

固定床水路を用いて、水流を一次元的にとり扱う模型実験の相似律は、その他の水理模型実験と比較して、簡明なものの部類に入るが、その縮尺および粗度の選定については、なお決定的方式が確立されているわけではない。もちろん模型の対象となる自然界の水流はきわめて複雑な要素を包含しているから、それらのすべてを一律に論ずることはできないであろう。しかし、縮尺の選定と人工粗度の適用について、なんらかの目安を得ることは必要なことである。以下はこうした意味から、人工粗度の適用と模型縮尺との関連について考察したものである。

1. 相似律の基本条件式

水路勾配が緩やかで、主流方向に対して鉛直方向の加速度が省略できるような開水路水流を対象とすれば、その基礎方程式は次式であらわされる。

$$\frac{1}{gA} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{1}{gA^2} \frac{\partial Q^2}{\partial x} = I_b - \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\tau_0}{\rho g R} + \frac{\partial Q^2}{gA} \frac{\partial A}{\partial x} \dots\dots(1), \quad \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \dots\dots(2)$$

ここに、 Q は流量、 A は流水断面積、 H は水深、 R は径深、 I_b は水路勾配、 τ_0 は水路潤辺の平均剪断応力、 ρ は流水の密度、 g は重力の加速度、 α は流速分布による運動量の補正係数、 x は流れの方向の距離、 t は時間をあらわす。以下、各物理量の原型におけるものを記号に添字 p を付けてあらわし、模型のそれには添字 m を、また模型の原型に対する比、すなわち縮尺を添字 r を付けてあらわすことにすれば、相似条件式は(1)および(2)式から

$$\frac{Q_r}{g_r A_r t_r} = \frac{Q_r^2}{g_r A_r^2 x_r} = I_{br} = \frac{H_r}{x_r} = \frac{\tau_{0r}}{\rho_r g_r R_r} = \frac{\alpha_r Q_r^2}{g_r A_r^2 x_r}, \quad \frac{A_r}{t_r} = \frac{Q_r}{x_r}$$

で与えられる。一般に、 $g_r = 1$ 、 $\rho_r = 1$ であり、また幾何学的に $A_r = x_r$ 、 H_r であるから、これらを整理すれば、つぎのようになる。

$$I_{br} = H_r x_r^{-1} \dots\dots(3) \quad Q = A_r x_r t_r^{-1} = x_r H_r^{3/2} \dots\dots(4)$$

$$t_r = x_r H_r^{-1/2} \dots\dots(5) \quad \tau_{0r} / \rho_r = R_r H_r x_r^{-1} \dots\dots(6) \quad \alpha_r = 1 \dots\dots(7)$$

(3)式は幾何学的に当然満足される関係であり、(4)式は連続方程式から与えられ、流量の縮尺を規定する。平均流速 U については、 $U = Q/A$ であるから、 $U_r = H_r^{1/2}$ である。

(5)式はよく知られている Froude の相似条件であり、長さの縮尺に対応する時間縮尺を規定する。

(6)式は粘性流体における Reynolds の相似条件であり、長さの縮尺に対応する流水抵抗を規定する。

いま抵抗係数 λ を $\tau_0 = \frac{\rho}{2} \lambda U^2$ で定義すれば、(6)式は

$$\lambda_r = R_r H_r x_r^{-1} U_r^{-2} = R_r x_r^{-1} \dots\dots(8)$$

また、Manning の粗度係数 n を用いてあらわせば、 $n_r = R_r^{2/3} x_r^{-1/2} \dots\dots(9)$

となる。つぎに、(7)式は流速分布に対する制約をあらわし、運動量の補正係数が原型と模型と等しいことを要求している。通常 α は1に近い値をとるけれども、水深が小さくなるほど大きい値をもつものと考えられるから、小縮尺あるいは模型歪みの大きい場合には、(7)の条件式を厳密に満足すること

