

(c-1) 固体粒子を含んだ流れの乱流構造の変化(特に中立浮遊粒子の場合)

電力中央研究所 日 野 幹 雄

1. 序 : 土砂浮遊流の抵抗損失に対する影響は、二つの相反する要素の作用によつてゐる。一つは、底地形の変化によるもので、他は流速分布の変化による抵抗減少である。土砂を多量に運搬する洪水時には、まず水路底面に砂連が発生して粗度を増加させる。流速の増加とともに砂連も発達するが、ある流速以上になると砂連は消滅に向い、粗度は逆に減少する。土砂流の流速分布の変化 — すなわち Karman const. の減少 — は、V. A. Vanoni (1944) によつて実験的にはじめて明らかにされ、その後 H. M. Ismail (1951), V. A. Vanoni and G. N. Nomicos (1959) らによつて実験が繰り返えされた。我国では、この Karman const. の変化について、室田氏(1953)・椿氏(1955)・志村氏(1957) の理論的研究が行われて来た。

椿氏は、渦の強さや大きさが変化しても渦の寿命時間は不変であるという H. Lettau (1949) や Y. Ogura (1952) ら気象学者の仮説と乱れのエネルギー方程式から出発し、また志村氏は大胆に、固体粒子の浮遊によつても一次的には乱れの強さは変化しないという仮説を立て、同じくエネルギー方程式から出発して、ともに Karman const. の変化を与える理論式を導いた。これらの理論は、土砂粒子を流れが浮遊させるためのエネルギーの増加分を、乱れが平均流からうばうために流速分布の勾配が急にしなければならないことを説明しようとするものであつた。

H. A. Einstein and N. Chien (1952) や Vanoni and Nomicos (1959) らも同様の思想から、土砂粒子を浮遊させるためのエネルギー $P_p = \{(\rho_p - \rho_0)/\rho_p\} \bar{c} v_p h (\rho_p = \text{粒子の単位体積質量; } \rho_0 = \text{水の密度; } \bar{c} = \text{断面平均土砂濃度; } v_p = \text{土粒子の沈降速度; } h = \text{水深})$ と流れの失う単位時間あたりの平均エネルギー $P_f = \rho_0 h U I (U = \text{断面平均流速, } I = \text{水路の底勾配})$ との比 $P_p/P_f = (r-1) \bar{c} v_p / \rho_0 U_p g I$ と Karman const. の間に一定の関係があることを予想し、実験的にこの解釈の正しいことを明らかにした。

また、乱れの強さに関しては、志村氏(1957) が第一次的には不変であると仮定した以外は、他の研究者達はすべて、乱れのエネルギーが土砂浮遊のために消費され、したがつて乱れの強さは減衰するであろうと考えた。

ところで、最近に到つて C. Elata and A. T. Ippen (1961) は、こうした解釈に一つの疑問を提出した。すなわち、これ迄の理論や解釈では、比重が1に等しい粒子が浮遊する水流では、流速分布や乱れの強さに変化がないことになるが、はたしてそうであろうかと考え、一連の実験を行い、その結論として①中立浮遊粒子によつても Karman const. は減少すること、②さらに驚くべきことに乱れの強さが増加することを明らかにした。

この論文は、これ迄の理論が固体粒子を浮遊させることによつて与える影響のうち、粒子浮遊のエネルギー増加のみしか考慮していない点を指摘し、さらに粒子による乱れの逸散の有効体積の減少、粒子の回転や粒子と水との相対運動によるエネルギーの逸散の増加をも考えて、エネルギー方程式を新に導き、このエネルギー平衡方程式と乱れの加速度平衡方程式から、乱流構造の変化を示す理論式

を与え、この特別な場合として中立浮遊粒子に関する Elata and Ippen(1961) の実験と比較して、理論の妥当性を明らかにした。

2. 理 論

a. 粒子を浮遊した水流のエネルギー方程式：主流の方向に x 軸、底面に垂直に y 軸、 $x-y$ 面に垂直に z 軸をとる。それぞれの方向の流速成分は、 $U=U_1, V=U_2, W=U_3$ とする。運動方程式をテンソル記号を用いて表わせば、

$$\rho U_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k} = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \nabla^2 U_i - \rho \overline{\frac{\partial U_i}{\partial x_k} U_k} \quad (1)$$

