

北海道大学工学部 柏 村 正 和  
同 八 鉄 功

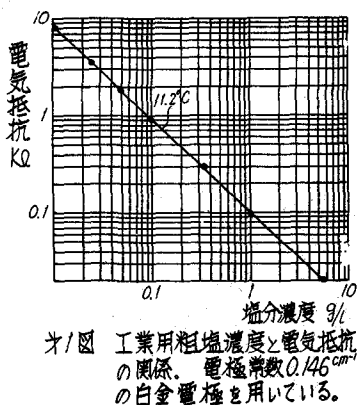
## 1 序

乱流は河川にかぎらず一般に水路を流れる水分子の交換混合をもたらすが、鉛直方向の交換は従来測定や理論的研究がよく行なわれている。これに反し縦方向の交換については比較的研究が少ないようである。しかしこの縦拡散は河川や水路の性質に重要な意味を持つているものであつて、たとえば上流における廃棄物が流下と共にどのように水中で稀釈されるかという問題や縦拡散が河川の水温分布にどのような影響を与えるかという問題と直接につながるものである。ここに筆者等が行なつた塩水法<sup>1)</sup>、あるいは水温の連続測定から実際の河川における縦方向の乱流拡散係数を求めた方法を発表しあわせてその実測値を紹介したいと思う。

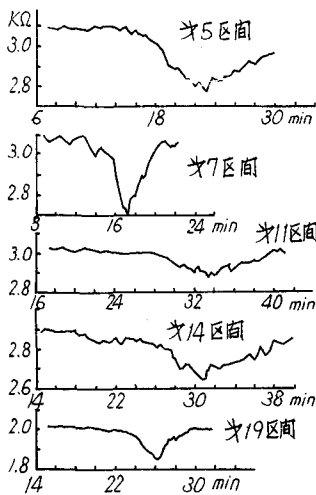
## 2. 塩水法による縦方向の乱流拡散係数の測定

まず塩水法について述べよう。この方法は実験水路や閉管又は小規模の水路では以前から使用されている方法である。<sup>2) 3)</sup> 河川の水塊の流達時間を求めるために昭和31年に北海道電力株式会社は自然河川ではおそらく初めての試みと思われる塩水法を採用した。<sup>4)</sup> 筆者の一人がその測定を担当したのであるがそのあらましはつぎのとおりである。北海道空知川の中流域延長4.5kmを各区1~4

kmの19区間に分割し各区间ごとに塩水の流下速度を求めるのであるが各区间では上流端で4.0~20.0 kgの工業用粗塩を水に溶解して準備しある時刻に一度に川の流心部に注ぎこみその時刻を基準にして下流端では刻々の塩分濃度を測定する。塩分は川の縦方向の拡散によつて流れの方向に拡がり下流端で測定した塩分濃度と時間の関係を示すグラフは一つの極大点を持つ曲線となるので塩分濃度の極大点を示す時刻から川水の平均流達所要時間を求めることができるのである。この考え方では別に塩水を用いる必要はないので染料でもよいのであるが塩水を用いる場合にはとくに川水の電気抵抗を測定することにより容易に、しかも高い精度で塩分濃度の変化を測定できる大きな利点があつてそのために塩水を使用するわけである(第1図参照)。電気抵抗の測定に筆者等はKohlrausch's bridgeと白金電極の組み合わせによつてこれを行なつている。実際の測定結果の数例を第2図に示すことにしよう。第2図の如き実測結果と理論的考察とから川の縦方向の乱流拡散係数が求まるのである。ここで縦方



より容易に、しかも高い精度で塩分濃度の変化を測定できる大きな利点があつてそのために塩水を使用するわけである(第1図参照)。電気抵抗の測定に筆者等はKohlrausch's bridgeと白金電極の組み合わせによつてこれを行なつている。実際の測定結果の数例を第2図に示すことにしよう。第2図の如き実測結果と理論的考察とから川の縦方向の乱流拡散係数が求まるのである。ここで縦方



★2図 1961.11月6~10日に  
空知川で測定した5の  
数例。

向の拡散についての理論考察を行なつてみよう。

理想的状態として川を水路様な定常等流と仮定し、塩分濃度を  $C$ 、縦の乱流拡散係数を  $\eta$ 、平均流速を  $v$ 、流下方向を  $x$  軸、時間を  $t$  とすれば拡散の方程式として次式を得る。

$$\frac{\partial C}{\partial t} + v \frac{\partial C}{\partial x} = \eta \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad (1)$$

