

北海道大学工学部 岸 力
北海道開発局土木試験所 小 川 芳 昭

I まえがき

開水路彎曲部の流れでは、遠心力のほかにはヘリカルな流れすなわち二次流（または副流）の影響があるため、従来行なわれてきたような自由渦の仮定は必ずしも適さなく、とくに広く浅い流れでは甚しく異なるようである。

本文では、新しい流速分布式を提案し、これによつて推定した水面形や境界層内の流れが実験値とよく一致することなどを述べた。

実験は表-1に示すような水路と水理条件で行ない彎曲流が等流状態になつたと思われる $\theta = 135^\circ$ において水面形、流速分布などを測定した。（図-3参照）

II 流速の横断分布

半径 r における接線方向の流速を v とすれば、流れが自由渦であるときは

$$(1) \quad v r = c$$

c は定数

が成り立つ。

しかし、図-1からもわかるように c は定数でなく r によつて変化するようで、広く浅い流れではEinsteinやHardarの考えがよい一致をみせる。すなわち、等流状態の彎曲部では

$$(2) \quad (v/r) \frac{dv}{dr} = cf(r/B) - 1$$

cf は彎曲部のマサツ係数

B は水路の巾

この式を積分して

$$(3) \quad v = K_1 \exp cf(r/B)$$

K_1 は積分定数

を得る。

また図-2からも、流速分布は

$$(4) \quad V = Kr^n$$

表-1 実験水路と水理量

水路長	m	9.0
前直線部	m	2.0
后直線部	m	1.1
曲線部	m	5.9
水路巾	m	0.5
曲率半径	m	1.5
彎曲度	θ	225°
水路床（固定）	mm	d m = 1.20 の砂
流量	l/s	9.6 32.0
水深（直線部）	cm	5.0 10.0
測定断面の位置		$\theta = 135^\circ$
水路勾配		1/400

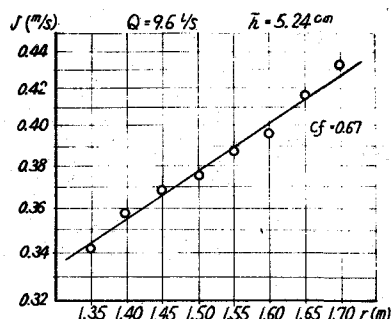


図-1 流速の横断分布

表-2 cf と n の関係

θ	$\bar{h}$	5.24	6.25	10.22
135°	cf	0.670	0.650	0.570
	n	1.01	0.95	0.70
	実測の n	1.00	1.06	0.73
180°	cf	0.731	0.680	0.612
	n	1.15	1.05	0.84
	実測の n	1.10	1.10	0.73

K、n は定数

で近似できそうである。このときnは

$$(5) \quad n = c f (r/B) - 1$$

で表わされるから、厳密にはnはrの関数であるが、水路中心の曲率半径r。との比がそう変化しない範囲では、

$$(5)' \quad n = c f (r_c/B) - 1$$

としてよいであろう。

実験によると $\theta = 135^\circ, 180^\circ$ におけるnとcfの関係は表-2のとおりであつて、広く浅い流れではnはほぼ1に等しく、深くなるにつれて減少する傾向にあるが、自由渦の場合に相当する $n = -1$ にはならない。

Ⅲ 横断水面形

Ⅲ-1 縦断的变化

図-3は、各断面の平均水深をプロットしたものである。水深は彎曲部に入ると次第に増加し、 $\theta = 60^\circ$ で最高となるが、その後やや減少して一様水深が続き彎曲部終端で元の水深に近づく。これから、次のことがいえよう。