である。各式を U_i 倍して加え合せ $U_1=U+u, U_2=v, U_3=w$ と書き直して平均を取れば、乱流のエネルギー平衡を表す方程式が得られる。

$$\tau \frac{dU}{dy} = \frac{d}{dy} \left[\rho v \frac{(u^2 + v^2 + w^2)}{2} + v p \right] + \mu \left(\frac{dU}{dy} \right)^2 - \frac{1}{2} \mu \frac{d^2}{dy^2} (u^2 + v^2 + w^2) - \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \quad (2)$$

この方程式は、T. Von Karman(1937) によつて得られたもので、その意味は次の様である。左辺は Reynolds 応力によつて乱れが平均流から獲得するエネルギー〔Production〕をあらわし、右辺はそれが乱れによつて熱エネルギーに変化したり、また乱れの拡散作用によつて隣りの部分へ伝播されたりして、単位体積・単位時間あたりのエネルギー収支が平衡していることを示している。(2)の右辺の第2項は層流粘性によつて熱に変るエネルギー〔Direct viscous dissipation〕、第4項は乱れによつて熱エネルギーに変る割合〔Turbulent dissipation〕を示す。右辺の第1項は、乱れの垂直成分 v によつて運動エネルギーおよび圧力エネルギーが拡散される割合を表わし、〔Turbulent diffusion〕と呼ばれる。また、第3項は〔Gradient type diffusion〕と呼ばれる。

これらの各項のオーダーを比較すれば、レイノルズ数が充分大きい場合には、(2)の右辺第2項および第3項は省略して良いことがわかる。また、同時に乱流の特性を表す諸統計量 λ (最小渦径) $\sqrt{u^2} \equiv \tilde{u}$ (乱れの強さ)、 L (渦の平均径) の間に

$$\frac{\lambda^2 \tilde{u}}{\nu L} = \text{const.} \quad (3)$$

の関係があることが導かれ、これは実験的にも確められている〔M. Hino(1961)〕。

ところで、水流が固体粒子を浮遊させると、エネルギー平衡式には、種々の修正が必要になる。まず左辺のエネルギー・プロダクションでは、見掛けの密度の変化にともなつて、摩擦応力 τ は、

$$\tau = \bar{\rho}_* U_*^2 \int_0^1 \frac{\rho_0 \{1 + (r-1)c\}}{\bar{\rho}_*} d\left(\frac{y}{h}\right) \quad (4)$$

となる。ここに $\bar{\rho}_*$ は断面平均の見掛けの密度、 r は粒子の比重、 c は粒子の体積濃度である。エネルギー方程式の右辺には、固体粒子を浮遊させるためのエネルギーとして

$$-\rho_0(r-1)\overline{c v Y} = \rho_0(r-1)g V_p C \quad (5)$$

を加える必要がある。粒子を含まない場合のエネルギー逸散率は、

$$D = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \approx 15 \nu \rho \frac{\bar{u}^2}{\lambda^2} \quad (6)$$

である。これは、(3)の関係を用いれば

$$D \sim \rho \frac{\bar{u}^3}{L} \quad (7)$$

と書ける。しかし、固体粒子がその単位体積の一部に存在すれば、そこでは水の粘性による乱れのエネルギーの逸散は行われないから、それだけの体積分を差し引かなければならない。もつとも、固体粒子の存在によつて、その周りの流れの状況も変化するはずであるから、粒子の存在の影響範囲は、粒子径 d の α 倍の所に及ぶと考えなければならぬから、 D は次の様に表示される。

