

京都大学防災研究所 矢野 勝 正

名古屋大学工学部 足立 昭 平

京都大学防災研究所 芦田 和 男

1. はしがき

河川は自然のままでも絶えず変動しているのに、人工を加えるにおよんでその変動はいよいよちじるしいものとなり、治水、利水上支障をきたすことがしばしばある。したがってこの変動を考慮した河道設計と適切な防災対策とは河川工学上重要な問題であるといわねばならない。

河川の変動に関係する要素は多く、その変動の実態は非常に複雑であるが、その根底には流量や流砂量とそれらを流す流路との間に一つの力学的な釣合い関係があり、外的環境が変化すると、流路はこの新しい釣合い関係を求めて変動して行くと考えられる。いわば、外的環境の変化に応答することになる。外的環境の変化には流量、流砂量の変化および人工構造物などによる河道条件の変化がある。一方流路がこれらの変化に応答する形態としては平面形状、縦、横断形状および河床構成材料の変化がある。このように関係する要素が非常に多い上に、応答が完了するまでに、すなわち過渡領域においてすでに新しい外的環境の変化があらわれているのが常であり、これらのことが変動の実態が非常に複雑であるといわれるところである。

著者らはこれらの応答の形態を体系的に取り扱うことを念願としているが、まずその第一段階として最も単純な場合を取り扱うことになる。すなわち外的環境としては、流量、流砂量に変化なく、人工構造物による変化のみの場合で、流路の応答の形態としては、横断形状、河床材料に変化なく、縦断形状のみ変化する二次元長方形水路の場合を取り扱うことにする。このような場合の計算方法はすでに提案されているが、かなりの手数を要するため、実際に計算された例は数少ない。この種の計算には高速度計算機の使用が適していると考えられ、すでに行なわれた例もあるが、計算方法、境界値の入れ方、計算 interval の定め方など計算機の適用方法に、さらに検討すべき点が少なくないように思われる。

著者らは計算機を用いて現象の一般的性質を調べて行くことを意図して、基礎方程式を適当な形で無次元化するとともに、上記の諸点について考察を進めた。なおこの計算によつてデルタが形成されて行く過程といったような河床変動機構が解明されて行くことを期待したのであるが、現在までに完了した計算範囲では、現象がそこまで進行しておらず、それらの解明は今後の計算に待つこととなつた。したがってここでは主としてコンピューターのこういった問題への適用法を説明することにするが、この中計算遂行上非常に重要な問題である計算 interval の定め方についての論議は十分でないので大方の御教示を得てさらに検討して行きたいと考えている。

2. 基礎方程式

河床変動を解析するためには、水流に対する運動方程式、連続式および流砂に対する運動方程式、

連続式の4式を適当な境界条件および初期条件のもとで連立に解けばよいことは周知のとおりである。この際、コンピューター等による数値計算により現象の一般的性質を調べて行く上には、無次元化された方程式によることが便宜であるので、まずこれを行なってみよう。河川における河床の変動は一般に緩慢であるので、定常流の場合における河床変動を取り扱う場合、水流の運動に関して時間に関する項は省略してもよい。この場合、河床に沿って流れ方向にX軸を取れば、幅の広い長方形水路に対して、水流の運動方程式は次式であらわされる。

$$\frac{d h}{d x} = i - \frac{d}{d x} \left(\frac{v^2}{2g} \right) - \frac{u_*^2}{gh} \quad (1)$$

ここに、 h は水深、 $i = -\frac{\partial z}{\partial x}$ は河床勾配、 u_* は摩擦速度、 v は平均流速、 z は基準線からの河床高また水流の連続式は、

$$B h v = Q \quad (2)$$

ここに、 B は水路幅

いま河床砂が主として掃流形成で輸送される場合を考えることにする。掃流流砂量公式は数多く提案されているが、ここでは佐藤-吉川-芦田式を用いることにすれば、単位幅当りの掃流流砂量 q_B は

$$q_B = \frac{\varphi u_*^3}{(\sigma/\rho - 1)g} F\left(\frac{u_*^2}{u_{*c}^2}\right) \quad (3)$$

