

§ 1 緒 言

一般に開水路の流れは三次元的な現象であるが、通常一方向に流れが卓越しているので、流下方向の流れを主流と称し、それに垂直な断面内の流れを二次流と称して区別している。主流に関しては従来一次元解析法として主に直線水路の流れについて一般的取り扱いがなされているが、二次流に関しては現在のところごく特殊な場合について検討されているにすぎない。従来、開水路流れにおいて特に顕著な二次流の存在が指摘されているものとして、つぎの四つをあげることができる。

- (i) 一様巾の直線水路で等流状態における二次流
- (ii) 彎曲水路における二次流 (副流)
- (iii) 分岐水路における二次流
- (iv) 洪水の増水時、減水時における二次流

いま、乱流状態にある流れを対象とすると、これらの二次流のうち、その発生機構が速度変動場に直接関連すると考えられるのは (i) であつて、(ii)、(iii)、(iv) の二次流は平均速度場より説明される。

この直線水路における二次流は、古く Prandtl によつて閉水路および開水路においてその存在が指摘され、Nikuradse によつて詳細な観察がなされている。しかし、その実験結果の考察は、流水断面における等流速線の歪みに対応して、局所的な循環流の発生を仮想するにとどまつている。その後、直線水路の二次流に関連して、最大流速の位置が自由表面から降下する現象、自由表面の浮遊粒子が水路中心部へかたよる現象などが実験的に検討されてきたが、理論的な考察はその発生に関して、H. A. Einstein¹⁾ の研究がみられるにすぎない。Einstein は二次流を流水断面に発生する渦度 (ξ) とみなし、その時間的変化の平均 $\bar{\xi}$ の存在する条件を速度変動の平均場より検討した。すなわち、速度変動場における Helmholtz の渦動方程式を変形して、

$$\bar{\xi}_t = \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} (\overline{v'^2 - w'^2}) - \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \overline{v'w'} \quad (1)$$

と表わし、層流状態および等方性の乱流状態いずれでも $\bar{\xi}_t = 0$ となることから、二次流が発生しないことを指摘している。しかし、最初に渦度の定義として $\xi = (\partial w' / \partial y - \partial v' / \partial z) = 0$ を与え、一方(1)式より $\bar{\xi}_t \neq 0$ とする条件から $\bar{\xi}_t$ の概念が不明確となり、速度変動場との関連が把握できないように思われる。

このように直線水路における二次流は古くから速度変動場に関連して発生すると推測されながら、その発生機構さえ十分に把握されていないようである。

本文では直線水路の二次流は、流水断面における Reynolds 応力の分布とそれとともなつて生

ける断面内の局所的な圧力こう配から発生すると考えてその現象を検討することにした。これは彎曲水路の副流の発生に関して、時間的平均流速の分布による遠心力の分布と平均的圧力こう配（水面こう配）との差違を考慮する Thompson の概念に類似する。また、発生機構に関する考察の結果を吟味するために、流向管によつて二次元の測定を行ない、実際に開水路流に発生する二次流の特性について若干の検討を行なつた。

§ 2 二次流の発生機構

一様な巾の開水路で等流状態にある流れの断面内の運動方程式は、通常の乱れの時間的平均場における Navier-Stokes の式と考えると、

$$\left\{ \begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} &= \frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial z} \end{aligned} \right. \quad (2)$$

$$\left\{ \begin{aligned} -\left(g \cos \theta + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} \right) &= \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w'^2}}{\partial z} \end{aligned} \right. \quad (3)$$

と表わされる。(2) および (3) 式の右辺は重力場を標準とした圧力こう配であつて、閉水路のそれに対応する。(2) および (3) 式の右辺に注目すると、等力性乱流場では $\overline{v'w'} = 0$, $\overline{v'^2} \sim \overline{w'^2} \sim \text{const}$ となるから、圧力こう配 0 となつて、二次流は発生しないであろう。したがつて、乱流場を対象とすると、 $\overline{v'^2}$, $\overline{w'^2}$, $\overline{v'w'}$ が断面内で変化するせん断乱流場においてのみ二次流が発生すると考えられる。また、Einstein による二次流の発生条件と比較するために、(2) および (3) 式をそれぞれ y , z で微分しその差をとると、

$$\frac{1}{\rho} \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} \right) \right\} = \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} (\overline{v'^2} - \overline{w'^2}) - \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \overline{v'w'} \quad (4)$$