$$D \sim (1 - \alpha^3 C) \rho \frac{\bar{u}^3}{L} \quad (8)$$

ここに、 α は 1 よりやや大きい、ほぼ 1 に近い値である。

また、粒子の回転や周囲の流体との相対運動のために発生するエネルギー逸散率をも考慮する必要がある。層流の場合には、G.B. Jeffery (1922), H.L. Goldsmith and S.G. Mason (1962) 等の研究があるが、乱流場において、等方性乱流の場合の相対運動についてのみ解がえられている [J.O. Hinze (1959)]。壁面の影響についての S.L. Soo and C.L. Tien (1969) の研究には、二三検討すべき点がある。等方性乱流の中の固体粒子によるエネルギー逸散率は、

$$\begin{aligned} W_p &= \frac{C}{\pi d^3} \cdot \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{3}{2T} \int_{-T}^{+T} (\text{drag force}) (u - u_p) dt \\ &= \frac{C}{\pi d^3} \cdot 9 \pi \mu d \bar{u}^2 \left(\frac{1 - b^2}{a t_{*fL} + 1} \right) \end{aligned} \quad (9)$$

ただし、 $a = 3 \nu / (2r + 1) d^2$, $b = 3 \rho_0 / (2 \rho_p + \rho_0)$, t_{*fL} = 渦の寿命時間、である。これをもつて、粒子の相対運動によるエネルギー逸散の目安とする。乱れのエネルギー方程式は、結局、次の様になる。

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_a \bar{u} * \frac{d \bar{u}}{dy} \int_{y_n}^1 \frac{\rho_0 \{ 1 + (r-1) C \}}{\rho_a} d \left(\frac{y}{H} \right) &= a_f (1 - \alpha^3 C) \frac{\bar{u}^3}{L} + \rho_0 (r+1) V_p g C \\ &+ W_p + [\text{Diffusion term}] \end{aligned} \quad (10)$$

ここに、[Diffusion term] は (2) の右辺第一項を表わす。

ところで、 D と W_p の Order を比較すれば、

$$W_p / D = \frac{3 \rho_0 (2r+1)}{2} \left(\frac{\bar{u}}{\bar{u} *} \right)^2 \sqrt{\frac{2}{C_f}} \left(1 - \frac{1}{K_0} \sqrt{\frac{C_f}{2}} \right)$$

となり、一般には 0.1 ~ 0.2 位の値である。したがつて、今非等方性乱流での表示の明確でない W_p を D に比して省略することにする。

b 乱れの加速度平衡方程式

乱れの発生原因は、機械的摩擦応力と密度差にもとづく浮力とに分けられる。この様な概念は、C.G. Rossby and R.B. Montgomery (1935), H. Lettau (1949) らによつて提示せられており、その後

W.P.Elliot(1957), S.K.Kao(1959)によつて、加速度平衡方程式の形に表示された。これを、粒子を浮遊した流れに拡張修正して、次の様に表示する。

$$L \left(\frac{dU}{dy} \right)^2 = f_n(C) I_0 \left(\frac{dU}{dy} \right)^2 + B g I_0 (r-1) \frac{\rho}{\rho_a} \frac{dC}{dy} \quad (11)$$

この右辺の第一項は、機械的応力による乱れの加速度を表わし、 I_0 は混合距離、 $f_n(C)$ は運動する渦塊と粒子との衝突による加速度の減殺効果を表わす C の関数で、これは1より小さい。右辺第二項は浮力による乱れの加速度を表わし、 B は1のオーダーの定数である。左辺は、総合加速度を表わす。また(11)の右辺第二項は、 $B_1 g \frac{\rho_0}{\rho_a} (r-1) \frac{v_p C}{U_*}$ と書き換えることが出来る。

C 乱流構造の変化

乱流構造をあらわす乱れの強さ $\tilde{u}$ や渦の平均径 L が、粒子濃度によつて全断面内で様な割合で変化し、水深による差は二次的なものと考えて、上で得られた乱れのエネルギー方程式(10)と乱れの加速度方程式を、粘性層の高さまたは粗度の高さ a から自由表面 h 迄積分すれば、種々の計算の後次の様な乱流構造の変化をあらわす式を得る。

$$\frac{k_0}{k} = \frac{L_0}{L} = \frac{(1+\beta \bar{C}_a)}{2} [1 + \{1 + 4 B k_0 (1 + \beta \bar{C}_a) s\}^{\frac{1}{2}}] \quad (12a)$$

