（A－4） 急勾配開水路に関する模型実験のscale effectについて

北海道大学工学部　尾崎　晃
同　岸　力
電源開発株式会社　宮崎洋三

1. 要　旨

模型実験の際のscale effectに関する問題は水理模型実験にたずさわる技術者にとつてはゆるがせにできない問題であつて、古くから多くの研究者によつてそれぞれの立場より検討が加えられてきた。その結果、模型実験の技術は日増しに向上しているが、ますますその範囲が広くなつた水理現象研究の各分野にはまだ未解明の問題が多数残されている。この小論も著者等が急勾配開水路に関する各種の模型実験を行なつている間に疑問を持ち、その解明に努めた2，3の点について述べたものである。

2. 相似法則とscale effect

急勾配開水路関係の模型実験においては周知のようにフルード相似法則が適用される。この相似法則は慣性力に対して粘性力を無視したものであるから、流れの状態がそのような仮定に近ければ近いほど、よい精度で適用されることは当然である。実物の流れにP，その縮尺模型の流れにmを付して表わせば、図－1のような場合には

$$v_p = \sqrt{2gH} \qquad v_m = \sqrt{2gh}$$

$$v_p / v_m = \sqrt{H/h} = \alpha^{1/2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

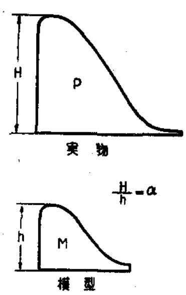


図-1

したがつて模型の縮小率がαのときには

$$v_p = \alpha^{1/2}\, v_m$$

以上の関係は境界層外の主流部に対しては実用上からはほとんど完全に適用しうる。しかし境界層内の流れ、又は断面全体に対する平均流速を扱う場合には粘性によるenergy lossが生じるので、そのときの平均流速は

$$v_p = M\sqrt{2gH} \qquad v_m = m\sqrt{2gh}$$

となり、したがつて(1)式は

$$v_p / v_m = M/m \ \alpha^{1/2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2)$$

となる。ここにMおよびmは実物および模型の水路上における種々の損失をすべて含む1より小なる係数でその値は水路の始点からの距離xにしたがつて変化する。もしM＝m、すなわち実験と模型の両者でそれぞれ損失係数が等しい場合には(2)式は(1)式と一致し、フルード相似法則が成立する。$M \neq m$の場合には$M/m = \beta$とおけば

$$v_p / v_m = \beta\alpha^{1/2}$$

となり、換算に際してはβなる修正係数をかけなくてはならない。

現実問題として$\beta=1$なることはほとんどありえない。ふつうはM＞mである。したがつて$\beta>1$なる場合には実物および模型の流量、流水断面積、流速をそれぞれ

実　物	Q_p	A_p	v_p
模　型	Q_m	A_m	v_m

とすると

$$v_p=\beta\alpha^{1/2}v_m \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (3) \qquad A_p=\alpha^2 A_m \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

$$Q_p=A_p v_p=\beta\alpha^{5/2} A_m v_m=\beta\alpha^{5/2} Q_m \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

したがつて

$$Q_p/\alpha^{5/2}=\beta Q_m \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (6)$$

すなわち粘性によるenergy loss の存在する流れにおいては、模型に流す流量はふつうのフルード相似法則による$Q_p/\alpha^{5/2}=Q_m$よりも小さくなくては幾何学的相似が成立しない。このときには、

$$A_m=A_p\cdot\beta/\alpha^2=\alpha B_m H_p\cdot\beta/\alpha^2$$ （ただしBは水路幅　Hは水深）

$$H_m=\beta/\alpha\cdot H_p \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (7)$$