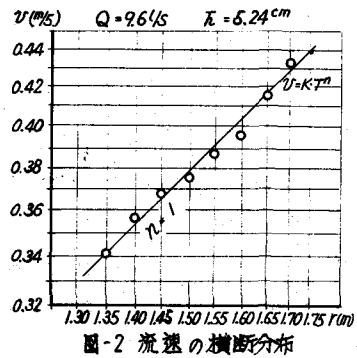


図-2 流速の横断分布

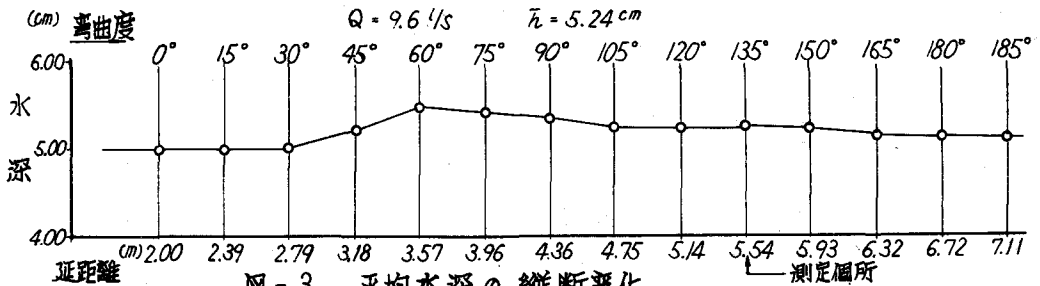


図-3 平均水深の縦断変化

$\theta = 0^\circ \sim 60^\circ$ 彎曲による抵抗増加のため水深は次第に増すが、二次流はまだ発達していないので、流れは自由渦の仮定が成り立つ。

$\theta = 60^\circ \sim 100^\circ$ 次第に二次流が成長する。

$\theta = 100^\circ \sim 150^\circ$ 二次流は充分発達して流れは定常状態となる。

$\theta = 150^\circ \sim 225^\circ$ 下流直線部の影響が現われる。

図-4は $\theta = 60^\circ, 135^\circ$ で測定した水面形と自由渦の仮定によつて求めた水面形を比較したものであつて、ⅡおよびⅢ-1での考えが確かなことを示している。

結局、彎曲部の小な河川や水路の流れを考えると自由渦によつてもよいであろうが、彎曲の大きいものについては二次流の影響を考えに入れなければならない。

III-2 水面形の計算

流速分布が、自由渦と異なると同様に遠心力だけを考へて求めた水面形も実際とはかなり違つてゐる。 $\theta = 60^\circ$ のような箇所での流速の横断分布は、自由渦と同じとしてよいから水面形は

$$(6) \quad g \frac{\partial H}{\partial r} = \frac{v^2}{r} = \frac{c^3}{r^3} \quad c = \bar{v} \sqrt{r^2 - \frac{B^2}{4}}$$

$\bar{v}$ は断面の平均流速

から求められるが、二次流の充分発達したところでは、外壁に沿つて下向きの流れ、内壁に沿つて上向きの流れがあつて、半径方向の水面勾配を減少させる働きを持つ。この流れの流速を w とすれば

$$(7) \quad w \frac{\partial w}{\partial z} = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}$$

であるから、(7)式を積分して $z = H$ で $p = 0$, $w = 0$ という条件を入れると

$$\frac{r}{\rho} = g(H - z) - \frac{1}{2} w^2 \quad \text{すなわち}$$

$$(8) \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = g \frac{\partial H}{\partial r} - w \frac{\partial w}{\partial r}$$

したがつて $\frac{v^2}{r} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = g \frac{\partial H}{\partial r} - w \frac{\partial w}{\partial r}$ から

$$(9) \quad g \frac{\partial H}{\partial r} = \frac{v^2}{r} + w \frac{\partial w}{\partial r}$$

となり、これが二次流の垂直流を考えた式である。ここで w と $\partial w / \partial r$ は互いに逆の符号をもつものであり、 w の境界層厚を β 、二次流の境界層厚を δ 、 δ 内の流速を u とすれば

$\delta u = \beta w$ でなければならないから

$$(10) \quad w \frac{\partial w}{\partial r} = -\frac{\delta}{\beta} u \cdot \frac{\delta}{\beta^2} u = -\frac{\delta^3}{\beta^3} \cdot \frac{u^2}{\delta} = -\alpha \frac{u^2}{\delta} u$$

さらに、主流の半径方向の流速を U とおくと $u = U h / \delta$ としてよいから

$$(11) \quad w \frac{\partial w}{\partial r} = -\alpha \frac{h^2}{\delta^3} U^2 \quad \text{であり、流れは等流であるから}$$

$$g \cdot s = \frac{U}{r} \frac{\partial (v \cdot r)}{\partial r} \quad \text{すなわち} \quad (12) \quad U = \frac{g \cdot s \cdot r}{\partial (v \cdot r) / \partial r}$$

であり、前述のように $v = K r^n$ 、 $n = 1$ としてよいから

$$(13) \quad w \frac{\partial w}{\partial r} = -\alpha \frac{h^2}{\delta^3} \left(\frac{g^2 s^2 r^2}{K^2 (n+1)^2 r^{2n}} \right) = -\alpha \frac{h^2}{\delta^3} \frac{g^2 s^2}{4 K^2}$$