さらに川の流量を  $Q$ 、塩水投入点と塩分検出地点との距離を  $x_0$ 、投入した塩の質量を  $S$ 、平均流達時間を  $t_0$  としつぎの変換

$$C / \frac{S}{Q t_0} = C^*, \quad t / t_0 = \tau, \quad x / v t_0 - t / t_0 = \xi,$$

$$\eta / v x_0 = \eta^*$$

を行なえば(1)は簡単に無次元の拡散の方程式

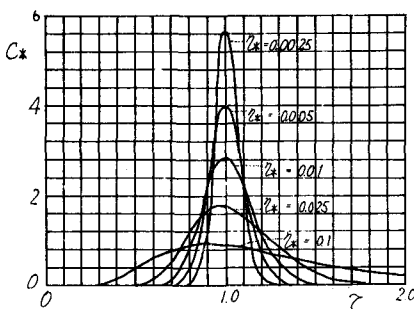
$$\frac{\partial C^*}{\partial \tau} = \eta^* \frac{\partial^2 C^*}{\partial \xi^2} \quad (2)$$

となる。(2)の解は熱伝導や拡散の問題でよく知られているように

$$C^* = \int_0^\infty d\mu \int_{-\infty}^\infty K(\lambda) e^{-\mu^2 \eta^* \tau} \cos[\mu(\xi - \lambda)] d\lambda \quad (3)$$

又初期、境界条件として塩水の投入条件に合わせて、微小な量  $\varepsilon (>0)$  を考え、 $t=0$ 、 $x=0$  で川の長さ  $z \in$  にわたり濃度無次元値  $C^*$  を一定値  $C^*_{*0}$ 、その他の部分で0とすれば

$$\tau = 0, 1 \leq \xi \leq \frac{\varepsilon}{x_0} \text{ で } C^*(\xi, \tau) = 0, \quad \tau = 0, \quad 1 \leq \xi \leq \frac{\varepsilon}{x_0} \text{ で } C^*(\xi, \tau) = C^*_{*0} \quad (4)$$



★3図  $C^*$  と  $\xi$  の関係を表す理論曲線

を得る。 $\tau=0$  で(3)は

$$C^*(\xi, 0) = \int_0^\infty d\mu \int_{-\infty}^\infty K(\lambda) \cos[\mu(\xi - \lambda)] d\lambda \quad (5)$$

となるが一般に Fourier 余弦積分

$$C^*(\xi, 0) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\mu \int_{-\infty}^\infty C^*(\lambda, 0) \cos[\mu(\xi - \lambda)] d\lambda \quad (6)$$

が成り立つからこれを(5)と比較することによつて

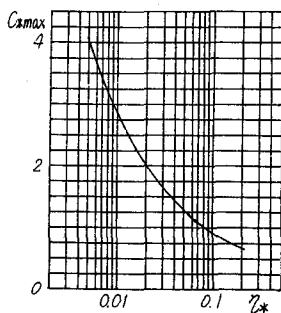
$$K(\lambda) = \frac{1}{\pi} C^*(\lambda, 0) \quad (7)$$

なる関係が得られ、従つて(3)は

$$C^*(\xi, \tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\mu \int_{-\infty}^\infty C^*(\lambda, 0) e^{-\mu^2 \eta^* \tau} \cos[\mu(\xi - \lambda)] d\lambda$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi\eta_*\tau}} \int_0^\infty \frac{C^*(\lambda, 0)}{2\epsilon C} e^{-\frac{(\xi-\lambda)^2}{4\eta_*\tau\lambda}} d\lambda \quad (8) \text{となる。これに(4)の条件を入れることによつて}$$

$$C^*(\xi, \tau) = \frac{2\epsilon C}{x_0 \sqrt{4\pi\eta_*\tau}} e^{-\frac{\xi^2}{4\eta_*\tau}} \quad (9) \text{を得る。又川の断面積を } a \text{ とすると}$$



才4図 濃度極大値と縦方向拡散係数との無次元化された関係を示す理論曲線

$$C^*_{0.} = \frac{S}{2\epsilon a} \bigg/ \frac{S}{Q t_0}, \quad Q = v a, \quad X_0 = U t_0$$