となり、右辺は (1) 式にみられるように Einstein の定義による二次流 $\bar{\epsilon}_s$ に相当する。すなわち Einstein の定義による二次流は、数学的に云えば $\bar{p}$ が不連続のときに発生すると考えられる。

しかし、 $\bar{\epsilon}_s = 0$ の場合においても、圧力こう配 $\partial \bar{p} / \partial y$, $\partial \bar{p} / \partial z$ は存在しうるわけであつて、こうした圧力こう配を二次流の起因と考えると、断面内における二次流の発生が予測されよう。

つぎに、(2) および (3) 式について圧力こう配を検討するために、速度変動項 $\overline{v'^2}$, $\overline{w'^2}$, $\overline{v'w'}$ の分布を吟味する。ただし、従来三次元せん断乱流場における速度変動の測定値がないから、最初に二次元水路における測定値から $\overline{v'^2}$, $\overline{w'^2}$ の分布を検討し、 $\overline{v'w'}$ の分布は有限巾の境界層内における特性から類推して検討を加えてみよう。

(a) $\overline{w'^2}$ ($\overline{v'^2}$) の分布の検討

二次元の流れにおいて流れに直角上方に z 軸をとると、(3) 式の $\overline{v'w'}$ 成分は関与しないので、圧力こう配は

$$-\left(g \cos \theta + \frac{1}{\rho} \frac{d \bar{p}}{d z} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{d \bar{p}}{d z} = \frac{d \overline{w'^2}}{d z} \quad (5)$$

と与えられる。ここに、 $\bar{p}_*$ は重力場を標準とした圧力を表わす。 $d \overline{w'^2} / d z$ の分布を二次元水路で行なつた Laufer の実験値 ($R_* = 10,800$) から求め、無次元化して $1/g \frac{d \overline{w'^2}}{d z} \sim z/H$ の関

係を図示すると図-1のようになる。(Irmay²⁾の整理結果) 図から明らかなように $\overline{dw'^2}/dz$ の分布は壁面近くで正から負に急激に変化する。これを圧力こう配 $d\bar{p}^*/dz$ に関して考えると、Z方向につきのような領域に分けられよう。

$\alpha < z/H < \beta$	$\alpha < z/H < \beta$	$\beta < z/H < \gamma$	$\gamma < z/H \leq 1$
$d\bar{p}^*/dz = 0$	$d\bar{p}^*/dz < 0$	$d\bar{p}^*/dz < 0$	$d\bar{p}^*/dz \approx 0$
層流(底層)域	せん断乱流域		一様乱流域

せん断乱流域においては $d\bar{p}^*/dz < 0$, $d\bar{p}^*/dz > 0$ の二つの領域が存在し、前者は中心部へ向かう流れを、後者は壁面へ向かう流れを誘起すると考えられる。すなわち、二次元の流れにおいても、せん断乱流域では流れに直角方向の二次流が存在すると推測される。また、上表の各領域の大きさおよび $d\bar{p}^*/dz$ の値は Reynolds 数によって変化し、同様に二次元水路で行なつた Reichardt の実験値 ($Re = 8.150$) と比較すると図2のように表わされる。図からわかるように R. 数が増大するとともに、 $d\bar{p}^*/dz < 0$ の領域は小さくなり、 $d\bar{p}^*/dz < 0$ から $d\bar{p}^*/dz > 0$ への変化は一層急激になると考えられる。

(b) $\overline{v'w'}$ 分布の検討

長方形断面で水路底面近くの領域を対象とすると、(2) および (3) 式において $\partial \overline{v'w'}/\partial y$ の項は他の項に比して小さく無視することができる。(3) 式を $z=H$ で $\bar{p}=0$ の条件のもとに積分すると、

$$\bar{p} = \rho g \cos \theta (H - z) + \rho \left(\overline{\frac{v'^2}{H}} - \overline{\frac{v'^2}{W}} \right) \quad (6)$$

となり、これを (2) 式に代入すると、

$$\rho \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial z} = \rho \frac{\partial}{\partial y} \left(\overline{\frac{v'^2}{W}} - \overline{\frac{v'^2}{V}} \right) \quad (7)$$