ここに、 φ は粗度計数により定まる常数。また流砂の連続式は次式であらわされる。

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{1}{B(1-\lambda)} \frac{\partial (q_B \cdot B)}{\partial x} = 0 \quad (4)$$

一方(3)式の u_* 、 u_{*c} は抵抗法則としてManning式を用いれば、

$$u_* = \frac{g^{1/2} \cdot n \cdot Q}{h^{7/6} \cdot B} \quad (5), \quad u_{*c} = \frac{g^{1/2} \cdot n \cdot Q}{h_k^{7/6} \cdot B} \quad (6)$$

となる。ここに、 h_k は移動限界水深。

与えられた $Q_B (=q_B \cdot B)$ 、 Q 、 d (河床粒径)、および B に対する平衡等流水深、 h_0 、平衡等流勾配、 i_0 (1)を用いて h 、 z を次のように

$$h_0/h = \zeta, \quad h_0/h_k = r, \quad z/h_0 = \eta, \quad (7)$$

無次元化すれば、 u_* 、 u_{*c} は、

$$u_*/u_{*0} = \zeta^{7/6} \quad (8), \quad u_*/u_{*c} = (\zeta/r)^{7/6} \quad (9)$$

であらわされる。一方(3)式は、

$$Q_B = Q_{B_0} \cdot \frac{\zeta^{7/2} \cdot F\{(\zeta/r)^{7/3}\}}{F\{(1/r)^{7/3}\}} \quad (10)$$

となる。いま簡単のために B および r が一定の場合を取り扱えば、(4)式と(10)式から次式、

$$h_0 \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{1}{B(1-\lambda)} \frac{7 Q_{B_0} \zeta^{5/2}}{F\{(1/r)^{7/3}\}} \left\{ \frac{1}{2} F\left\{\left(\frac{\zeta}{r}\right)^{7/3}\right\} + \frac{7}{3} \left(\frac{\zeta}{r}\right)^{7/3} F'\left\{\left(\frac{\zeta}{r}\right)^{7/3}\right\} \right\} \frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0 \quad (11)$$

が得られ、次のような形で、

$$\zeta = (i_0/h_0) \cdot x \quad (12), \quad z = \{Q_B/B(1-\lambda)h_0^2\} \cdot i_0 \cdot t \quad (13)$$

無次元化を行なうことによつて、結局次のようになる。

$$\frac{\partial \eta}{\partial \tau} + F \left\{ \left(\frac{\zeta}{1/r} \right)^{7/3} \right\} \left\{ \frac{1}{2} F \left\{ \left(\frac{\zeta}{r} \right)^{7/3} \right\} + \frac{\zeta^{7/3}}{3 r^{7/3}} \cdot F' \left\{ \left(\frac{\zeta}{r} \right)^{7/3} \right\} \right\} \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} = 0 \quad (14)$$

同様に(7), (12)および(13)式を用いて(1)式を無次元化すれば、

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \xi} (F_0^2 \cdot \zeta - \frac{1}{\zeta^2}) + \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \zeta^{10/3} = 0 \quad (15)$$

となる。ここで上流向きに x 軸すなわち ξ 軸を取り (14), (15) 式を書きなおせば、

$$\left\{ \begin{array}{l} A \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} - \frac{\partial \eta}{\partial \tau} = 0 \end{array} \right. \quad (16)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial \xi} - \zeta^{10/3} = 0 \end{array} \right. \quad (17)$$

となる。ここに、
$$A = \frac{7 \cdot \zeta^{5/2}}{F \{ 1/r^{7/3} \}} \left\{ -\frac{F \{ (\zeta/r)^{7/3} \}}{2} + \frac{\zeta^{7/3} \cdot F' \{ (\zeta/r)^{7/3} \}}{3 \cdot r^{7/3}} \right\} \quad (18)$$

$$B = F_0^2 \cdot \zeta - 1/\zeta^2 \quad (19) \quad F_0 = V_0 / \sqrt{gh_0} \quad (20)$$

