

§1 緒 言

水撃作用の計算における Schnyder-Bergeron-Angus の図式解法(特性曲線法)は Allievi の方程式から発して考え出された極めて巧妙な方法であつて、これにより複雑な系の水撃作用が直観的にしてしかも厳密に解き得られるようになってゐることは周知の通りである。しかし、これはあくまで図式解法であり、いわゆる公式に代入して解き求めるという類のものとは性格を異にするため、計算が機械化されない点の場合によつては不便であると考えられていた。また、一般にみられる図式解法の例題においては、作図の簡単な場合(例えば複合管路においては主管路と分岐管路の各長さの比が簡単な整数比になるような場合など)を示すことが多いが、実際には図の作図は数多くの線がこみ入つて複雑なものとなり、作図の手間も大きなものとなることが多い。

しかし図式解法一すなわち作図ができるということは直線または曲線群の交点をつぎつぎに解析幾何学的に定めてゆきうということであるから、解析幾何学的に解の表示、すなわち公式化が可能であることを意味する。

そこで本研究においては、Schnyder-Bergeron-Angus による特性曲線法による解の操作をこのような解析幾何学的に表示し、計算の公式化を行ない、コンピューターの使用と相いまち水撃作用の計算の機械化を考える。

§2. 特性曲線法と新しい比值

Schnyder-Bergeron-Angus による特性曲線法をいわば“解析幾何学的”に行なう。

特性曲線法の作図のためには図-1の記号を用いてつぎの比值が用いられていた。

$$h = H/H_0 \quad \text{および} \quad v = V/V_0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

ただし V_0 は負荷遮断の場合は遮断前の、負荷増荷の場合は増荷後の、定常流速を示す。この結果、これらの変数についての特性曲線は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} h - h_{x_1 t_1} &= 2\rho(v - v_{x_1 t_1}) \\ h - h_{x_2 t_2} &= -2\rho(v - v_{x_2 t_2}) \end{aligned} \right\} \dots\dots (2)$$

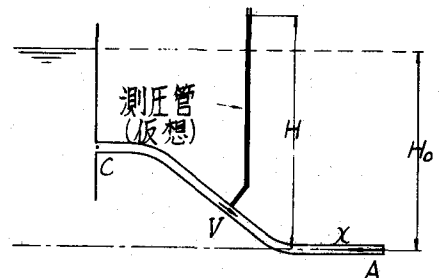
$$\text{ここに } \rho = aV_0 / 2gH_0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

であり、 a は伝播速度である。

ここでは、(1)の比值に代えてつぎの比值を用いる。¹⁾

$$h = \frac{H}{H_0} \frac{1}{1 + (aV_0 / gH_0)} \quad \text{および} \quad v = \frac{V}{V_0} \frac{1}{1 + (gH_0 / aV_0)} \quad \dots\dots\dots (4)$$

図 - 1



この比値を変数にえらぶと特性曲線は

$$h-h_{x_1} \quad t_1=v-v_{x_1} \quad t_1 \text{ および } h-h_{x_2} \quad t_2=-(v-v_{x_2} \quad t_2) \dots\dots\dots (5)$$

となり、特性曲線群の勾配は±1となる。勾配が±1となることがこれ迄の±2ρの勾配をもつ場合に比して、計算機の使用に対しては、明らかに好都合なものであることは後の諸計算式において見られる通りである。

(4)の変数により、初期条件

$$H_A = H_c = H_0 \quad , \quad V_A = V_c = V_0 \quad \dots\dots\dots (6)$$

はつぎのように変換される

$$h_A = h_c = \sigma \quad , \quad V_A = V_c = 1-\sigma \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$\text{ただし } \sigma = 1 / \left[1 + (a V_0 / g H_0) \right] \quad \dots\dots\dots (8)$$

また、閉塞器よりの流出の条件式

$$V_A / V_0 = \psi \cdot \sqrt{H_A / H_0} \quad \dots\dots\dots (9)$$

はつぎのように変換される。

$$v_A = \psi \cdot (1-\sigma / \sqrt{\sigma}) \cdot \sqrt{h_A} \quad \dots\dots\dots (10)$$