すなわち$\beta>1$なる修正率を必要とする。Mおよびmの内容はそれぞれ問題の性質に応じて考慮しなくてはならない。

3. 流れの領域について

急勾配開水路の流れには大別して、(A) skin friction flow, (B) transition region, (C) internal friction flow の3領域があることは、昭和36年度年次学術講演会において述べたとおりである[1)]。フルード相似法則によつて問題を取扱う場合には、実物および模型の流れがそれぞれ上記の3領域のいずれかにおいて一致していることが先ず必要条件である。実物の流れが(A)であるのに模型の流れが(C)になつたというようでは相似は本質的に成立しない。同様に実物の(A)領域における境界層が乱流であるのに、模型では領域は同じく(A)であつてもその境界層が乱流という場合も起りうる。この時も前同様相似は成立たない。今までの模型実験報告においては、相似を論ずるに当つてフルード数を一値させるようにしたというだけに終つていて、以上のような点について考察したものが見受けられなかつたようである。

次に流れの領域を一致させることができた場合において、(A)および(B)領域に対しては実物と模型における境界層発達過程が重要な問題となり、縮尺の限界やscale effectの発生もその観点から取扱わなくてはならない[2)]。(C)領域の流れにおいては、フルード相似法則は本来の意味においては成立しないのであつて、ただその形式を借りているに過ぎない。したがつてこの場合にはフルード相似法則に関するscale effectというよりも、むしろ(6)および(7)式のような立場から取扱つた方がよいのではないかと考える。

さらに、開水路の模型実験においては、多くの実験報告書に述べられているように、実物と模型とでフルード数を一致させることができるかどうかという点を吟味する必要がある。レノーズ相似法則にしたがう実験の場合には流速又は物体の速度を人為的に調節して、実物と模型の両者において等しいレノーズ数を得ることも理論上不可能ではないが、自然の落差による流れである開水路の場合には

長さの縮尺がきまれば（すなわち幾何学的に相似な模型においては）流速はおのずから定つて、レノーズ数の場合のように人為的に実物と模型とで等しいフルード数を得ることはできないであろう。（A領域の流れにおいては同一の水路については流量が増加するにしたがつてフルード数は減少し、（C）領域の流れにおいては逆に流量が増加するにしたがつてフルード数が増加するという関係があることも、この問題を一そう複雑にする一要素といえる。

4. 滑面開水路における境界層の発達

領域A)の流れを扱う場合には境界層発達の問題を取り上げなくてはならない。滑面開水路に関するこの問題については既にいくつかの論文が発表されている。[3),4)] 境界層運動量方程式において境界層外の主流部流速を u_c、および抵抗係数 c_f に対しそれぞれ

$$u_0 = c x^s \quad \cdots\cdots\cdots (8) \qquad c_f = 2\lambda\left(\frac{u_0 \delta_*}{\nu}\right)^m \cdots\cdots\cdots (9)$$

の関係を用いて、排除厚 δ_* について解くと

$$\delta_* = \delta_{*0}^{1-m}\left(\frac{x_0}{x}\right)^{(2+H)(1-m)s} + \frac{\lambda c^m}{\nu^m}\frac{H(1-m)}{(2+H)(1-m)s+ms+1}\left\{1-\left(\frac{x_0}{x}\right)^{(2+H)(1-m)s+ms+1}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (10)$$

が得られる。ただし $x = x_0$ において $\delta_* = \delta_{*0}$ であるとし、$H = \delta_*/\theta$ は考えている範囲に対しては一定と仮定している。さらに流速分布には指数法則を用い、連続の関係と $\delta = h$（h は水深、δ は境界層の厚さ）とを用いて、(10) 式より臨界点の位置 x_0 を求めると

$$x_0 = \frac{\nu^m}{\nu c} \cdot \frac{(2+H)(1-m)s+ms+1}{H(1-m)} \cdot \left(\frac{H-1}{2}\right)^{1-m} q^{1-m} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (11)$$