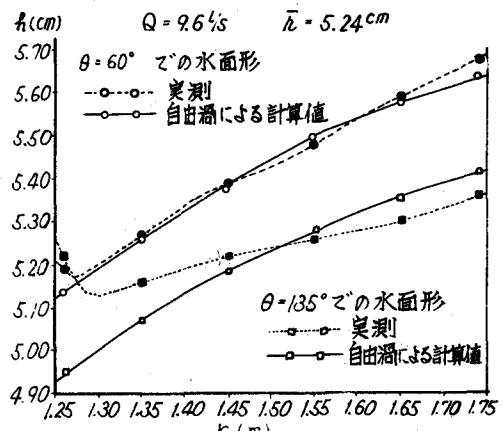


図-4 横断水面形の変化

s は河床勾配

故に水面形は平均値を用いると(9)は次のようになる。

$$(14) \quad g \frac{\partial H}{\partial r} = K^2 r - \alpha \frac{g^2 s^2}{4 K^2} \left(\frac{\bar{h}}{\sigma} \right)^3 \frac{1}{h}$$

また近似的に平均水深が水路の中央に生ずると仮定すると次式で求められる

$$(14') \quad h = \bar{h} + \frac{K^2 (r^2 - r_c^2)}{2g} - \frac{\alpha^2 s^2}{4 K^2 g} \left(\frac{\bar{h}}{\sigma} \right)^3 \frac{1}{h} (r - r_c)$$

図-5、6は(14')より求めた水面形と実測とを比較したものでよい一致をみせている。

IV 彎曲部の境界層

流速の横断分布が $v_m = K r$ で表わされ、境界層内では図-7のように半径方向(r)に u 、接線方向(θ)になる流速があつて、それぞれの流れの逆方向に τ_r 、 τ_θ なるマサツ力が働いていると考えたと運動の式は

$$(15) \quad u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v^2}{r} = R - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r}$$

$$(16) \quad u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u \cdot v}{r} = \theta - \frac{1}{\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta}$$

連続の式は

$$(17) \quad \frac{\partial (u \cdot r)}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial \theta} = 0$$

(15)(16)(17)から運動量の式を導くと次のような基本式をうる。

$$(18) \quad \frac{d}{dr} \int_0^\delta u^2 r dz - \int_0^\delta v^2 dz = \frac{\tau_r}{\rho} r - v_m^2 \delta$$

$$(19) \quad \frac{d}{dr} (r^2 \int_0^\delta u v dz - r v_m \frac{d}{dr} (r \int_0^\delta u dz)) = \frac{\tau_r}{\rho} r^2 - g s \delta r^2$$

境界層内の流速分布がブラシウス (Blasius) の $1/7$

乗法則にしたがうものとすれば

$$(20) \quad v = v_m (z/\delta)^{1/7}$$

$$(21) \quad u = u_0 (z/\delta)^{1/7} (1 - z/\delta)$$

$$(22) \quad \tau_r = 0.0225 \rho \left(\frac{v}{\delta} \right)^{1/4} v_m^{3/4} u$$

$$(23) \quad \tau_\theta = 0.0225 \rho \left(\frac{v}{\delta} \right)^{1/4} v_m^{1/4}$$

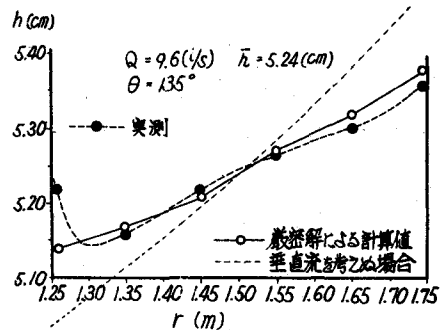


図-5 比較的浅い流れの水面形

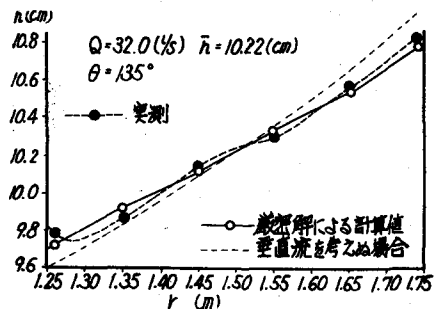


図-6 比較的深い流れの水面形

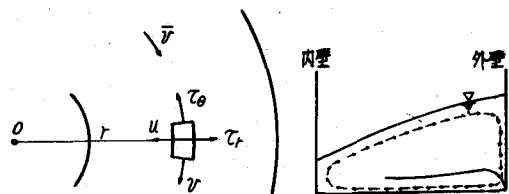


図-7 彎曲部の流れ

$$(24) \quad \begin{cases} \int_0^\delta u^2 r \, dZ = 0.2071 r u_0^2 \delta & \int_0^\delta v^2 dZ = 0.7778 v_m Z \delta \\ \int_0^\delta u u' v dZ = 0.3403 u_0 v_m \delta & \int_0^\delta u dZ = 0.4083 u_0 \delta \end{cases}$$