これが無次元化された基礎方程式であり、これらの式を与えられた初期条件および境界条件のもとで解けばよい。初期条件は、

$$\tau = 0 : \quad \eta = f(\xi) \quad (21)$$

の形で与えられる。境界条件は前論文⁽¹⁾において述べたように、勢力水頭が河床変動に関係なしにはほぼ一定に保持される地点(例えばダム等による支配断面)において与えるべきであろう。すなわち一応

$$\xi = \xi_0 : \quad H_0/h_0 = \eta + 1/\zeta + F_0^2 \cdot \zeta^2/2 = \text{Const.} \quad (22)$$

と考えられる。ただし、このような境界条件を与える構造物近傍の流れは非常に複雑であるので、この境界条件については、現在さらに詳細な検討を行ないつつある。

3. 特性曲線による解法⁽²⁾

独立変数を x, y , 従属変数を u, v とすれば, Quasi-linear 方程式の一般形は次式で与えられる。

$$A_1 U_x + B_1 U_y + C_1 V_x + D_1 V_y + E_1 = 0 \quad (23)$$

$$A_2 U + P_2 U_y + C_2 V_x + D_2 V_y + E_2 = 0 \quad (24)$$

ここに, $A_1, A_2, \dots, E_2$ は x, y, u, v の関係, $U = \frac{\partial u}{\partial x}, V = \frac{\partial v}{\partial y}, \dots$ である。

$$\text{いま, } a = A_1 C_2 - A_2 C_1, \quad 2b = A_1 \frac{-A_2 D_1}{D_2}, \quad (25)$$

とおくと, 上式が双曲線型であるための条件は、

$$a\alpha^2 - 2b\alpha + c = 0 \quad (26)$$

が相異なる実根を有することである。いまこの相異なる実根を α_+, α_- として、

$$\left. \begin{array}{l} F = A_1 B_2 - A_2 B_1, \quad G = B_1 C_2 - B_2 C_1 \\ K = A_1 E_2 - A_2 E_1, \quad H = B_1 E_2 - B_2 E_1 \end{array} \right\} \quad (27)$$

とすると特性曲線は次式で表わされる。

$$C + \text{曲線} \quad \left\{ \begin{array}{l} dy - \alpha_+ dx = 0 \\ F du + (a\alpha_+ - G) dv + (k\alpha_+ - H) dx = 0 \end{array} \right. \quad (28)$$

$$(29)$$

$$C-曲線 \quad dy - \alpha dx = 0 \quad (30)$$

$$C+曲線 \quad \left\{ \begin{aligned} &F du + (a\alpha - G) dv + (k\alpha - H) dx = 0 \end{aligned} \right. \quad (31)$$

この手法に従えば、(16)、(17) 式は双曲線型であり、その特性曲

$$線は, \quad d\tau = 0 \quad (32)$$

$$C+曲線 \quad \left\{ \begin{aligned} &B d\zeta / d\xi + d\eta / d\xi - \zeta^{10/3} = 0 \end{aligned} \right. \quad (33)$$

$$d\tau / d\xi = B/A \quad (34)$$

$$C-曲線 \quad \left\{ \begin{aligned} &d\eta / d\xi = \zeta^{10/3} \end{aligned} \right. \quad (35)$$