となる。勾配、水路幅が種々に異なつた滑面開水路における多数の実験結果より c_f と $u_0\delta_*/\nu$ の関係については図－2が得られた。[1)] これによれば(A)領域、(C)領域ともに、層流に対しては

$$c_f = 1.430 R_{\delta_*}^{-1} \cdots\cdots\cdots (12)$$

乱流に対しては

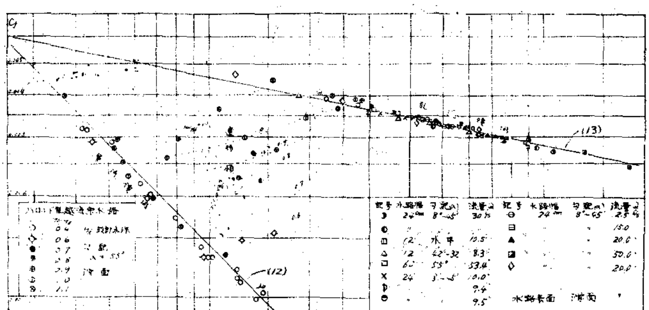
$$c_f = 0.018 R_{\delta_*}^{-0.2} \cdots\cdots (13)$$

が成立する。又境界層外主流部流速 u_0 は一般に

$$u_0 = c x^s \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (14)$$

で表わされ、c は水路勾配によつて決る常数、$s \doteqdot 0.5$ である。H も流れの種類によつて多小異なるが、ある範囲の流れに対しては近似的に一定とみなしうる。H に対しては実験より得た値を用いると、勾配55°の滑面水路においては (10) 式は

図－2



$$\delta_* = 0.162\nu^{0.252}\, x^{0.25} \quad （層流）\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (15)$$

$$\delta_* = 0.00695\nu^{0.18}\, x^{0.75} \quad （乱流）\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (16)$$

のように簡単になる。実験値との比較を図－3、図－4に示す。

5. (A)領域の流れにおける各種の縮尺界およびscale effect

(1) 模型の流れが(A)領域になるための縮尺限界

問題を簡単にするために実物、模型ともに滑面であつたとすると、模型の流れが実物同様に(A)領域であるためには、模型上に臨界点があらわれてはならない。すなわち(11)式による x_c が模型水路の延長よりも大になるような単位幅流量 q_m（したがつて流量 Q_m）を与えるような縮尺を採用すればよい。Q_m はこの場合ふつうのフルード相似法則の縮尺 $\alpha^{5/2}$ による。このようにして先ず縮尺 α を仮りに求め、更に次項に述べるような方法で、層流に対するm，λ，Hを用いるが、乱流に対するそれらの値を用いるかを決定し、再計算を行う。

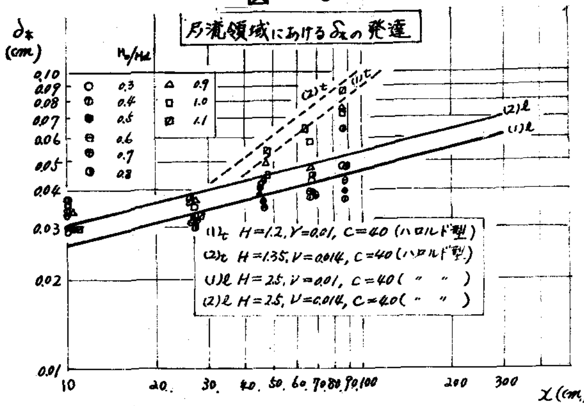
(2) 境界層内の流況に対する縮尺限界

模型規模を求める為の条件として、3に述べた理由から層流境界層が遷移を開始する条件を用いる。層流境界層においては

$$\delta_* \propto (\nu x/u_0)^{1/2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (17)$$

が成立つから、境界層が層流から乱流へ遷移を始める限界の規模を持つ模型を模型iとし、境内層が層流である模型を模型mとすると、$i/m=M$ の関係がある場合には(17)により

図－3



$$\delta_* i/\delta_* m=(x_i/x_m)^{1/2}\cdot(u_0 i/u_0 m)^{-1/2}=M^{1/4}$$

又一方において

$$(R\delta_*)i/(R\delta_*)m=(u_0\,\delta_*)i/(u_0\,\delta_*)m$$
$$=M^{1/2}\cdot M^{1/4}=M^{3/4}$$