であり、 U を主流の半径方向の分速度とすれば

$$U \frac{\partial v_m}{\partial r} + \frac{U v_m}{r} m = gS \quad \text{すなわち} \quad (25) \quad gS = \frac{U}{r} \frac{\partial (v_m r)}{\partial r}$$

また $U(h-\delta) = \int_0^\delta u dZ = 0.4083 u_0 \delta$ から $U = 0.4083 \frac{\delta}{h-\delta} u_0$ であるから

$$(26) \quad g \cdot S = \frac{A' u_0}{r} \frac{\partial (v_m r)}{\partial r} \quad (27) \quad gS \delta r^2 = A' u_0 \delta r \frac{\partial (v_m r)}{\partial r} \text{ を得る。}$$

(22) (23) (24) (27) を(18) (19)に代入すると基本式は次のように帰着する。

$$(28) \quad 0.2071 \frac{\partial (u_0^2 \delta r)}{\partial r} + 0.2222 v_m^2 \delta = 0.0225 (\nu / \delta)^{1/4} v_m^{3/4} r$$

$$(29) \quad 0.3403 \frac{\partial (u_0 \delta v_m r^2)}{\partial r} - 0.4083 u_0 r \frac{\partial (u_0 \delta r)}{\partial r} = 0.0225 (\nu / \delta)^{1/4} v_m^{4/7} r - A' u_0 \delta r \frac{\partial (v_m r)}{\partial r}$$

(28) (29) に $v_m = Kr^n$ 、 $u_0 \delta = \Phi$ 、 $\delta^{1/4} = d$ を入れると

$$(30) \quad 0.2071 (\Phi^2 d + 2\Phi \Phi' d - 4r \Phi^2 d') + 0.2222 K^2 r^{2n} d^9 = 0.0225 \nu^{1/4} K^{3/4} r^{3/4} \Phi r$$

$$(31) \quad \Phi^2 d - 4\Phi^2 d' r + 2\Phi \Phi' d r + 1.0730 K^2 r^{2n} d^9 = 0.1086 \nu^{1/4} K^{3/4} r^{3/4} \Phi^{n+1}$$

さらに $x = 1 - r/b$ (b は外壁の曲率半径)とおいて変数を x に換え、 $A = \frac{A'}{0.3043}$ とすると

$$(32) \quad \Phi^2 d + 4(1-x) \Phi^2 d' - 2(1-x) \Phi \Phi' d + 1.0730 K^2 b^{2n} (1-x)^{2n} d^9 = 0.1086 \nu^{1/4} K^{3/4} b^{3/4} \Phi^{n+1} \left(1 - \frac{3n+4}{4} x + \frac{(4n+1)3/4n}{2} x^2 + \dots \right)$$

$$(33) \quad (n+0.8) \Phi d + 0.2000 (1-x) \Phi d + A(n+1) \Phi d = 0.0662 \nu^{1/4} K^{3/4} b^{3/4} \Phi \left(1 - \frac{5n+4}{4} x + \frac{(3n+1)3/4n}{2} x^2 + \dots \right)$$

$$(34) \quad \begin{cases} \Phi = xP (C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \dots) \\ d = xq (d_0 - d_1 x + d_2 x^2 + d_3 x^3 + \dots) \end{cases} \quad \text{とおくと} \quad \text{式中のべきが等しいという条}$$

件から(35) $P = 9/10$ 、 $q = 1/10$ を得る。ここで $n=1$ と

して(34)(35)を(32)(33)に入れて、未定係数法により係数を二次の項

まで求めると

$$(36) \quad \begin{cases} \Phi = x^{9/10} \{ 0.4287 - 0.9937 (1.8885 + 2A)x + (4.8530 + 12.1124A + 7.4292A^2)x^2 + \dots \} \\ d = x^{1/10} \{ 0.8568 - 0.5668 (1.8985 + 2A)x + (0.8440 + 3.0342A + 2.2733A^2)x^2 + \dots \} \end{cases}$$