であることが容易にわかる。上式を階差の形で書けば、(記号は

図-1 参照)

$$\left\{ \begin{aligned} \zeta_{i+1,j} &= \zeta_{i,j} + \frac{1}{B_{i,j}} \cdot \{ \zeta_{i,j}^{10/3} (\xi_{i+1,j} - \xi_{i,j}) \\ &+ \eta_{i,j} - \eta_{i+1,j} \} \end{aligned} \right. \quad (36)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \xi_{i,j+1} &= \xi_{i,j} + (A/B)_{i,j} \Delta\tau \end{aligned} \right. \quad (37)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \eta_{i,j+1} &= \eta_{i,j} + \zeta_{i,j}^{10/3} \cdot (A/B)_{i,j} \Delta\tau \end{aligned} \right. \quad (38)$$

となる。

4. 計算例

上の計算法を満砂した砂防ダム上流部の河床変動の解析に適用しよう。設定条件は、平衡状態にある河床に高さ $W/h_0 = 2$ のダムを築造したものとし、満砂した状態から計算を進める。この際の堆砂形状は、 $\eta = a\xi^2$ の形であらわされるものとし、図-2 に示すように旧河床に滑めらかに接するようにする。すなわち

$$\tau = 0: \quad \left. \begin{aligned} \xi \leq 4 \quad & \eta = \xi^2/8 \\ \xi > 4 \quad & \eta = \xi - 2 \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

であらわされる。また常数 F_0 および r の値は $i_0 = 1/250$, $d_m = mm$, $h_0 = 5m$, $n = 0.03$ を想定して、 $F_0^2 = 0.773$, $(1/r)^{7/3} = 9.8$ と定めた。次に境界条件であるが、せき近傍においては流れの様子が非常に複雑であるので、この点をさけて、 $\xi_0 = 0.2$ とした。上の水理条件に対して、境界条件を与える(22式は、 $\eta + 1/\zeta + 0.3865\zeta^2 = 1.53$ (40)

であらわされる。なお計算の便宜上、あらかじめ(18)式を数値計算することにより、 A は上に定めた常数に対して次のように近似される。

$$\zeta < 0.326: A = 0, \quad 0.326 < \zeta \leq 0.7: A = 3.84\zeta - 1.25, \quad 0.7 < \zeta: A = 3.5\zeta^{5/2}$$

5. 計算結果の考案

(1) 計算 interval について。この計算は国産の大型リレー計算機 FACOM-128B によつた。計算に先だつて計算 interval の取り方について、2, 3 の検討を行なつた。想定の水理条件に対して、 $\Delta\xi = 0.1$ が $\Delta x = 1.25m$ に相当する。これと $\Delta\xi = 0.2$ について初期河床に対する水面追跡を行なつたところ、前者では非常にスムーズな解を得るのに対し、後者では計算の不安定をおこした。さらに参考のために上下流断面の平均値を用いる計算も行なつてみたが、この場合でも $\Delta\xi = 0.2$ に対して多少の

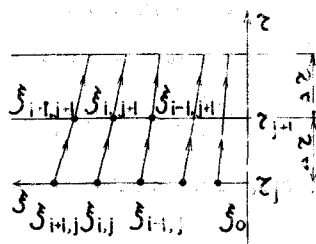


図-1 記号説明図

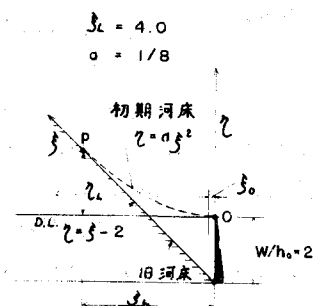


図-2 計算例の説明図

計算不安定をおこしており、片押しの場合に比べてかなり改善されたとはいえ、intervalを $\frac{1}{2}$ にすることに比べてはるかに及ばないことを知り得た。したがって $\Delta\xi=0.1$ で計算を進めることにしたが、計算の進行につれて、状態が変化し、最初適切であつたintervalも不適切にならぬとはいいがたい。事実この例では $j=7$ 付近で計算の不安定をおこした。そこでそれ以後、 $\Delta\xi=0.05$ に縮めて計算を進めたところ非常にスムーズな解を得ることができた。このように計算不安定をさけるためには、それに必要なだけ計算のintervalを小さくすることが絶対的な原則であろう。もちろん近似の巧せつが解の精度に大きな影響を持つ場合もあるので、その大切なことは申すまでもない。