模型iにおいて境界層が遷移する為の条件は

$$(R\delta_*)\,i=(R\delta_*)\ \mathrm{critical}$$

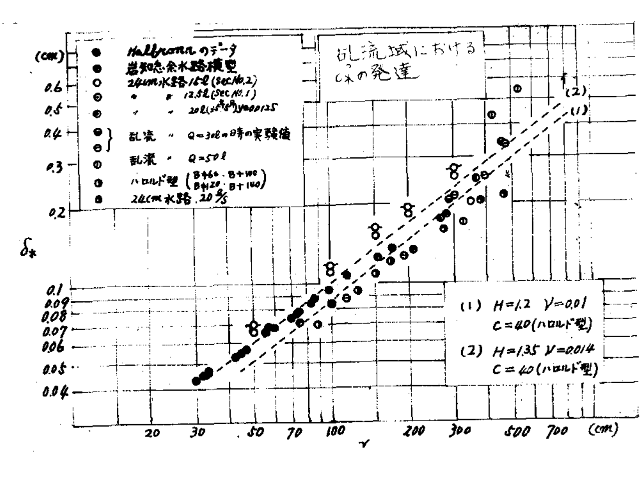
であるから

$$M=\{(R\delta_*)cr\cdot/(R\delta_*)_m\}^{4/3} \quad (18)$$

となる。層流境界層から乱流境界層への遷移レノーズ数 $(R\delta_*)cr$ が既知であれば、$1/\alpha$ の縮尺模型mを用いた実験において層流境界層があらわれた場合には、層流境界層があらわれないようにする為の縮尺限界は(18)式によつてMを計算し $1/\alpha M=M/\alpha$ の縮尺にすればよい。ただしこの場合、模型i，mともに水路表面は同一条件とする。例としてハロルド型標準断面余水路の場合の数値を用いると、図－2より

$$(R\delta_*)cr=600\sim1000$$

図－4



の程度である。今$H_0/H_d > 0.6$の場合についてMを求めると、堰頂におけるRδ_*は実験結果より

$$(R\delta_*)_m = 200 \sim 350$$

したがつて

$$M = \left(\frac{600 \sim 1000}{200 \sim 350}\right)^{4/3} = 4.33 \sim 4.03$$

ゆえに堰頂から境界層が遷移を開始する為の模型縮尺の限界は、滑面においてはこの実験に用いた模型（実物のおよそ1／50程度）の約4倍の規模を必要とする。しかし以上によつては遷移領域がしばらく続くため、全部が完全な乱流にはならない。遷移領域は抵抗法則が一定しない領域であるので、模型ではできるだけこの領域をさけた方がよい。したがつて模型縮尺は1／50の4倍以上としなくてはならないから、滑面で水路全長にわたり乱流境界層を出現させることは実際問題として困難である。

(3) 水深に関するscale effect

境界層外の主流部に関してはフルード相似法則がそのままあてはまりscale effectは考えなくてもよい。したがつてこの問題においてはδ_*のscale effectのみを考えればよい。(10)式においてscale effectに関係しない常数係数をA，Bとおけば、同式は

$$\delta_*^{1-m} = A\delta_{*0}^{1-m} + BC^m \cdot X^{ms+1} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (19)$$

ただし $A = (X_0/X)^{(2+H)(1-m)s}$

$$B = \lambda/\nu^m \frac{H(1-m)}{(2+H)(1-m)s+ms+1}\left\{1-\left(\frac{X_0}{X}\right)^{(2+H)(1-m)s+ms+1}\right\}$$

一般にXの原点としては境界層発達の初期の点を選ぶため、δ_{*0}に含まれるscale effectは省略しても差支えない。そこで実物と模型の相対応する点でδ_*を比較する。ただし問題を簡単にするため実物、模型ともに滑面で抵抗法則も両者に同じものが適用できるものと仮定する。したがつてA，Bはそれぞれ模型と実物の両者において等しい値となる。実物の値にP，模型の値にmをつけると

$$(\delta_{*p}/\delta_{*m})^{1-m} \fallingdotseq (C_p/C_m)^m\ (X_p/X_m)^{ms+1} \quad \cdots\cdots\cdots (20)$$