§ 3. 単一管路の水撃作用

図-1の記号をとり、また時間の単位をつぎのようにとる。

$$\mu = L / a \quad \dots\dots\dots (11)$$

そしてZの倍数毎の時間tにおける水撃の計算を行う。すなわち

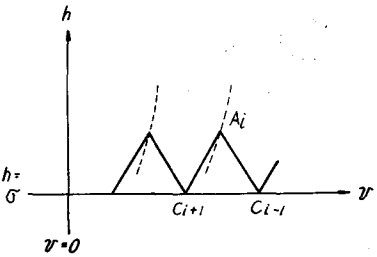
$$t = i \cdot L / a \quad (i = 0, 1, 2, \dots) \quad \dots\dots\dots (12)$$

図 - 2

1) A点

A点(閉塞器の個所)の圧力特性式は既述のように、

$$v_A(i) = \begin{cases} \phi(i) \frac{1-\sigma}{\sqrt{\sigma}} \sqrt{h_A(i)} & i < \theta \\ 0 & i \geq \theta \end{cases} \quad \dots\dots\dots (13)$$



ただしθは無次元化された閉塞時間であつて、

$$\theta = \tau / (L / a) \quad (\tau : \text{閉塞時間}) \quad \dots\dots\dots (14)$$

である。一方、A_iを定めるためのC_{i-1}を発生する特性方程式は図-2からも見られるように

$$h_A(i) + v_A(i) = \sigma + v_c(i-1) \quad \dots\dots\dots (15)$$

(13)と(15)との交点としてA_iの座標がつぎのように定められる。

$$\begin{aligned} v_A(i) &= \begin{cases} \frac{1}{p_0(i)} \left[-1 + \sqrt{1 + 2p(i) \{ \sigma + v_c(i-1) \}} \right] & i < \theta \\ & i \geq \theta \end{cases} \quad \dots\dots\dots (16) \\ h_A(i) &= \sigma - v_A(i) + v_c(i-1) \end{aligned}$$

ただし

$$p(i) = \frac{1}{\phi^2(i)} \frac{2\sigma}{(1-\sigma)^2} \dots\dots\dots (17)$$

2) C 点

C 点の値を定める式は、明らかに、つぎのようである。

$$h_c(i) - v_c(i) = h_A(i-1) - v_A(i-1) \quad \text{および} \quad h(i) = \sigma \dots\dots\dots (18)$$

これから

$$h_c(i) = \sigma \quad \text{および} \quad v_c(i) = \sigma - h_A(i-1) + v_A(i-1) \dots\dots\dots (19)$$

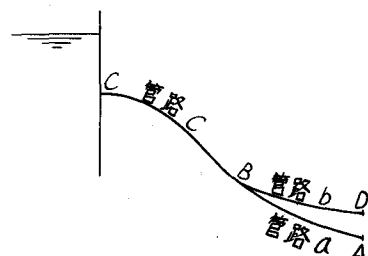
3) 総括

図-3

初期条件 例えば負荷遮断に対しては

$$\left. \begin{aligned} h_A(i) &= h_c(i) = \sigma \\ v_A(i) &= v_c(i) = 1 - \sigma \end{aligned} \right\} \quad (i \leq 0)$$

計算式 (16)、(17)、(19)



§ 4. 分岐管路の水撃作用(図-3)

$$L_c/a_c = L_a/a_a = m:n \dots\dots\dots (20)$$

ただし m, n : 自然数

また、不必要な一般化を避けるために

$$L_b/a_b = L_a/a_a$$

とする。また、

$$k = \rho_c / \rho_a = a_c A_a / a_a A_c \dots\dots\dots (21)$$

とおく、いま

$$n_0 : m \text{ と } n \text{ との最大公約数}$$

とおくとき、時間の単位をつぎのようにえらぶ。

$$\tau = (n_0/n)(L_a/a_a) = (n_0/m)(L_c/a_c) \dots\dots\dots (22)$$

したがって t の測り方は、

$$t = i \cdot (n_0/n)(L_a/a_a) \quad (i=0, 1, 2, \dots) \dots\dots\dots (23)$$

である。閉塞器 A および D の各閉塞器時間を T_a および T_b とし、

$$\theta_a = T_a/\tau \quad \text{および} \quad \theta_b = T_b/\tau \dots\dots\dots (24)$$

とおく。また、

$$Q_{a.}/Q_{c.} = \alpha \dots\dots\dots (25)$$

とおく、ただし $Q_{a.}$ は a 管路の定常時(負荷遮断については遮断前、負荷増加については増加後)の流量であり、 $Q_{c.}$ は c 管路についての同様の流量である。