などが成りたつから(9)式は

$$C^*(\xi, \tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\eta_*\tau}} e^{-\frac{\xi^2}{4\eta_*\tau}} \quad (10)$$

となりこれが濃度を与える式であるが、さらに検出地点における測定濃度と時間の関係はその地点で

$$\xi = 1 - \tau \quad (11) \quad \text{が成りたつことにより}$$

$$C^*(\tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\eta_*\tau}} e^{-\frac{(1-\tau)^2}{4\eta_*\tau}} \quad (12)$$

で与えられることになる。これが測定結果のグラフを無次元化した理論式であり図に示すと $\eta_*$ の各値に対して才3図の

とおりになる。才3図に見られるように $C^*$ の極大値は $\tau < 1$ でおこり、 $\eta_*$ が大きくなるとますます1から遠ざかり0に近づく。すなわち無次元化した拡散係数が大きければ検出塩分濃度の極大は平均流達時刻より早く起こることになり、この点は塩水法で流達時間を求める際によく注意する必要がある。 $C^*$ が極大になるときの $\tau$ は

$$\tau = \sqrt{\eta_*^2 + 1} - \eta_* \quad (13) \text{で与えられる。ただし無次元化された拡散係数 } \eta_* \text{ は実際の}$$

河川ではかなり小さいものであるので極大濃度の時刻をそのまま平均流達時間としてもそれほど大きな誤りはない。さて才2図のような実測グラフと才3図の理論曲線とを比較して $\eta_*$ を決め、拡散係数 $\eta$ を求めることができるが才2図の電気抵抗曲線を塩分濃度曲線に変え、さらにそれを無次元化して理論曲線との適合度の最もよい $\eta_*$ を求めるのはいかにも操作が煩雑なので別の方法を行

才1表 実測結果(空知川、昭31. 11)

なつた。すなわち測定した電気抵抗の極値から直接 $C^*$ の極値に換算して $\eta_*$ を求め $\eta$ を得る方法である。(12)から $C^*$ の極大値 $C^*_{max}$ と $\eta_*$ との関係は次式で与えられる。

$$C^*_{max} = \frac{\exp\left\{-\frac{\sqrt{\eta_*^2 + 1 - 1}}{2\eta_*}\right\}}{\sqrt{4\pi\eta_*}(\sqrt{\eta_*^2 + 1 - \eta_*})} \quad (14)$$

この曲線は才4図で与えられる。電気抵抗の極値から $C^*_{max}$ を求めれば図上でただちに $\eta_*$ が得られる。筆者はこの方法で空知川の19の

| 区間 | 区間距離 | 塩量  | 流量                | $t_0$           | $C^*_{max}$ | $\eta_*$         | $\eta$            |
|----|------|-----|-------------------|-----------------|-------------|------------------|-------------------|
| %1 | km   | kg  | m <sup>3</sup> /s | $\times 10^3$ s |             | $\times 10^{-2}$ | $\times 10^6$ CGS |
| 1  | 1.40 | 80  | 3.6               | 1.83            | 1.60        | 3.10             | 3.35              |
| 2  | 0.85 | 40  | 0.6               | 8.00            | 0.85        | 1.70             | 1.09              |
| 3  | 1.40 | 80  | 60.3              | 1.16            | 2.94        | 0.94             | 1.59              |
| 4  | 1.40 | 80  | 60.3              | 1.17            | 3.35        | 0.72             | 1.21              |
| 5  | 1.70 | 120 | 60.3              | 1.36            | 2.28        | 1.54             | 3.30              |
| 6  | 2.70 | 120 | 60.3              | 1.86            | 2.45        | 1.32             | 4.42              |
| 7  | 1.50 | 120 | 60.6              | 1.05            | 2.13        | 1.78             | 3.94              |
| 8  | 3.20 | 160 | 59.4              | 2.10            | 2.59        | 1.18             | 5.85              |
| 9  | 4.00 | 160 | 60.6              | 3.84            | 3.39        | 0.69             | 2.92              |
| 10 | 3.40 | 120 | 64.1              | 2.16            | 3.69        | 0.58             | 3.12              |
| 11 | 3.50 | 80  | 67.9              | 2.04            | 2.85        | 0.99             | 6.20              |
| 12 | 2.00 | 80  | 69.6              | 1.71            | 2.99        | 0.90             | 2.15              |
| 13 | 4.25 | 140 | 70.1              | 3.90            | 3.24        | 0.76             | 3.81              |
| 14 | 2.50 | 120 | 54.9              | 1.86            | 2.34        | 1.45             | 4.85              |
| 15 | 3.00 | 120 | 63.4              | 3.00            | 3.10        | 0.84             | 2.58              |
| 16 | 2.90 | 160 | 69.9              | 2.08            | 3.49        | 0.65             | 2.64              |
| 17 | 4.00 | 200 | 69.9              | 4.00            | 3.03        | 0.86             | 3.44              |
| 18 | 2.80 | 200 | 70.9              | 2.10            | 2.59        | 1.18             | 4.25              |
| 19 | 1.74 | 200 | 71.4              | 1.56            | 2.19        | 1.69             | 3.30              |