模型の縮尺を$1/\alpha$（$X_p/X_m = \alpha$）とすると、主流部については

$$u_{0p}/u_{0m} = \alpha^{1/2} = C_p X_p^s / C_m X_m^s$$

$$\therefore C_p/C_m = \alpha^{1/2 - s}$$

$$\therefore \delta_{*p}/\delta_{*m} = \alpha^{\frac{2+m}{2(1-m)}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (21)$$

境界層か層流か乱流かに応じてmに(12)又は(13)式の値、－1又は－0.2を入れる。この結果は(15)、(16)式によるものと同じであるが、後者を用いればνの値の変化にも対応できる。以上のように境界層排除厚δ_*は実物と模型とでα倍又は$1/\alpha$の関係が成立たない。したがつてδ_*に関するscale effectをDとすればδ_{*0}のscale effectを省略した場合

$$D = \frac{\delta_{*p}}{\alpha\delta_{*m}} = \alpha^{\frac{3m}{2(1-m)}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (22)$$

となる。

6. 粗度に関するscale effect

急勾配開水路の流れに対する粗度のscale effectは非常に困難な問題であつて、今のところ定性的なことだけしかわかつていない。R. Maitre and S. Obolenskyはその論文[5]におい

て（……これらの高速流に関する相似法則は流れが大流量であると同時に表面からの空気混入が少い場合にはとくに有効である。相似法則に関する限りただ一つの困難は、実物と同じ割合の粗度を正しく模型上に表現することであつて、粗度ε（equivalent sand roughness）は境界層の発達に著しい影響をおよぼすものである。……）と述べている。しかしこの点については次のような疑問が残る。すなわち実際の模型技術上の問題としては、粗度εを正確に縮尺に合わせて模型上に作ることはほとんど不可能に近いと同時に、またたとえなんらかの方法によつてそれができたとしても無意味なことのように思われる。たとえば$\varepsilon u_*/\nu<5$になればそれは境界層中に埋もれて、粗度としての意味を持たなくなる。この点にも縮尺の限界を考える一つの要素がある。したがつて今一度述べれば、実物と相似な粗度を模型上に再現しなくてはならないという考え方には大いに疑問があり、又仮りに正しいとしても、そのようなことは技術的に不可能に近い。模型の粗度は単に実物と模型の両者における流れのpattern を一致させる上においてのみ重要なのであつて、実物の境界層が乱流ならば模型のそれも又乱流になるようにする。又実物の流れが完全粗面の抵抗法則に従う領域にある場合には模型の流れも同じく完全粗面領域になるように粗度を調整しなければならないが、しかし、これは粗度を幾何学的に相似にすることによつては解決されない。模型におけるまさつ損失の比率（全水頭に対する）が実物よりも大きいことは事実であるが、これは模型の粗度の実物に対する比率が大き過ぎることによるものではない。純滑面の模型においてもまさつ損失の割合は実物よりも大である。これは模型のレノーズ数が実物のそれよりも小さいことに起因するものである。模型の流れにおける境界層がその水路全長を通じて層流境界層又は乱流境界層で一貫している場合には、損失水頭の計算が可能であるから、5に述べたところと併わせて粗度の問題を考える必要がある。

参考文献

(1) 尾崎　晃：急勾配開水路の摩擦抵抗係数について、第16回土木学会年次学術講演会前刷（365）

(2) 同　　：フルードの相似律に関する二、三の考察　第7回日本工学会大会土木部会講演会前刷（31．5）

(3) Y.Iwasa：Boundary Layer Growth of Open Channel Flows on a Smooth Bed and its Contribution to Practical Application to Channel Design 京都大学工学部紀要 Vol 19 No.111 1957

(4) 尾崎晃、岸力、宮崎洋三：標準越流堰を越流する水脈の特性　土木学会北海道支部技術資料第15号　（34）

(5) R.Maitre and S.Obolensky：Study of Some Flow Characteristics in the Downstream Part of Spillways. La Houille Blanche No.4 1954