の関係が得られる。すなわち、 $\partial \overline{v'w'}/\partial z$ の値は $(\overline{\frac{v'^2}{W}} - \overline{\frac{v'^2}{V}})$

の分析によつてきまるが、水路底面の中心付近においては

$\overline{\frac{v'^2}{W}} \sim \overline{\frac{v'^2}{V}}$ と考えられ、水路側面へ近づくほど $\overline{\frac{v'^2}{V}} > \overline{\frac{v'^2}{W}}$ となるのであろう。したがつて、 $\partial \overline{v'w'}/\partial z$ の値は底面近くの領域において中心より側方へと増大し、有限巾の境界層内の二次流と同様に、底面に沿つて中心より側方への流れを惹起するものと考えられる。

また水路側面近くの領域を対象とすると、同様な考察から

$$\rho \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial y} = \rho \frac{\partial}{\partial z} \left(\overline{\frac{v'^2}{V}} - \overline{\frac{v'^2}{W}} \right)$$

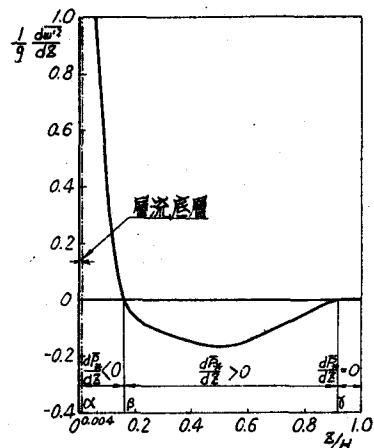


図1 $\frac{1}{9} \frac{d^2 w^2}{dz^2} \sim \frac{z}{H}$ の関係
(Lauferの実験値 $Re=10,800$)

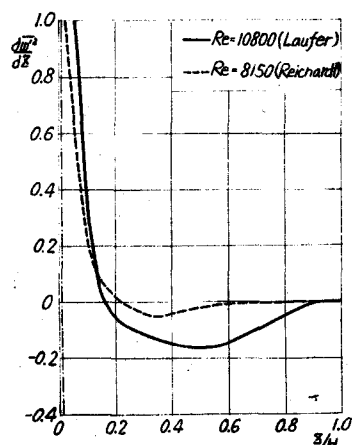


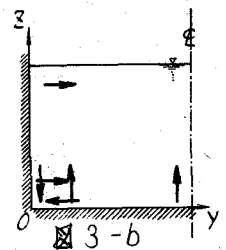
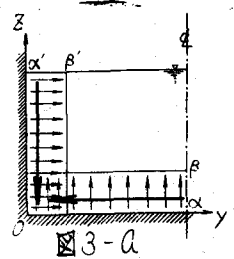
図2 $\frac{1}{9} \frac{d^2 w^2}{dz^2} \sim \frac{z}{H}$ の関係

●関係が得られ、 $\partial \sqrt{w} / \partial z$ は水路側面に沿つて自由表面から下方への流れを惹起するものと考えられる。

以上 (a), (b) の速度変動項に関する検討は、二次元流れの測定値からの推察であつて、十分なものであるが、この検討から長方形断面の開水路流れに発生する二次流の特性を考えるとつぎのように括められよう。

(i) 圧力こう配は水路の側面および底面近くにおいて著しく増大し、その領域で発生した二次流が断面中央部の二次流を誘起すると考えられる。

いま、横方向 (y)、縦方向 (z) の方向に分けて考えると、y 方向では水路側面から断面中央部に向かう二次流と底面に沿つて中心部から側面に向かう二次流とによつて支配され、z 方向では水路底面から水面に向かう二次流と側面に沿つて水面から底面に向かう二次流とによつて支配されよう。その概略を示すと図 3-a のようになる。しかし、水面および水路中心付近では $\partial \sqrt{w} / \partial z \approx \partial \sqrt{w} / \partial y$ と考えられるので、側面および底面に沿う流れはほとんど無視されよう。したがつて、壁面近くの二次流をごく単純化すると、側面の水面近くおよび底面の中心付近では断面中央部へ向かう流れが卓越すると考えられる。しかし、隅角付近では y、z 方向に正、負両方の二次流が存在し、その卓越する方向を一般には予測できないであろう。その概略の様子を図 3-b に示す。