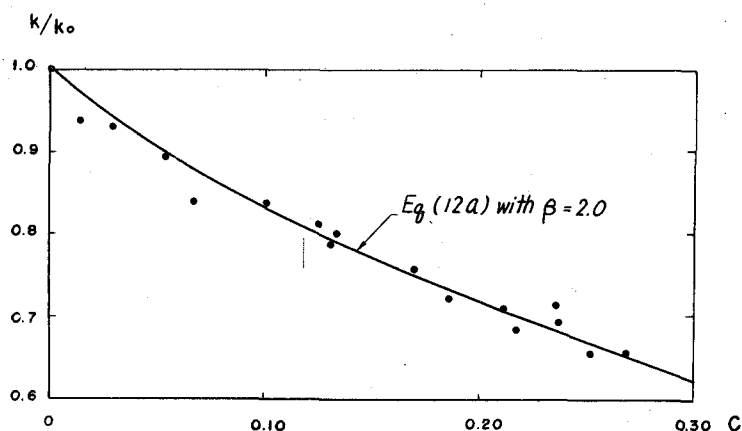


Fig. 1

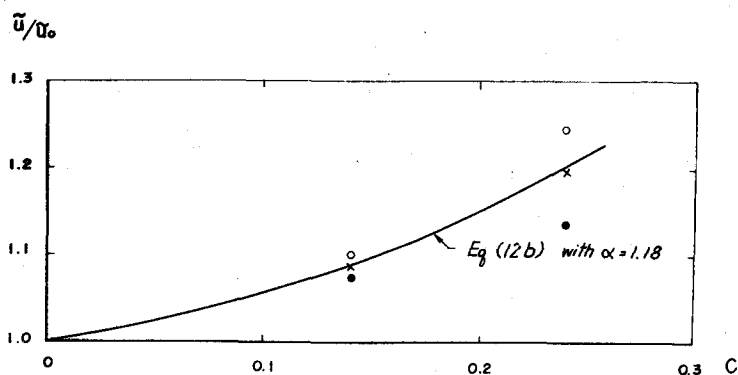


Fig. 2

$$\frac{\tilde{u}}{u_0} = \left(1 - \frac{1}{\alpha_1} \frac{1}{\bar{c}_a}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{\bar{\rho}_0}{\rho_0}\right)^{\frac{1}{3}} \left[1 - \frac{2k_0}{(1+\beta_a)[1+(1+4k_0B(1+\beta_a)s)]}\right]^{\frac{1}{2}} \quad (12b)$$

但し、 $\alpha_1^{-3} = \alpha^3 \{1 + \int_a^h \{c - \bar{c}_a\} / \bar{c}_a \, dy\}$ $\bar{c}_a$ = 断面平均粒子濃度、 β = 定数、

$$s = \frac{\rho_0 (r-1) g v_p \bar{c}_a (h-a)}{\bar{\rho}_a U_*^3 (\ln \frac{h}{a} - 1)}$$

suffix 0は、粒子濃度が零の場合を示す。

また、渦の寿命時間 t_* については、 $t_* \sim t_{*0} \frac{L}{L_0} \frac{\tilde{u}_0}{u}$ (12a) (12b) を代入すれば良い。

3. 実験との比較

中立浮遊粒子の場合、つまり $r=1$ の時の理論と Elata and Ippen の実験との比較は、図 1, 2 に示す通りで、 k の変化については極めて良く両者は一致している。 $\tilde{u}$ の変化については、実験の困難さのために測定点も少く、バラツキもやや大きい、1 よりやや大きくほぼ 1 に近いと予想された α の値を 1.18 として、理論と実験値の平均が良く一致することは、理論の妥当性を示すものと考えられる。

