{-1} \dots\dots\dots (8)$$

$$W_x = C_1 U_x \exp\left(-\frac{r\pi}{5 \times 10^7}\right) - \frac{C_2 f}{2} \left[-1 + \sqrt{1 + \frac{4a}{\rho_a f^2} \cdot \frac{1}{r_0^2 \left\{ 1 + \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}}} \right] (0.500x + 0.866y) \dots\dots (9)$$

$$W_y = C_1 U_y \exp\left(-\frac{r\pi}{5 \times 10^7}\right) - \frac{C_2 f}{2} \left[-1 + \sqrt{1 + \frac{4a}{\rho_a f^2} \cdot \frac{1}{r_0^2 \left\{ 1 + \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}}} \right] (0.866x - 0.500y) \dots\dots (10)$$

ここに、 $r =$ 台風からの中心距離, $r_0, a, U_x, U_y =$ 台風の特徴を示す定数である。

3. 差分方程式の安定性 : 上に記した微分方程式の差分方程式化にはいく種類かの方法があり、その差分式には精度が良いのみではなく、計算の進行にともなう安定性が問題となる。非線型項を含む場合の差分近似はかなり難しい。F.G. Shuman は、いくつかの差分型式 (momentum, semi-momentum, advective, filtered factor form) について時間とともに系のエネルギーが増減するか、一定かを数値実験によって調べて安定性を確かめることを試みている。我々の場合にも、海底摩擦力・慣性力の差分式化に問題があり、解析的に安定条件の検討を行った。

a) まず簡単な微分方程式(11)を考える。

$$\frac{dM}{dt} = aM + f(t) \dots\dots\dots (11)$$

これを、 $(M)_{t=t_0+t_n}$ を M^n と記して

$$\frac{M^{n+1} - M^{n-1}}{2\Delta t} = aM^n + f(n) \dots\dots\dots (12)$$

と差分化する場合に、 $X^{n+1} = (M^{n+1}, N^n)$ を $X^n = (M^n, N^{n-1})$ に結び付ける線型作用素

$$R = \begin{pmatrix} 2a\Delta t & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \dots\dots\dots (13)$$

を考える。この作用素 R の固有値 λ は

$$\lambda = a\Delta t \pm \sqrt{a^2\Delta t^2 + 1} \dots\dots\dots (14)$$

であり、 $a < 0$ のとき $|\lambda| > 1$ であって、差分近似 (12) は不安定となる。安定な差分式は、次に証明するように、 aM^n の項を $a(M^{n+1} + M^{n-1})/2$ とすることである。

b) 次に一般的にコリオリの力と海底摩擦力を含んだ式

$$\frac{\partial M}{\partial t} = fN - eM\sqrt{M^2 + N^2} + C_1 \dots\dots\dots (15)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -fM - eN\sqrt{M^2 + N^2} + C_2 \dots\dots\dots (16)$$

を初期条件 $M = M_0, N = N_0$ のもとに解く場合を考える。(15), (16) を

$$\frac{M^{n+1} - M^{n-1}}{2\Delta t} = fN^n - \{e\sqrt{(M^n)^2 + (N^n)^2}\} \cdot M^n + C_1 \dots\dots\dots (17)$$

と近似すれば 3-a) から不安定であることがわかる。しかし、これを

$$\frac{M^{n+1} - M^{n-1}}{2\Delta t} = fN^n - \frac{e}{2}(M^{n+1} + M^{n-1})\sqrt{(M^n)^2 + (N^n)^2} + C_1 \dots\dots\dots (18)$$

$$\frac{N^{n+1} - N^{n-1}}{2\Delta t} = -fM^n - \frac{e}{2}(N^{n+1} + N^{n-1})\sqrt{(M^n)^2 + (N^n)^2} + C_2 \dots\dots\dots (19)$$

と近似すれば良いことが次の様にしてわかる。今、次のような置換をする。

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{1 - e\Delta t\sqrt{(M^n)^2 + (N^n)^2}}{1 + e\Delta t\sqrt{(M^n)^2 + (N^n)^2}} & \beta &= \frac{2f\Delta t}{1 + e\Delta t\sqrt{(M^n)^2 + (N^n)^2}} \\ r_1 &= \frac{2C_1\Delta t}{1 + e\Delta t\sqrt{(M^n)^2 + (N^n)^2}} & r_2 &= \frac{2C_2\Delta t}{1 + e\Delta t\sqrt{(M^n)^2 + (N^n)^2}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (20)$$