は困難であるといわねばならぬ。たとえば、対数速度分布則から導れる α の理論値は、二次元流に対して、 $\alpha=1+3.13\lambda^2$ 、長方形断面水路水流に対して、 $\alpha=1+3.13\beta\lambda^2\cdots(10)$ である。ここに、 β は側壁摩擦速度に対する比、 a 、および水深の水路半巾に対する比、 γ の関数であり、一般に1より大きく、 $a=1.0$ のときの最大値は1.25であるが、 a が1.0から離れるほどその値も増大する。

しかし、大縮尺のとくに歪みのない模型については、実際上の近似度から、 $\alpha_r=1$ と見なしてよい場合が多いと考えられ、また、この項は水路断面効果による流水抵抗の一種と見なすこともできるから、 $\alpha_r=1$ を期待し難い場合には、この項を抵抗項に含めて、見かけの抵抗係数が $(\frac{\lambda}{2}+\frac{\alpha^R\partial A}{A\partial x})$ であると考えることによつて、(7)の条件式を近似的に省略することができよう。この場合(6)、(8)、(9)に代る条件式は

$$(\frac{\lambda}{2}+\frac{\alpha^R}{A}\frac{\partial A}{\partial x})_r=R_r x_r^{-1} \cdots \cdots \cdots (11)$$

であり、左辺は $f(p)=\frac{2R_p}{\lambda_p}\frac{\alpha_p}{A_p}\frac{\partial A_p}{\partial x}\cdots\cdots(12)$ を用いて、 $\{\lambda_r+\alpha_r f(p)\frac{R_r}{x_r}\}/\{1+f(p)\}$ と変形されるから、(11)式は結局次のように与えられる。

$$\lambda_r=\{1+f(p)(1-\alpha_r)\}\frac{R_r}{x_r}\cdots\cdots(13) \quad \alpha_r n_r=\{1+f(p)(1-\alpha_r)\}^{\frac{1}{2}} R_r^{\frac{2}{3}} x_r^{\frac{1}{6}}\cdots(14)$$

なお、 $f(p)$ は原型に関する量であるが、 α_r が λ_r の関数であるから、上式の計算は挿入法によらねばならない。以上が相似の基本条件であり、長さの縮尺に対応する諸量の縮尺が規定される。そしてこのような条件をいかにして具現するかが、実験の成否を決める最大の焦点となる。

2. 模型歪み

相似の条件式から決定すべき基本的縮尺は平面縮尺 x_r 、鉛直縮尺 H_r 、時間縮尺 t_r 、および粗度係数の縮尺 n_r (or λ_r) の四つであり、それらは(5)と(14) (or (13)) で規定される。したがつて、四つの縮尺のうち、二つは任意に選定できることになる。任意に選定する縮尺として、普通 x_r と H_r とがとりあげられる。しかし、実際問題としては、いずれも実験施設の能力および実験技術の精度による制約がつきまとい、二つの縮尺が全く自由に選定できるというわけではない。 t_r に関する制約は計測器の能力に起因する場合が多く、 n_r に関しては、それをむやみに大きくすることも小さくすることも不可能であるという絶対的な制約がある。したがつて、 x_r と H_r の選定には、たえず計測器の能力および粗度の可能性に留意しなければならないが、ここではまず x_r と H_r とを独立に選ぶ場合の原型に対する模型の幾何学的歪みが、相似条件にどのような影響を与えるかについて考察してみよう。

$$\text{いま模型歪みを}\varepsilon\text{であらわし、}\varepsilon=H_r/x_r \cdots \cdots \cdots (15)$$

とおけば、(5)および(14)式はそれぞれ

$$t_r=\varepsilon^{-1} H_r^{\frac{1}{2}} \cdots \cdots (16) \quad n_r=\varepsilon^{\frac{1}{2}} (R_r/H_r)^{\frac{2}{3}} \{1+f(p)(1-\alpha_r)\}^{\frac{1}{2}} H_r^{\frac{1}{6}} \cdots \cdots (17)$$