土砂粒子を浮遊した場合については H.M. Ismail (1951), V.A. Vanoni and C.N. Nomikos (1960) の実験と比較して、良い一致をみた。 $\bar{c}_a$ が小さいから、 k の変化に関しては志村氏の理論とほぼ同じである。

参 考 文 献

- Einstein, H.A. and Chien, N.: "Second approximation of the suspended load theory" series 47
Issure No. 2, University of California, Berkley. (1952)
- Elata, C. and Ippen, A.T.: "The dynamics of open channel flow with suspension of
neutrally buoyant particles." Technical Report No. 45, Hydrodynamics Laboratory,
M.I.T. (1961)
- Elliot, W.P.: "A comparison of some approaches to the diabatic wind profiles."
Trans. A.G.U. 38, [1], 21/24, (1957)
- Goldsmith, H.L. and Mason, S.G.: "Particle motion in sheared suspensions. 13, The spin and
rotation of disks." J. Fluid Mech., 12, [1], 88/96, (1962)
- Hino, M.: "The structure and diffusion coefficient of turbulent shear
flows." Technical Report C-6103, Central Research Institute of Electric Power
Industry. (1961)
- Hinze, J.O.: "Turbulence" 352/364 McGraw-Hill (1959)
- Jeffery, G.B.: "The motion of ellipsoidal particles immersed in a viscous
fluid." Proc. Roy. Soc. A, 102 161/179. (1922)
- Kao, S.-K.: "Turbulent transfer in the boundary layer of a stratified
fluid." J. of Meteorology, 16, 497/503, (1959)

- Karman, T. von : "The fundamentals of the statistical theory of turbulence."
J. Aero. Sci., 4, [4], (1937)
- Lettau, H : "Isotropic and non-isotropic turbulence in the atmospheric
surface layer." Geophy. Res. Pap., No. 1, AFCRC, 84. (1949)
- Lumley, J. L. : Discussion of the paper by S. L. Soo and C. L. Tien. Trans
ASME J. App. Mech. 27, [4], 756 (1960)
- Monin and Obukhov : Akademiya Nauk SSSR, Geofizicheskii Inst. Trudy No. 24 163, (1954)
- Ogura, Y. : Notes of the wind velocity profile in the non-adiabatic
atmosphere." J. Metro. Soc. of Japan, 30, (1952)
- 室田 明 : "浮砂濃度と流速分布の関連について" 土木学会誌 38, [11], (1953)
- Rossby, C.-G. and Montgomery, R. B. : "The layer of frictional influence in wind and ocean
currents." Pap. Phys. Ocean. Meteor., M. I. T. and Woods Hole Ocean Instit., 3, [3]
101, (1953)
- 志村 博康 : "浮遊砂を有する水流の諸特性について" 土木学会論文集
[46], (1957)
- Sep, S. L. and Tien, C. L. : "Effect of the wall on two-phase turbulent motions."
Trans. ASME, Ser. F, J. App. Mech. 27, [1], 5/15, (1960)
- Syono, S. and Hamuro, M. : "Notes on the wind-profile in the lower layer of a
adiabatic atmosphere." J. Meteor. Soc. Japan. Ser. II, 40, [1], (1962)
- 椿 東一郎 : "浮流流砂が流れに及ぼす影響について" 土木学会誌 40, [9]
449/458, (1955)
- Vanoni, V. A. : "Transportation of suspended sediment by water." Trans
ASCE [111], 67/133, (1946)
- Vanoni, V. A. and Nemicos, C. N. : "Resistance properties of sediment-laden streams."
Trans. ASCE [126] 1140/1175 (1961)
- Yamamoto, G. : "Theory of turbulent transfer in non-neutral conditions."
J. Meteor. Soc., Japan, 37, 60/69, (1959)

(補遺) 気象学における Monin の universal function を求めるための Yamamoto-Panofsky
の方法〔Syono and Hamuro (1962)〕を粒子浮遊流に拡張修正して、 k の変化と C の関係を求めてみた
が得られた理論は実験とは合わないものとなつた。この点、Kao の加速度方程式の方が合理的ではな
いかと考えられる。