α, β, r_1, r_2 の変化はそれほど大きくなく、計算過程の数ステップでは定数とみなせる。式 (18) (19) は

$$M^{n+1} = \alpha M^{n+1} + \beta M^n + r_1 \dots\dots\dots (21)$$

$$N^{n+1} = \alpha N^{n+1} + \beta N^n + r_2 \dots\dots\dots (22)$$

となる。これは、また行列記法を用いて次の様に書ける。四次元ベクトル X_i, y_i ; 線型作用素 R を

$$X_i = \begin{pmatrix} M^{i-1} \\ N^{i-1} \\ M^i \\ N^i \end{pmatrix} ; \quad y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} ; \quad R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \alpha & 0 & 0 & \beta \\ 0 & \alpha & \beta & 0 \end{pmatrix} \dots\dots\dots (23)$$

$$(i = 1, 2, \dots\dots\dots)$$

とすれば、式 (21) (22) は

$$x_{n+1} = R x_n + y \quad \dots\dots\dots (24)$$

となる。これを逐次もちいれば

$$x_{n+1} = R^n x_1 + (R^{n-1} + R^{n-2} + \dots + R^2 + R + E) y \quad \dots\dots\dots (25)$$

となる。ここに、 E は 4 次元単位行列である。したがって、差分式の安定条件は R の固有方程式

$$|\lambda E - R| = (\lambda^2 - \alpha)^2 + \beta^2 \lambda^2 = 0 \quad \dots\dots\dots (26)$$

の根のすべての絶対値が 1 より小さいか、または絶対値が 1 に等しいものがあったとしても重根できないことである。式 (20) から

$$0 < \beta \ll \alpha < 1 \quad \dots\dots\dots (27)$$

であるから、 R の固有値 λ は $|\lambda|^2 = \alpha < 1$ となつて差分方程式 (18) (19) は安定である。

c) 慣性項は普通省略されるが、防潮堤開口部のように流速変動の大きい所では考慮しなければならぬ。微分方程式 (20) の差分近似として次の二通りを考える。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial u}{\partial x} + f(t, x) \quad (0 < x < 1, u(0) = u(1) = 0) \quad \dots\dots\dots (28)$$

$$(I) \quad \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = a \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2 \Delta x} + f_i^n \quad \dots\dots\dots (29)$$

$$(II) \quad \left. \begin{aligned} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} &= a \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x} + f_i^n \quad (a \geq 0) \\ \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} &= a \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} + f_i^n \quad (a \leq 0) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (30)$$

$$\text{いま} \quad r = \frac{a \Delta t}{\Delta x}, \quad v_i = u_i^{n+1}, \quad u_i = u_i^n \quad \dots\dots\dots (31)$$

とおき、 $(N-1)$ 次元ベクトル $u = (u_1, u_2, \dots, u_{N-1})$ を $(N-1)$ 次元ベクトル $v = (v_1, v_2, \dots, v_{N-1})$ に対応させる線型作用素 R_I, R_{II}, R'_{II} を考える。

$$(I) \quad R_I: v_i = u_i + \frac{r}{2}(u_{i+1} - u_{i-1}) \quad (i=1, 2, \dots, N-1) \quad \dots\dots\dots (32)$$

$$(II) \quad R_{II}: v_i = (1-r)u_i + r u_{i+1} \quad (r > 0) \quad \dots\dots\dots (33)$$

$$R'_{II}: v_i = (1+r)u_i - r u_{i-1} \quad (r < 0) \quad \dots\dots\dots (34)$$

作用素系 R_I, R_{II}, R'_{II} を行列で表わせば、式 (35) (36) となる。

$$R_I = \begin{bmatrix} 1 & r/2 & & & 0 \\ -r/2 & 1 & r/2 & & \\ & -r/2 & 1 & r/2 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & -r/2 & 1 & r/2 \\ 0 & & & & r/2 & 1 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (35)$$

$$R_{II} = \begin{bmatrix} 1-r & r & & & \\ 0 & 1-r & r & & \\ & 0 & 1-r & r & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & 0 & 1-r & r \\ & & & & 0 & 1-r \end{bmatrix} \quad R'_{II} = \begin{bmatrix} 1-r & 0 & & & \\ -r & 1-r & 0 & & \\ & -r & 1-r & 0 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & -r & 1-r & 0 \\ & & & & -r & 1-r \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (36)$$

まず、方法(I)について検討する。 R_I の固有値は行列 $S = R_I - E$ [E は $(N-1)$ 次単位行列]の固有値と1との和であるが、行列 S は Skew-Symmetric であるから、その固有値は純虚数である。したがって R_I の固有値の絶対値はつねに1より大きい。つまり、差分近似(I)は安定でない。