(ii) 上述の二次流の特性は壁面近くに限られた局所的な傾向であつて、断面中央部に誘起される二次流の均衡は、流水の乱れの状態および流水断面の各潤辺長とそれに対応支配領域に關係するものと考えられる。乱れの状態を表わす代表値として、例えば Reynolds 数の影響を考えると、図 2 で検討したように R 数の増加とともに $d\bar{P}^*/dz < 0$ の領域は減少し、その絶対値 $|d\bar{P}^*/dz|$ は増大する。したがつて、 R 数から二次流の強さ ($\sim d\bar{P}^*/dz$) と発生域の範囲を推測できるが、断面中央部への影響は把握できないように思われる。また、有限巾の境界層の検討から推察されるように、底面および側面の潤辺長がそれぞれ壁面に沿つて流れる二次流を支配し、各潤辺長に対応する支配領域は断面中央部へ向かう二次流の効果に關係すると考えられる。

§ 3 流向分布の測定結果による検討

(a) 流向管の特性

二次流の存在による流向のかたよりのうち、特に水平方向の偏角を測定するために二孔の円筒型ビトー管 (流向管) を製作した。流向管の製作に當つての注意事項として、

- i) 流向位置 (流れの方向が両孔の中心角の二等分線に一致する位置) 付近において、両孔の圧力差が鋭敏に現われ、かつ流向偏角 (θ) と圧力差の關係が直線的となること、
- ii) 流向位置において両孔の圧力が静圧に一致すること、
- iii) 標準型ビトー管と同様に、いずれか一孔が流れ方向に向くとき、流速係数が 1 となること、

の三点を考え、沼知氏が行なつた実験結果にもとづいて、流向管の諸寸法を決定した。製作された流向管の直線流における検定結果は図4のようである。この図から上述の設計上の注意事項を検討するとつぎのようにいえよう。ただし、 k_θ は流速係数を表わし

$$k_\theta = (P_L(R) - P_0) / \frac{1}{2} \rho u^2 \text{ である。}$$

1) 流向位置 ($P_L = P_R$) 付近で $\pm 10^\circ$ の間、 k_θ と θ とは急こう配の直線の関係にあつて、良好な特性を示している。

2) $P_L = P_R$ のとき、 P_L (P_R) は P_0 より $0.05 \rho u^2$ だけ大きい値を示している。

3) 流速係数 k_θ の最大値は、 P_L では 0.99 、 P_R では 0.96 となつており、いずれも 1 より小さい値を示している。

このように製作精度の関係から、ii) および iii) の事項は十分に満たされてないが、流向測定には支障がなく、鋭敏に作動するものと考えられよう。

(b) 測定結果の検討

実験に用いた水路は巾 25 cm 深さ 37 cm 長さ 10 m の長方形断面で、内面が塩化ビニール製の滑面からなり、水路床こう配は $1/500$ に設置されている。等流状態の流れにおいて、流水断面内の流向分布については、現在のところまだ十分な資料をえてないが、水理条件の異なる二つの場合 ($Q = 8.5\text{ l/s}$ 、 $H = 8.3\text{ cm}$; $Q = 2.6\text{ l/s}$ 、 $H = 4.4\text{ cm}$) についての等流向線図を示すと、図5-a、図5-bのようになる。ただし、図で角度の符号は中心部へ向かう流れを正とする。等流向線は二つの場合ともに、やや左右非対称で水路の不整の影響が若干入っているが、水深の異なる場合における二次流の特性を把握することができよう。

まず、局所的な特性に注目すると、前節で圧力こう配から予測した二次流の卓越する傾向 (図3-b) は、特に水深の小さい場合に明確にうかがうことができる。すなわち、側面の水面近くおよび底面の中心付近において、断面中央部へ向かう流れが卓越している。また前節の考察では隅角部における二次流の方向は一般に予測できなかったが、本実験では図から明きらかなように、いずれの場合も中心部へ向う流れが著るしい。これは前節の (b) および (ii)