計算式を一括して示すとつぎのようになる。²⁾

初期条件式 例えば負荷遮断に対して

$$\left. \begin{aligned} h_A(i) &= h_B(i) = h_D(i) = h_c(i) = \sigma \\ v_A(i) &= \alpha(1-\sigma) \\ v_{B_A}(i) &= \alpha(1-\sigma) \quad v_{B_B}(i) = (1-\alpha)(1-\sigma) \quad v_{B_C}(i) = 1-\sigma \\ v_c(i) &= 1-\sigma \end{aligned} \right\} (i \leq 0)$$

計算式

$$p_A(i) = \frac{1}{(1 - \frac{i}{\theta_a})^2} \frac{2\sigma}{(1-\alpha)^2}$$

$$v_A(i) = \begin{cases} \frac{1}{p_{A_0}(i)} \left[-1 + \sqrt{1 + 2p_A(i) \left\{ h_B(i - \frac{n}{n_0}) + v_{B_A}(i - \frac{n}{n_0}) \right\}} \right], & (i < \theta_a) \\ 0, & (i \geq \theta_a) \end{cases}$$

$$h_A(i) = -v_A(i) + h_B(i - \frac{n}{n_0}) + v_{B_C}(i - \frac{n}{n_0})$$

$$h_B(i) = \frac{k}{1+2k} \left\{ h_A(i - \frac{n}{n_0}) + h_D(i - \frac{n}{n_0}) - v_A(i - \frac{n}{n_0}) + v_c(i - \frac{n}{n_0}) + \frac{\sigma}{1+2k} \right\}$$

$$v_{B_C}(i) = h_B(i) - h_D(i - \frac{n}{n_0}) + v_A(i - \frac{n}{n_0})$$

$$v_{B_B}(i) = h_B(i) - h_D(i - \frac{n}{n_0}) + v_D(i - \frac{n}{n_0})$$

$$v_{B_C}(i) = \frac{1}{k} \left\{ -h_D(i) + k v_c(i - \frac{m}{n_0}) + \sigma \right\}$$

$$p_D(i) = \frac{1}{[1 - (i/\theta_b)]^2} \frac{2\sigma}{(1-\sigma)^2}$$

$$v_D(i) = \begin{cases} \frac{1}{p_D(i)} \left[-1 + \sqrt{1 + 2p_D(i) \left\{ h_B(i - \frac{n}{n_0}) + v_{B_B}(i - \frac{n}{n_0}) \right\}} \right], & i < \theta_b \\ 0, & i \geq \theta_b \end{cases}$$

$$h_D(i) = -v_D(i) + h_B(i - \frac{n}{n_0}) + v_{B_B}(i - \frac{n}{n_0})$$

$$h_c(i) = \sigma$$

$$v_c(i) = \frac{1}{k} \left\{ \sigma + k v_{B_C}(i - \frac{m}{n_0}) - h_B(i - \frac{m}{n_0}) \right\}$$

これらの計算式により、 i 以前の諸値により、 i の瞬間における諸値を求め(表-1)、そのような操作を繰返してゆく。

表 - 1

$i - \frac{m}{n_0}$	$p_A \quad v_A \quad h_A$	$h_B \quad v_{Ba} \quad v_{Bb} \quad v_{Bc}$	$p_D \quad v_D \quad h_D$	$h_c \quad v_c$
$\cdot$	$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$	$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$	$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$	$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$
$i - \frac{n}{n_0}$	$p_A \quad v_A \quad h_A$	$h_B \quad v_{Ba} \quad v_{Bb} \quad v_{Bc}$	$p_D \quad v_D \quad h_D$	$h_c \quad v_c$
$\cdot$	$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$	$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$	$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$	$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$
i	$p_A \quad v_A \quad h_A$	$h_B \quad v_{Ba} \quad v_{Bb} \quad v_{Bc}$	$p_D \quad v_D \quad h_D$	$h_c \quad v_c$

§ 5. サージタンクを有する系の水撃作用(制水口のない場合)(図-4)

$$L_c/a_c : L_b/a_b : L_c/a_c = m_c : m_b : m_a \quad \text{図 - 4}$$

とする。また、.....(26)

$$k_b = \rho_b/\rho_a, \quad \alpha_c = \rho_c/\rho_a \quad \dots\dots (27)$$

とおく。

1) A 点

(16) と同じ(ただし m を m_a に改める)