方法(II)については、 R_{II} の固有値は $(1-r)$ 、 $[r \geq 0]$ 、 R_{II}' の固有値は $(1+r)$ [$r \leq 0$]、である。したがって $a \geq 0$ のとき ∞ を使用できないし、 $a \leq 0$ のとき ∞ を使用できない。

このことは、次のようにもいえる。たとえば、 $a > 0$ のとき点 (t_0, x_0) の附近で $u(t, x_0)$ 、 $[t_0 < t < t_0 + \Delta t]$ の値は、 $u(t_0, x)$ 、 $[x_0 < x < x_0 + a \Delta t]$ だけに依存する。ゆえに、 ∞ を使用してはならない。また、そのことから Δx として

$$\Delta x \geq |a| \Delta t \qquad \text{又は} \quad |r| \leq 1 \dots\dots\dots (37)$$

となっていなければ ∞ は不適当な近似であることがわかる。

以上のことから、慣性項を含む方程式の差分近似としては、 $N_{i,j}^n (x = i \Delta x, y = j \Delta y, t = n \Delta t)$ の正負に対応して、次式のように後方差分もしくは前方差分を用いれば、計算の不安定は生じない。

$$\frac{N_{i,j}^{n+1} - N_{i,j}^n}{\Delta t} = - \frac{N_{i,j}^n}{(h+\zeta)} \cdot \frac{N_{i,j}^n - N_{i,j-1}^n}{\Delta x} + \dots \quad (N_{i,j}^n > 0) \dots\dots\dots (38)$$

$$\frac{N_{i,j}^{n+1} - N_{i,j}^n}{\Delta t} = - \frac{N_{i,j}^n}{(h+\zeta)} \cdot \frac{N_{i,j+1}^n - N_{i,j}^n}{\Delta x} + \dots \quad (N_{i,j}^n < 0) \dots\dots\dots (39)$$

上式の右辺を $-\frac{N_{i,j}^n}{(h+\zeta)} \frac{N_{i,j+1}^n - N_{i,j-1}^n}{2 \Delta x}$ とか $-\frac{N_{i,j}^{n+1} + N_{i,j}^n}{2(h+\zeta)} \frac{N_{i,j+1}^n - N_{i,j-1}^n}{2 \Delta x}$ と近似してはならない。

図-2 には、防潮堤をもうけた場合の計算例として、大正6年10月1日台風のコースを、伊勢湾台風が通る場合の千葉の潮位を示した。(計算領域はA、B両域を一つとした。)

4-高潮とDaily Tideとの重ね合せ： 高潮の計算式には非線型の海底摩擦力や慣性項が入っているから式の上からは重ね合せは出来ない。しかし、実際問題として、この重ね合せがどの程度許されるかを例題で調べてみる。まず、台風がなくA領域の湾口の潮位変動のみを与えた場合の東京湾内の各点での計算潮位と推算潮位とを比較した。時間の進行とともに運動が安定し、この潮位が一致するようになるのが認められる(図-3)。次に5821号台風による潮位(偏差)、および湾口での境界条件として潮位が気圧降下分とDaily Tideの和を与えたときの湾内潮位を計算した。

図 - 2

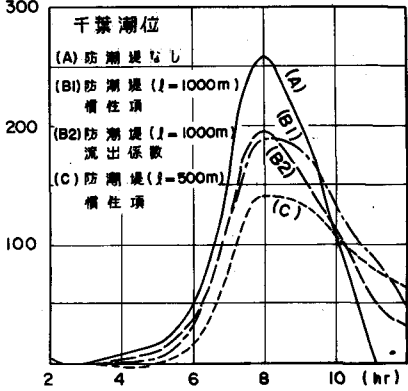
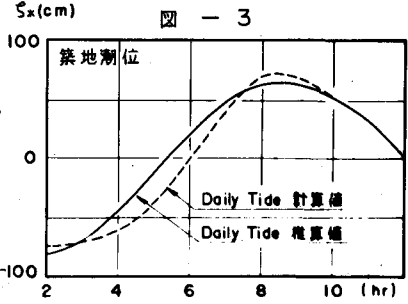