測定区間における縦方向乱流拡散係数を才1表の如く求めることができた。

このように空知川の如き比較的小さな河川の縦方向乱流拡散係数は  $(1 \sim 6) \times 10^5 \text{ CGS}$  の程度におさまることが測定できた。もちろんこの値は流量によつて、さらに又河川の規模によつてかなり異なる値が期待されるが一つの実測例としてここに示すものである。

### 3. 水温日変化から縦方向の乱流拡散係数をもとめる方法

河川の下流部などで流量が多く川巾が広い場合には多量の塩水を要し、また河水の汚染等のため塩水到達時の電気抵抗の変化が少いので塩水法を用いることは困難である。しかしこのような場合には次に述べるように河川の2地点で水温日変化お

よび平均流速を測定すれば、その振巾の減衰から2地点間における縦方向の乱流拡散係数の平均値をもとめることが出来る。

流量が多く、水深が深い流れでは流水の熱容量が大きいので、河水は外界の熱的影響を受けにくく、熱量はもつぱら水塊によつて運ばれる。<sup>5)</sup> 従つて水温日変化の方程式は水温を  $\theta$ 、縦方向の乱流拡散係数を  $\eta$ 、平均流速を  $v$  とすれば、外界から河水に与えられる熱量を無視して

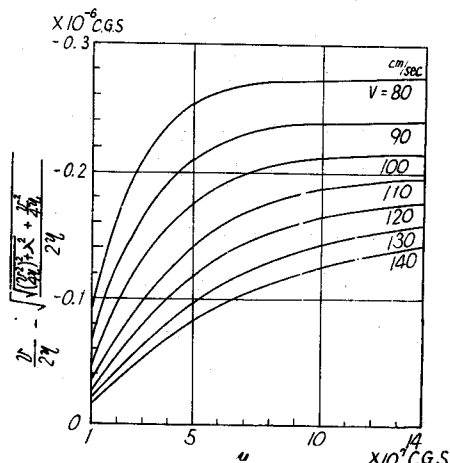
$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + v \frac{\partial \theta}{\partial x} = \eta \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad (15)$$

によつてあらわされる。<sup>6)</sup> ここに  $x$  は河水の流下方向、 $t$  は時間をあらわし、横断面内では流れに直角な方向の乱流交換作用により河水の混合が行われるので水温は一定としたがこれは実測の結果とも一致する。いま水温日変化が正弦関数であらわされるものとし、ある地点 ( $x=0$ ) における日平均水温を  $\theta_0$ 、振巾を  $\Theta_0$  とし、且  $\sigma = \frac{2\pi}{24} (1/\text{hr})$  とすれば  $\theta(x=0) = \theta_0 + \Theta_0 e^{i\sigma t}$  となるから、この境界条件を用いて方程式(15)を解けば、任意の地点  $x$  における水温  $\theta$  は次の式によつて与えられる。

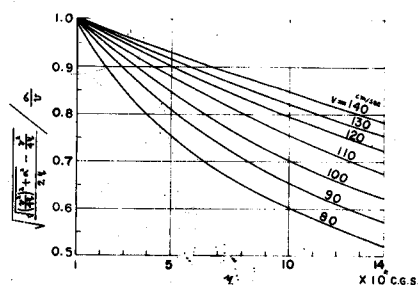
$$\theta = \theta_0 + \Theta_0 e^{\left\{ \frac{v}{2\eta} \sqrt{\frac{v^2}{(4\eta)^2} + \sigma^2 + \frac{v^2}{4\eta}} \right\} x} \times \cos \left\{ \sigma t - \sqrt{\frac{v^2}{(4\eta)^2} + \sigma^2 - \frac{v^2}{4\eta}} x \right\} \quad (16)$$