2) B_a 点

$$p_A(i) = \frac{1}{(1 - \frac{i}{\theta_a})^2} \frac{2\sigma}{(1 - \sigma)^2}$$

$$v_A(i) = \begin{cases} \frac{1}{p_A(i)} \left\{ -1 + \sqrt{1 + 2p_A(i) \left\{ h_B(i - \frac{m_a}{n_0}) \right.} \right.} & (i < \theta_a) \\ 0 & (i \geq \theta_a) \end{cases} \dots\dots (27a)$$

$$h_A(i) = v_A(i) + h_B(i - \frac{m_a}{n_0}) + v_{Ba}(i - \frac{m_a}{n_0})$$

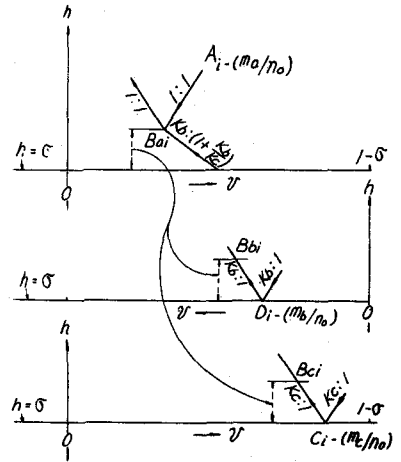
$$\left. \begin{aligned} h_B(i) - v_{Ba}(i) &= h_A(i - \frac{m_a}{n_0}) - v_A(i - \frac{m_a}{n_0}) \\ h_B(i) + \frac{k_b}{1 + (k_b/k_c)} v_{Ba}(i) \\ &= \sigma + \frac{b}{1 + (k_b/k_c)} \left\{ v_c(i - \frac{m_c}{n_0}) - v_D(i - \frac{m_b}{n_0}) \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots (28)$$

これから

$$h_B(i) = \frac{1 + (k_b / k_c)}{k_b + 1 + (k_b / k_c)} \sigma$$

$$+ \frac{k_b}{k_b + 1 + (k_b / k_c)} \left\{ h_A \left(i - \frac{m_a}{n_0} - v_A \left(i - \frac{m_a}{n_0} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + v_c \left(i - \frac{m_c}{n_0} - v_D \left(i - \frac{m_b}{n_0} \right) \right) \right\} \quad (29)$$

$$v_{Bb}(i) = h_B(i) - h_A \left(i - \frac{m_a}{n_0} \right) + v_A \left(i - \frac{m_a}{n_0} \right)$$



3) B_b 点

$$h_B(i) - k_b v_{Bb}(i) = \sigma - k_b v_D \left(i - \frac{m_b}{n_0} \right)$$

$$\therefore v_{Bb}(i) = \frac{1}{k_b} h_B(i) - \frac{\sigma}{k_b} + v_D \left(i - \frac{m_b}{n_0} \right) \dots \dots \dots (30)$$

4) B_c 点

$$h_B(i) + k_c v_{Bc}(i) = \sigma + k_c v_c \left(i - \frac{m_c}{n_0} \right)$$

$$\therefore v_{Bc}(i) = \frac{1}{k_c} \left[-h_B(i) + k_c v_c \left(i - \frac{m_c}{n_0} \right) + \sigma \right] \dots \dots \dots (31)$$

5) D 点

$$h_D(i) + k_b v_D(i) = h_B \left(i - \frac{m_b}{n_0} \right) + k_b v_{Bb} \left(i - \frac{m_b}{n_0} \right) \text{ および } h_D(i) = \sigma \dots (32)$$

これから

$$h_D(i) = \sigma \text{ および } v_D(i) = \frac{1}{k_b} \left[h_B \left(i - \frac{m_b}{n_0} \right) + k_b v_{Bb} \left(i - \frac{m_b}{n_0} \right) - \sigma \right] \dots (33)$$

6) C 点

$$h_c(i) - k_c v_c(i) = h_B \left(i - \frac{m_c}{n_0} \right) - k_c v_{Bc} \left(i - \frac{m_c}{n_0} \right) \text{ および } h_c(i) = \sigma \dots (34)$$