あるいは、模型の諸元として

$$t_m=(\varepsilon^{-1} H_r^{\frac{1}{2}}) t_p \cdots \cdots (16)' \quad n_m=[\varepsilon^{\frac{1}{2}} (R_r/H_r)^{\frac{2}{3}} \{1+f(p)(1-\alpha_r)\}^{\frac{1}{2}} H_r^{\frac{1}{6}}] n_p \cdots \cdots (17)'$$

となる。

上式から明らかなように、模型歪み ϵ は同じ鉛直縮尺 H_r に対して、より短い時間元 t_m と、より大きい粗度 n_m とを模型に要求する。 t_m については ϵ は単純に逆比例するが、一方 n_m については、 R_r/H_r の値が一般に ϵ の関数になるから、その変化は水路の断面形状によつて必ずしも一様ではない。たとえば、長方形断面水路では、水深の水路半巾に対する比を r であらわして

$$\frac{R_r}{H_r} = \frac{(r_m/\epsilon) + 1}{r_m + 1} \sim \frac{1}{r_m + 1} \dots\dots\dots(18)$$

であり、三角形断面では、自由水表面と潤辺とのなす角を w および w であらわして

$$\frac{R_r}{H_r} = \frac{1}{\epsilon} \frac{\sqrt{1 + \epsilon \cot^2 w_{1m}} + \sqrt{1 + \epsilon \cot^2 w_{2m}}}{\sqrt{1 + \cot^2 w_{1m}} + \sqrt{1 + \cot^2 w_{2m}}} \dots\dots\dots(19)$$

また台形断面では、水深の底辺の長さに対する比を r^1 とにおいて

$$\frac{R_r}{H_r} = \frac{1}{\epsilon} \frac{\{\sqrt{1 + \epsilon \cot^2 w_{1m}} + \sqrt{1 + \epsilon \cot^2 w_{2m}}\} r'^1_{m+1}}{\{\sqrt{1 + \cot^2 w_{1m}} + \sqrt{1 + \cot^2 w_{2m}}\} r'^1_{m+1} + 1} \sim \frac{1}{(\sqrt{1 + \cot^2 w_{1m}} + \sqrt{1 + \cot^2 w_{2m}}) r'^1_{m+1} + 1} \dots\dots\dots(20)$$

である。(19)式の三角形断面水路における R_r/H_r は水深を因子に有しないが、その他の断面形において R_r/H_r の値が水深に応じて変化することは、きわめて重要であり、そのような断面形状をもつ水路においては、模型歪みの効果が単により大きい値の n_m を要求するだけでなく、 n_m の水深に対する特性も、原型のそれと異なるものを要求することになる。

模型を歪ませない $\epsilon = 1$ の場合においても相似条件は、

$$n_m = \{1 + f(p)(1 - \alpha_r)\}^{1/6} H_r^{1/6} n_p \dots\dots\dots(21)$$

であり、 $\alpha_r = 1$ が成立しなければ、厳密には模型に要求される n_m と原型の n_p とは線形的関係にないが、模型歪みはそれをさらに歪める役割りをもつことになる。

一般に固定床の小水路の粗度係数は、潤辺粗度の構成に大きな変化がない限り、水深の減少とともに増大し、水深が小さいほどその変化は急である。これに対して実河川の粗度係数は、個々の河川区間によつて異なり、表面粗度が支配的である場合でも、粗度係数の水深に対する変化は、同じ潤辺粗度の構成をもつ小水路のそれと線形的に関係づけられないのが普通である。したがつて、 n が n_p に対して一定比率に近い関係を要求される場合には、模型水路の水深が小さいことによつて生ずる粗度係数の変化を補うなんらかの工作が必要となる。この欠陥は大型模型の採用によつて避け得る場合もあるであろうが、模型における潤辺粗度の構成を変えて流水に対する潤辺粗度の効果を歪めることも一法であろう。