すなわち日平均水温は地点 ( $x=0$ ) と同じであるが、振巾は河水の流下とともに減衰し、水温日変化の位相は河水の流下につれてだんだんおくれれて行くことが分る。

いま一例として平均流速  $v$  が 80, 90, 100, 110, 120, 130, 140 cm/sec なるときの  $\eta$  と



才 5 図 (1)



才 5 図 (2)

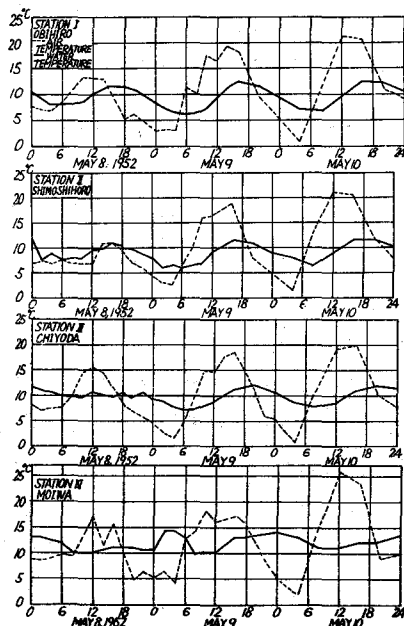
$$\text{振巾減衰係数} \left( \frac{v}{2\eta} - \sqrt{\left( \frac{v}{4\eta} \right)^2 + \sigma^2} + \frac{v}{4\eta} \right)^{\frac{2\eta}{v}}$$

との関係を(10)式を用いて計算した結果を才5図(1)に示す。また才5図(2)には地点( $x=0$ )における水温日変化の位相をおくれ

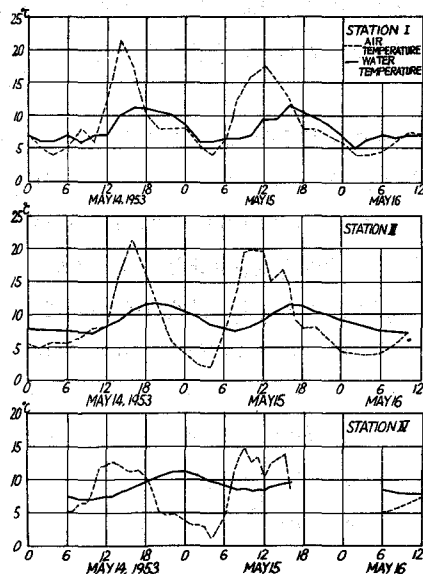
$$\sqrt{\left( \frac{v}{4\eta} \right)^2 + \sigma^2} - \frac{v}{4\eta} \times \frac{x}{\sigma}$$

と距離 $x$ を水塊が流下するに要する時間 $\frac{x}{v}$ との比と $\eta$ との関係を示したものである。図によつて明らかなように、ある平均流速に対し $\eta$ が大きいときは減衰係数は一定の値が近づくが、 $\eta$ が小さくなると減衰係数は急激に小さくなって水温日変化の振巾はほとんど一定となり、位相のおくれは河水の流下に要した時間にひとしくなる。

ある河川の2地点で水温日変化および平均流速を測定すれば、才5図を用いてその地点間の $\eta$ の平均値をもとめることが出来る。才6図(1)は1952年5月8日から10日までの3日間十勝川の帯広(測点I)、茂岩(測点IV)間の4地点で測定した水温および気温の日変化を示したものであり、また才6図(2)は1953年5月14日から16日までの3日間、同区間の3地点で同様の観測をした結果である。いずれの場合も平均流速をも測定したので、この測定の結果から上に述べた方法によつて十勝川中流部における縦方向の乱流拡散係数をもとめる。水温日変化の振巾としては一日の最高水温と最低水温の差の $\frac{1}{2}$ をとり、2測点における振巾の比から振巾減衰係数を出し、その区間の平均流速は2測点の平均流速の平均値をとつて、才5図(1)からその区間の $\eta$ をもとめた。また位相差比はこの $\eta$ と $v$ に相当する値を才5図(2)からもとめたものである。結果は平均流速および流量とともに才2表に示してあるが、表によれば、1952年5月9日には流速の早い測点II~III間では測点III~IV間よりも $\eta$ の値が大きくなつており、また1952年5月9日と1953年5月14日とを比較すれば、同一の区間(測点III~IV間)においても後者の方が流速も早く、 $\eta$ も前者の2倍近い値となつてゐる。これは1953年5月の観測