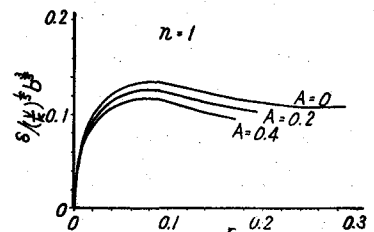


図-8 境界層の厚さ

$$x^2 + \dots\dots\dots \}$$

また (36) 式の { } を夫々 $\varphi(A)$, $D(A)$ とおくと

$$(37) \quad \delta = \left(\frac{\nu}{K} \right)^{\frac{1}{5}} b^{\frac{8}{5}} x^{\frac{7}{5}} \varphi(A)$$

$$(38) \quad u_0 = K b x \psi A / D(A)$$

$$(39) \quad \tau_\theta = 0.0225 \rho \mu^{\frac{1}{4}} b^{\frac{8}{5}} K^{\frac{9}{5}} x^{\frac{7}{5}} (1-x)^{\frac{1}{5}} \varphi(A)^{\frac{1}{4}} D(A)^{\frac{1}{4}}$$

$$(40) \quad \tau_r = 0.0225 \rho \mu^{\frac{1}{4}} b^{\frac{8}{5}} K^{\frac{9}{5}} (1-x)^{\frac{7}{5}} x^{\frac{1}{5}} D(A)$$

$$(41) \quad u_* = \sqrt{\frac{(\tau_r^2 + \tau_\theta^2)^{1/2}}{\rho}}$$

が得られる。

図-8, 9, 10 は (37) (38) (41) の計算結果である。

図-11, 12 は垂直流速分布および境界層の厚さを実測と比較したものでいづれもよく適合している。

V むすび

以上の考察から次のことがいえよう。

1 等流状態の彎曲流の横断流速分布は、自由渦の仮定に

したがわず、 $v = K_1 \exp cf(r/B)$ もしくはその近似式として、 $v = Kr^{\frac{1}{2}}$ にしたがう。またこれらの間には $n = c.f(r/B) - 1$ なる関係があり、本実験での広く浅い流入では $n = 1$ であつた。

2 二次流の影響すなわち底面の境界層厚 δ と側壁の境界層厚 β の比を考慮することにより横断水面形の計算式を見出し、実測とよい一致を見た。

本実験では $\beta/\alpha = 2 \sim 3$ であつた。

3 境界層については、

厚さ δ は外壁より川巾の 5~10% までは急激にますが、その後やや減少し、20% 以上では殆んど変化しない。

u_0 は内壁に向つて増加する。これは、内側ほど流れの振れが大きいことを示している。

まさつ速度は、川巾の 5~10% までは大きい、あとは次第に減少する。

4 δ , u_0 , v , u_* などの計算に当り、水面勾配の項の係数 A の影響は大きく、この値の推定は重視される。本実験では $A < 0.4$ であつた。

また図-8~11 は $A=0$ の場合を除き x の 2 次項までの計算結果であるため $x < 0.2$ の範囲では比較的よい近似を示すが、 x の大きな部分を明らかにするためにはより高次の項の係数まで求めねばならない。

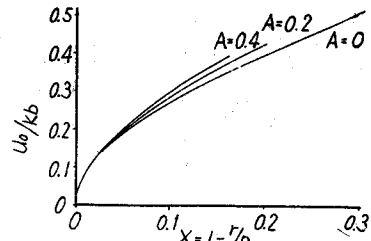


図-9 u_0 の計算値

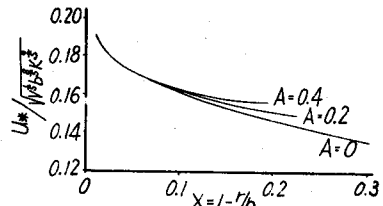


図-10 マサツ速度

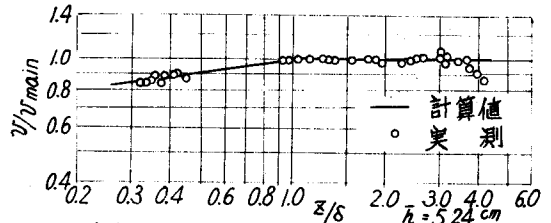


図-11 流速の垂直分布 $Q=9.6 \text{ l/s}$ $\theta=135^\circ$

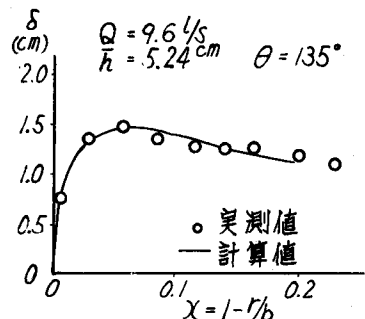


図-12 δ の比較