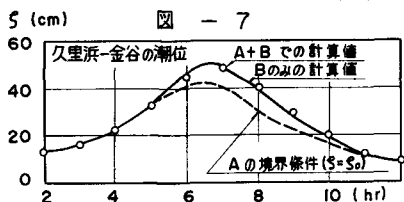
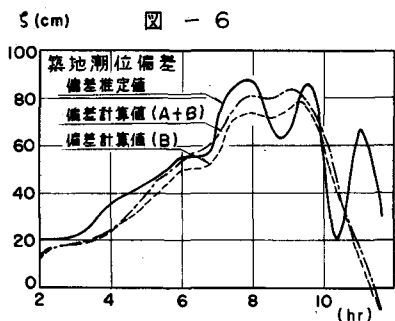
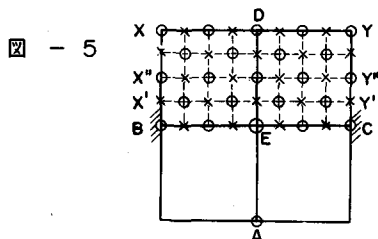
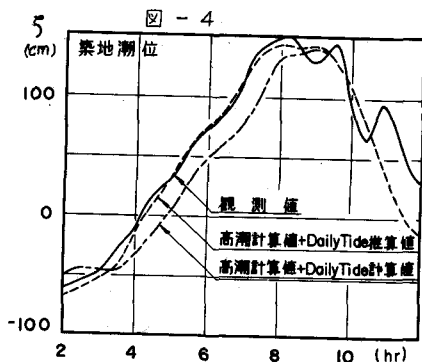
図 - 3



これらの計算結果から

- (i) daily tide の推算値と台風による偏差計算値の重ね合せ、
- (ii) daily tide の計算値と台風による偏差計算値の重ね合せ、
- (iii) 境界条件として気圧降下分の水位とdaily tideの潮位を
与えた場合の高潮計算値

を比較すれば(図-4)、(i)の値が実測とかなり良く一致すること、(ii)と(iii)にはほとんど差がないことがわかる。したがって、防



潮堤のない場合については計算に用いた台風も一つのモデルにすぎないことなどを考えて、高潮計算には daily tide との重ね合わせで十分正確な計算結果が得られると云える。

5 — 二領域の接続： 実測潮位と計算潮位を合わせるために境界条件である湾口潮位に1.0~1.5 位の湾口係数 λ を掛けることが行われている。この不確定な係数の使用をさけるには、積分領域を広くして、領域の境界上での潮位が気圧降下分に等しいとする仮定が十分成り立つようにすれば良い。しかし、計算に用いる台風モデル〔式(9)(10)〕がすでに実際の台風の一つの近似表示にすぎないことを考えれば、あまり広げすぎても意味はない。

今回は図-1の様にしたが、この境界線上では水深はすでに1000 m 以上で十分深く、係数 $\lambda = 1$ として良いと思われる。二領域は計算精度の上から、また水位変化に関する安定条件〔式(11)〕から、格子点間隔が異つてゐる。このような場合には、次のような計算方法がこれ迄行われて来た。

- (i) A を閉鎖し、B のみの潮位をもとめる。こゝで得られた接続線上の潮位を境界条件として、もう一度 A の高潮を計算する
- (ii) A を B と同じ格子間隔に分け、A と B の高潮を同時に計算し、接続線上の潮位を記録する。これを境界条件として、もう一度こまかい格子点間隔で A の高潮計算を行う。

しかし、これでは手数がかゝるので、こゝでは次の様に一度で格子間隔のことなる二領域を計算した。計算時間間隔は30 sec である。図-5 で○印は M, N を、×印は ξ を求める点である。

(Eliassen 法に近い方法で計算の手数を少くしてある)。

(iii) B 領域の点としての B 点の ξ を求めるには、A 点での N の他に D 点での N が必要である。この $(N)_D$ には A 領域の点として計算された X-Y 線上の N の平均値を用いる。また、B-C 上の ξ は $(\xi)_B$ に等しいとする。X'-Y' 上の ξ は、一ステップ前の A 領域の M, N から直接に求まる。X'-Y' 上の ξ は B-C, X'-Y' 上の ξ の平均値として与える。計算結果は、図-6, 7 示す通りである。この例では、積分領域を広げた効果は十分認めることが出来る。前に掲げた図-2 の計算はこの方法によつた。

6 — この論文では、計算にあたって注意すべき点や計算方法を中心に述べ、計算結果は原稿の枚数の関係上極く一部を載せるに止まつた。計算結果の詳しい報告は、刊行準備中の論文(産業計画会議刊)を参照していただきたい。

最後に、いろいろ教示をおねがいしました 気象庁・気象研究所 宇野木・早苗 博士に厚くお礼を申し上げます。