才6図(1)



才6図(2)

期間には降雨による融雪水のため、流量が前者の場合の

第 2 表

| 観測月日       | 区間              | 平均流速<br>(m/sec) | 流 量<br>(m <sup>3</sup> /sec) | $\frac{v}{2\eta} \sqrt{\frac{(\frac{v^2}{4\eta} + \sigma^2 + \frac{v^2}{4\eta})}{(CGS) 2\eta}}$ | $\frac{\eta}{(CGS)}$ | $\frac{(\frac{v^2}{4\eta} + \sigma^2 + \frac{v^2}{4\eta})}{2\eta} \frac{v^2/\sigma}{v}$ |
|------------|-----------------|-----------------|------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------|
| 1952年5月 9日 | 測点Ⅱ～Ⅲ (10.2 km) | 1.41            | 210                          | $-0.93 \times 10^{-7}$                                                                          | $5.8 \times 10^7$    | 0.92                                                                                    |
| 1952年5月 9日 | 測点Ⅲ～Ⅳ (17.0 km) | 1.05            | 217                          | $-0.75 \times 10^{-7}$                                                                          | $1.8 \times 10^7$    | 0.97                                                                                    |
| 1953年5月14日 | 測点Ⅲ～Ⅳ (17.0 km) | 1.27            | 406                          | $-0.68 \times 10^{-7}$                                                                          | $3.1 \times 10^7$    | 0.98                                                                                    |

2 倍にも増大し、流れの状況が全く異つていたため、これによつても  $\eta$  が流路や流れの複雑な関数であることが分る。また位相差比はいずれの場合も 1 に近い値を示しており、2 地点間の水温日変化の位相のずれはほとんどその区間を河水が流下するに要する時間にひとしいことになる。

4. 結 語

2 で塩水法によつて河川の縦方向の乱流拡散係数  $\eta$  をもとめる方法を述べ、また 3 では流量の大きな河川で水温日変化および平均流速の測定値から  $\eta$  をもとめる方法について述べたのであるが、それぞれの方法によつて実測した空知川および十勝川の縦方向の乱流拡散係数を比較すると、空知川中流部では  $(1 \sim 6) \times 10^5$  CGS、十勝川中流部では  $(1.8 \sim 5.8) \times 10^7$  CGS で、後者は前者の約  $10^2$  倍の値となつている。実測の結果によれば空知川では流量  $70 \text{ m}^3/\text{sec}$ 、川巾  $20 \sim 50 \text{ m}$ 、水深  $2 \text{ m}$  程度であり、一方十勝川は流量  $200 \text{ m}^3/\text{sec}$ 、川巾  $60 \sim 100 \text{ m}$ 、水深  $2 \text{ m}$  程の大河川で、後者の  $Scale$  が前者よりはるかに大きいことから両者の乱流拡散係数の相異が理解出来る。

従来自然河川の縦方向の乱流拡散係数は測定のみずかしい量とされ、その実測はほとんど行なわれていなかったが上記の如く 2 つの方法によつて実際の測定が可能であることを示した。

終りにのぞみ本研究に対し絶えず御指導ならびに御激励をいただいた北海道大学工学部福島久雄教授に深い感謝の意を表するものである。

文 献

- 1) 柏村正和：空知川の縦の乱流拡散について、北大地球物理研究報告 才 5 号，1957.
- 2) CH, M. Allen and E. A. Taylor: The salt velocity method of water measurement, Trans. ASME, Vol. 45, 1923
- 3) 池谷武雄：流量測定法 OHM 文庫.
- 4) 空知川流下時間の研究 (その 1, 2, 3)、北海道電力株式会社土木部計画課、昭和 32 年 1 月.
- 5) I. Yakuwa: Phase of the diurnal variation of water temperature of a river, Memo Eng. Hokkaido Univ., Vol. 11, 1960.
- 6) I. Yakuwa: The longitudinal turbulent motion of a river flow and its role on the diurnal variation of water temperature, Memo. Eng. Hokkaido Univ., Vol. 11, 1962.