(17)式に含まれる因子 R_r/H_r は $\epsilon > 1$ の場合に、模型水深が小さいほど大きい値をとり、 n_m の n_p に対する歪みは、定性的に固定床表面粗度の特性、すなわち水深が小さくなるほどより大きい粗度係数をとるという特性に一致する。したがつて、採用しようとする模型縮尺の大きさ、原型の n_p の特性および使用できる人工粗度の特性など、個々の実験によつて相違はあろうけれども、少なくとも小縮尺の実験水路に大きい粗度が要求される場合には、 $\epsilon > 1$ の適切な模型歪みの採用、模型の粗度選定を容易にするに違いない。このように模型歪みは単に方便としてではなく、固定床模型水路の抵抗特性を補うという点で相似律成否に重要な意義をもつものと考えられる。

つきに一般断面形の基本型として長方形断面をとりあげ、模型歪みの効果を具体的に求めてみよう。

長方形断面水路の R_r は (18) 式で与えられるが、 r の代りに径深の水路半巾に対する比を用いて、これを Γ であらわせば

$$R_r/H_r = \Gamma_r / \varepsilon \quad \dots\dots\dots (22)$$

であるから、条件式(7)は、

$$n_r = \varepsilon^{-1/6} \Gamma_r^{2/3} \{1 + f(\alpha_r)(1 - \alpha_r)\}^{1/2} H_r^{1/6} \quad \dots\dots\dots (23)$$

となる。 α_r について、縮尺選定の途上では 1 と見なし、粗度を決定する際に改めて考慮するのが実際のであるから、ここでは

$$n_r = \varepsilon^{-1/6} \Gamma_r^{2/3} H_r^{1/6} \quad \dots\dots\dots (24)$$

あるいは、 $n_r = \Gamma_r^{2/3} H_r^{1/6}$ }

を基本式と考えよう。長方形断面においては、

$$\Gamma_r = \varepsilon(1 - \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \Gamma_m) \text{ or } = \frac{\varepsilon}{1 + (\varepsilon - 1) \Gamma_p}$$

の関係があるから (24) 式は

$$\frac{n_r}{H_r^{1/6}} = \varepsilon^{-1/6} (1 - \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \Gamma_m)^{2/3} = (\frac{\Gamma_m}{\Gamma_p})^{1/2} (\frac{1 - \Gamma_m}{1 - \Gamma_p}) \quad \dots\dots\dots (25)$$

$$\frac{n_r}{x_r^{1/6}} = (1 - \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \Gamma_m)^{2/3} = (\frac{\Gamma_m}{\Gamma_p})^{2/3} \quad \dots\dots\dots (26)$$

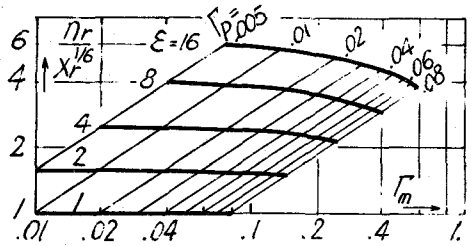
と変形できる。(25) 式が鉛直縮尺 H_r を固定したときの ε の効果をあらわし (26) 式が水平縮尺 x_r を固定したときの ε の効果をあらわす。

図-1 は (26) 式を図化したものであり、太線は ε を、細斜線は Γ_p をパラメーターとして描いたものである。便宜上これらをそれぞれ ε -線および Γ_p -線と名付けよう。原型の Γ_p は ε が与えられれば、 ε -線と Γ_p -線との交点からただちに模型の Γ_m に換算される。また、図の縦距は $\log_{10} n_r/x_r^{1/6} = \log_{10} n_m - \log_{10} (n_p x_r^{1/6})$ であるから ε -線と Γ_p -線との交点を縦距に沿って、 $-\log_{10} (n_p x_r^{1/6})$ だけ移動すれば、簡単に $(\log_{10} n_m, \log_{10} \Gamma_m)$ の点を図上に求めることができる。したがって、原型の粗度係数 n_p の一定値に対応する模型の粗度係数 n_m の歪みが ε -線であらわされ、 ε が大きいほど (24) 式で要請される n_m の n_p に対する歪みも大きくなることがわかる。図-1 の縦軸を $\log_{10} (n_m/H_r^{1/6})$ あるいは $\log_{10} (n_m/x_r^{1/6})$ に変換し、 ε の各値ごとに n_p をパラメーターとして ε -線を描けば、 ε の効果を一層直感的に理解でき、 n_p が Γ_p とともに変化する場合の n_m も容易に見出すことができる。図-2 はその一例であり、同図には参考例として河巾 260 米の実河川における資料がプロットしてある。