これから

$$h_c(i) = \sigma \text{ および } v_c(i) = \frac{1}{k_c} \left[\sigma + k_c v_{Bc} \left(i - \frac{m_c}{n_0} \right) - h_B \left(i - \frac{m_c}{n_0} \right) \right] \dots (35)$$

7) 総括

初期条件 例えば負荷遮断に対して

$$\left. \begin{aligned} h_A(i) &= h_B(i) = h_D(i) = h_c(i) = \sigma \\ v_A(i) &= v_{Ba}(i) = v_{Bc}(i) = v_c(i) = 1 - \sigma \quad v_{Bb}(i) = v_B(i) = 0 \end{aligned} \right\} (i \leq 0)$$

計算式 (27・a), (29), (30), (31), (33), (35)

§ 6 制水口型サージタンクを有する系の水撃作用

$$L_c/a_c : L_a/a_a = m : n \dots\dots\dots(36)$$

$$k = \rho_c / \rho_a \dots\dots\dots(37)$$

とおき、また制水口抵抗を

$$R = K Q_b^2 \dots\dots\dots(38)$$

とおく。ただし

R : 制水口抵抗 Q_b : 制水口通過流量

である。 R を(4)と同じ尺度で無次元化したものを R' とする。すなわち

$$R' = r v_{Bb}^2 \dots\dots\dots(39)$$

これまでと同じように

$$r = (n_0/n)(L_a/a_a) = (n_0/m)(L_c/a_c) \dots\dots\dots(40)$$

を時間の単位にえらぶ。

1) A 点

(27・a)と同じ。

2) B 点

$$\left. \begin{aligned} h_B(i) - v_{Ba}(i) &= h_A(i - \frac{n}{n_0}) - v_A(i - \frac{n}{n_0}) \\ h_B(i) + k v_{Bc}(i) &= \sigma + k v_c(i - \frac{m}{n_0}) \\ h_B(i) &= \sigma + r \cdot [v_{Bc}(i) - v_{Ba}(i)] \cdot [v_{Bc}(i) - v_{Ba}(i)] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(41)$$

これから

$$h_B(i) = \frac{2r\phi \cdot (\frac{1}{k} + 1) \pm 1 \pm \sqrt{\left[2r\phi \cdot (\frac{1}{k} + 1) \pm 1\right]^2 - 4r(\frac{1}{k} + 1)^2 (\pm\sigma + r\phi^2)}}{2r(\frac{1}{k} + 1)^2}$$

(上号:負荷遮断 下号:負荷増加) $\dots\dots\dots(42)$

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{\sigma}{k} + v_c(i - \frac{m}{n_0}) + h_A(i - \frac{n}{n_0}) - v_A(i - \frac{n}{n_0}) \\ v_{Bc}(i) &= h_B(i) - h_A(i - \frac{n}{n_0}) + v_A(i - \frac{n}{n_0}) \\ v_{Bc}(i) &= \frac{1}{k} \left[-h_B(i) + \sigma \right] + v_c(i - \frac{m}{n_0}) \end{aligned}$$

3) C 点

(35)に同じ。

4) 総括

初期条件 例えば負荷遮断に対して

$$h_A(i) = h_B(i) = h_C(i) = \sigma$$

$$v_A(i) = v_{Ba}(i) = v_{Bc}(i) = 1 - \sigma$$

$$v_{Bb}(i) = 0 \quad (i \leq 0)$$

計算式 (27・a), (42), (35)