さてintervalの取り方は場合、場合でかなり異なり、一般的に論議することは非常にむずかしい。上に述べたものも、一例を示すのみであるので、さらに検討して行きたいと考えている。

$\Delta\tau$ の取り方の規準は、特性曲線の勾配が $\Delta\tau$ 進行した所であまり変わらないような範囲に選ぶことであろう。いまの場合には $\Delta\tau=0.005$ としたが少し細かく取りすぎたようである。これをいま、想定している水理量に対して、絶対時間に換算すれば約2時間35分となる。

(2) 計算結果。計算された特性曲線は 図-3 に示すとおりであり、堆砂の影響域は時間とともに上流に伝播して行く様子がよくわかる。また特性曲線は $\xi < 1$ の範囲に対して、時間とともにわずかながら発散し、 $\xi = 1$ 付近にはほとんど変化なく、 $\xi > 1$ に対して、収斂している。特に背砂の最上流端付近から出る特性曲線の収斂は最も顕著であり、さらに時間が進むにつれて一箇所に収斂し、碎波現象に似た現象を呈することも予想される。これはデルタの形成機構との関連において、非常に興味あるところである。次に河床の時間的変動は図-4に示すとおりであり、ダム近くの $\xi = 0.4$ においては河床がわずかに底下するのに対し、 $\xi = 1.0$ 付近では変化なく、それより上流は堆積している。