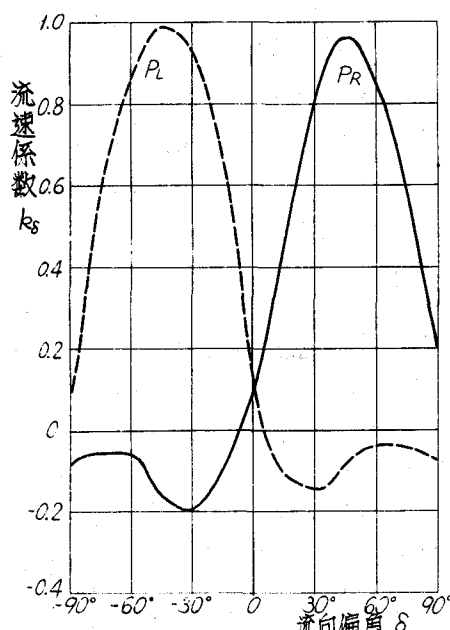


図4 流向管の検定曲線 ($k_\theta \sim \theta$)

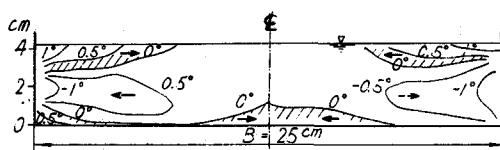


図5-a 等流向線の一例 ($Q = 2.6\text{ l/s}$ 、 $H = 4.4\text{ cm}$)

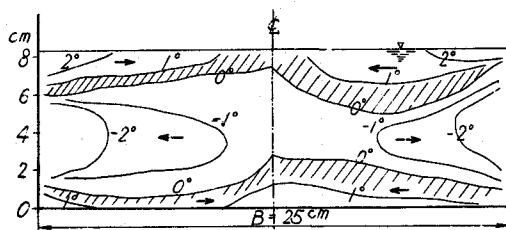


図5-b 等流向線の一例 ($Q = 8.5\text{ l/s}$ 、 $H = 8.3\text{ cm}$)

で吟味したように、本実験の場合 $H < B/2$ であつて、側面に沿う流れが卓越し、それが底面に及ぶためと考えられよう。つぎに、全体的な二次流の傾向としては、通常考えられている断面内で左右一つつつの循環流というよりも、この場合は左右にそれぞれ上下二つの循環流の存在が予測され、その傾向は水深の大きい場合ほど顕著である。

以上、横方向の等流向線図から若干の検討を行ない、前節の図3-bに予測した二次流の傾向を認めることができたが、それを確証するためには、さらに縦方向の流向を加味した詳細な実験が必要と考えられる。

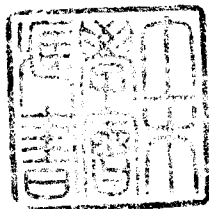
§ 4 結 言

直線水路で等流状態における二次流の存在は古くから観察され、乱流現象との関連性が指摘されながら、その現象の実体は今日でもほとんど把握されてないといえよう。

本研究では「二次流は流水断面内における Reynolds 応力の分布とそれにもなつて生じる断面内の局所的な圧力こう配から発生する」と考え、その内部機構について考察するとともに、流向分布の測定値から若干の検討を行なつた。その結果、図3-a、特に図3-bに示すような二次流の発生が予測され、この傾向は等流向線図においても認めることができた。しかし、本文の考察に用いた実験値はごく限定された条件下におけるものであり、特に乱れの数値変動の測定値は二次元流れに関するものであつたから、上述の傾向をさらに定量的に解析するには不十分と考えられる。今後、せん断乱流域における乱れ計測と流向計測とを対応させて、上述の二次流の発生機構ならびにその特性をさらに検討するとともに、主流との関連を追求したいと考えている。

参考文献

- 1) H.A.Einstein; "Secondary Currents in Straight Channels", Trans.A.G.U. Vol.39, No.36 (1958)
- 2) S.Irmay; "Accelerations and Mean Trajectories in Turbulent Channel Flow", Trans.A.S.M.E, Dec. (1960),
- 3) A.A.Townsend; "The Structure of Turbulent Shear Flow", Cambridge Univ. Press,
- 4) 沼知福三郎 「水流の速さ、方向および静圧を測定しうる円筒型ピトー管」, 機械学会誌 才34巻、才171号 (1930),



昭和37年10月10日発行

第7回水理講演会講演集

編 集 者	土木学会水理委員会
発 行 所	社団法人 土木学会 東京都新宿区四谷一丁目
電 話	351-5138
振 替	東京16828番
定 価	400円 (送料40円) 会員特価(350円)