§7 計算例

図式解法ではかなりその作図の手間が繁雑になると思われるケースについての計算例を示す。

図 - 7

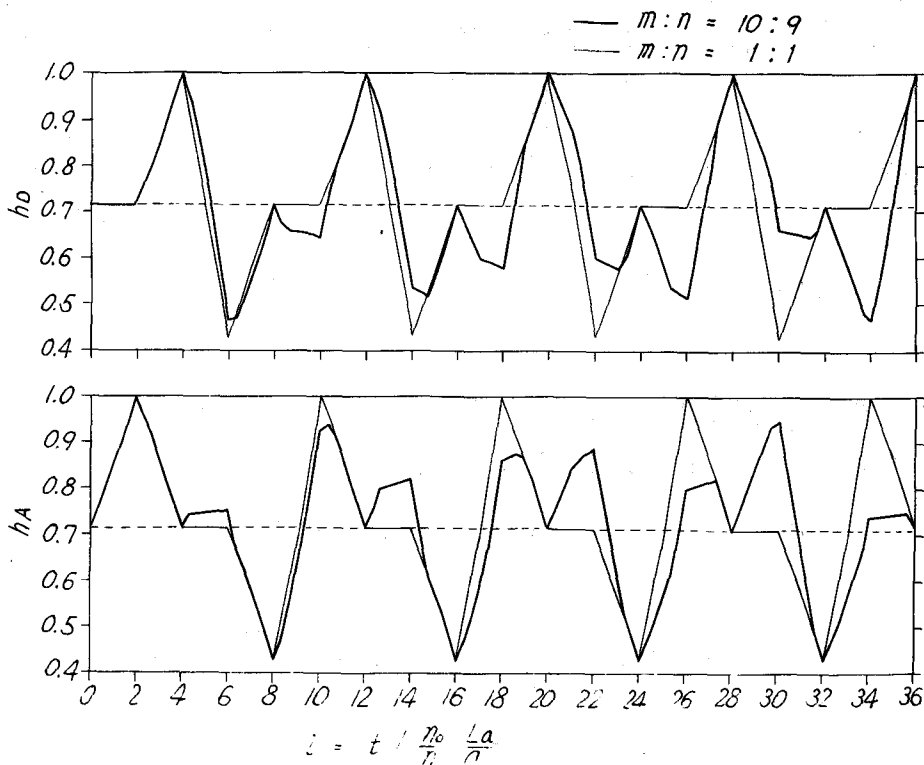


図-7(分岐管路(図-3))において、Aを閉塞器、Dを行止り端とし、Aによる閉塞を行なう。閉塞は直線的とし閉塞時間を $\tau = 2L_a/a_a$, $L_a/a_a = L_b/a_b$, $K = \rho_c/\rho_a = \rho_c/\rho_b \equiv 0.5$, $\sigma = 1/1.4$ とする。太線は $L_c/a_c : L_a/a_a = 10:9$ の場合、細線は $L_c/a_c : L_a/a_a = 1:1$ の場合また、点線は静水頭($h = \sigma$)を示す。

図 - 8

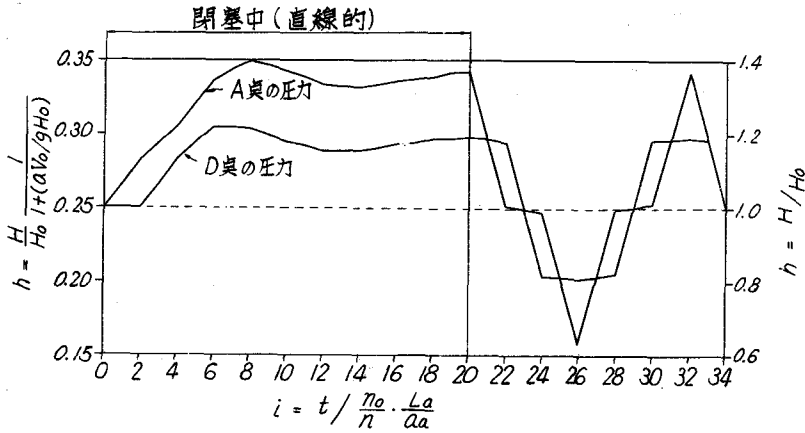


図-8 (分岐管路 (図-3) において、A を閉塞器、D を行止り端とし、A による閉塞を行なう。 $L_c/a_c = L_b/a_b$, $L_e/a_e : L_a/a_a = 2:1$, $K = \rho_c/\rho_a = \rho_e/\rho_b = 0.5$, $\sigma = 1/4$ A の閉塞は直線的とし閉塞時間が $\tau = 20 L/a$ の場合)。

【附 記】 本計算の遂行に当り種々御教示を与えられた日本建設コンサルタント株式会社 佐藤清一博士に深甚なる謝意を捧げる。また、本計算のプログラミングに当られた中央大学助教授服部昌太郎氏 並びに本研究に協力された当時中央大学学生 (現在帝都高速度交通営団) 助川禎君にもその協力に対して深謝する。

引用文献

- 1) T.Hayashi et G.Ransford: Ouverture ou fermeture brutale d'une vanne on aval d'une conduite, La Houille Blanche, no 6, 1960.
- 2) T.Hayashi: Water-hammer in bifurcating pipelines, Proceedings of IAHR-Ninth Convention, Belgrade 1951.