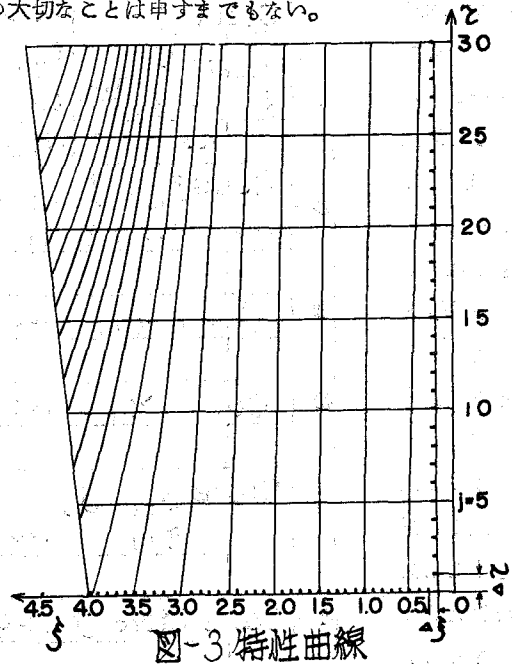


図-3 特性曲線

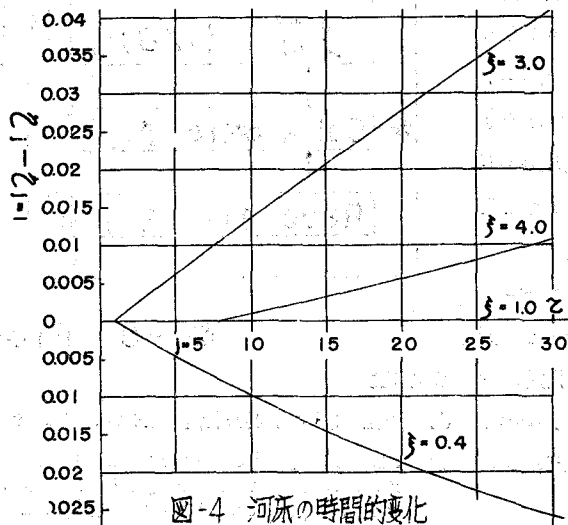


図-4 河床の時間的变化

6. Flow Chart

以上の計算手順を示す Flow Chart は図-5 のとおりである。その中必要と思われる箇所のみ2, 3 説明すれば, 次のようである。

①: 特性曲線が境界条件を与えている位置を越して下流へ行くかどうかの判定であり, もし越せばこれを一つ jump して一つ上流側へ移るべきことを示す。

④: 境界における河床高の計算。これ挿む上下流断面の河床高より内挿法で求める。

⑤: 境界条件式, (22) 式の計算

⑥: (36) 式の計算

⑦: (37) 式 (38) 式の計算

⑧: 上流側の計算範囲を示すもので, バック・サンドの影響域が終れば $j=1$ となり, この step の計算を終了して次の step に移ることを示す。

⑨: 一つ前の step より延

びる範囲に対 参考文献

する, data の (1) 芦出和男: 平衡縦断形状について, 才17回土木学会年次学術講演会概要1962年追加方法を示す。 (2) Anthony Ralston and Herbert S. Wilf: Mathematical Methods for Digital Computers, P.165, John Wiley & Sons, Inc.

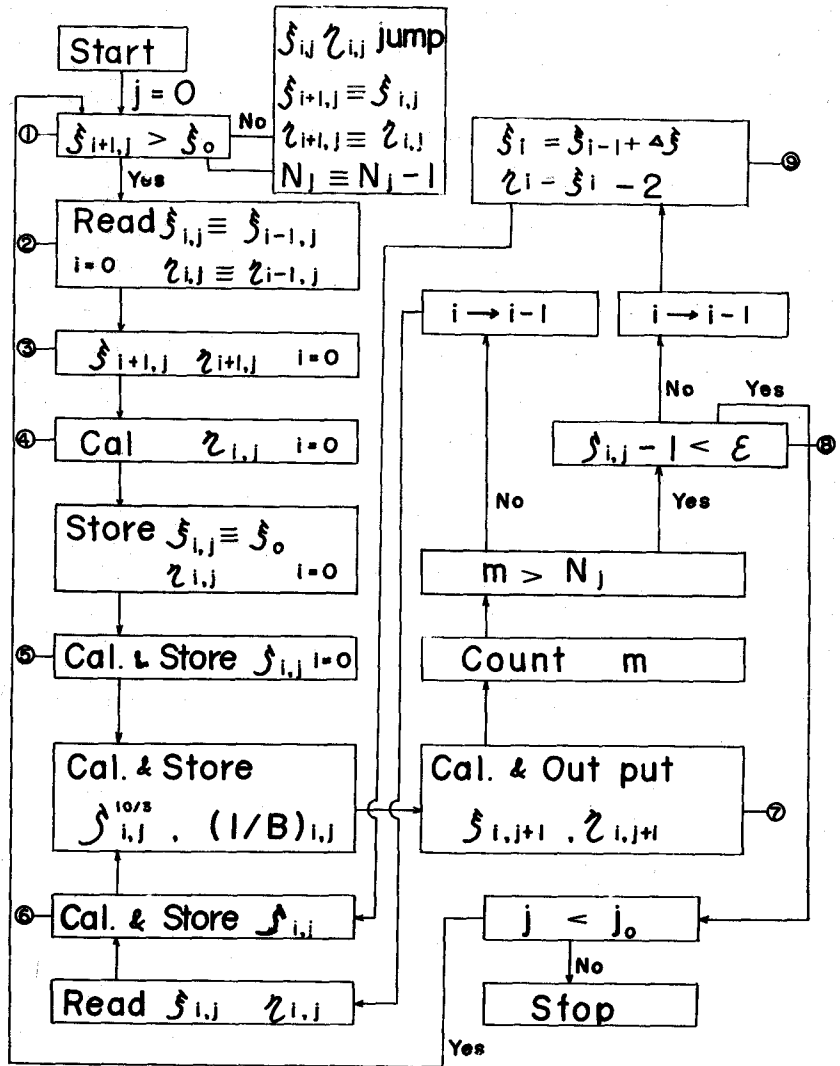


図-5 Flow Chart