3. 縮尺と人工粗度の選定

前述のように、諸量の縮尺選定の自由度は 2 であるが、いかに滑らかな水路を作つても n_m を 8×10^{-8} 以下にすることは不可能であり、また n_m を大きくするために、非常に大きい障害物を設けることは流れの境界条件を損ねることになるから、 n_m の実現性にはとくに留意しなければならない。縮尺選定の手順は、まず H_r と x_r の種々の組み合わせを仮定して、要求される n_m と各種人工粗度の

図-1. 模型歪みの効果



抵抗特性との対応を検討し、模型製作および実験観測に好都合と判断されるものの中から適当に選択するわけである。現実には、原型の粗度係数は水位変化とともにさまざまな変化を示すものであるから、固定床水路の人工粗度によつて、それらに対応する n_m の特性を実現するには、個々の場合に応じて工夫を要する。とくに n_p が水位上昇とともに増大する特性を有する場合の人工粗度選定は容易でなく、実験の対象となる水位変化の範囲内で、平均的に相似条件が成立することだけで満足しなければならぬ場合も考えられる。しかし、そのような場合においても、できるだけ相似条件から要請される抵抗特性に近いものを採用すべきである。つぎに、図-2にプロットした n_p が R_p とともに増大する実河川の資料を一例として、縮尺および粗度の選定操作を考えてみよう。

まず、図-2の $n_m/x_r^{1/6} \sim \Gamma_m$ の関係から、模型歪みと人工粗度の特性との関連を検討する。前図においては、 $\varepsilon=1, 4$ および 16 について別々に示したが、さらに $\varepsilon=2$ および 8 に対するものをつけ加えて、それらを一つの図に写し換えれば、模型に要求される $n_m \sim \Gamma_m$ の関係は、各 ε の値に対して図-3の各丸印のようにプロットされる。一方著者の実験によれば、各種人工粗度の基本特性は次のように書きあらわすことができる。

$$\text{砂粒粗度 (完全干渉流)} : \frac{n_m}{x_r^{1/6}} = \left(\frac{B_p}{2}\right)^{1/6} \frac{\Gamma_m^{1/6}}{\sqrt{g}} / \{6.0 + 5.75 \log_{10} (\Gamma_m B_m / 2K' s_m) \} \dots\dots\dots 27$$

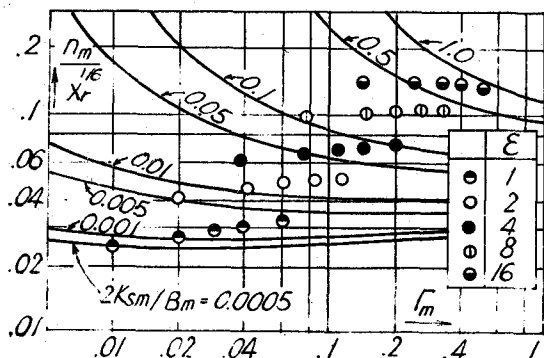
$$\text{棧型粗度 (不完全干渉流)} : \frac{n_m}{x_r^{1/6}} = \left(\frac{B_m}{2}\right)^{1/6} \frac{\Gamma_m^{1/6}}{\sqrt{g}} / [1.50 \log_{10} (S_m/k_m) - 1.91 + \{5.75 + 0.12 (S_m/K_m)^{0.8}\} \log_{10} (\Gamma_m B_m / 2k_m)] \dots\dots\dots 28$$

$$\text{溝型粗度 (完全干渉流)} : \frac{n_m}{x_r^{1/6}} = \left(\frac{B_p}{2}\right)^{1/6} \frac{\Gamma_m^{1/6}}{\sqrt{g}} \{0.25 + 1.90 \log_{10} (S_m/l_m) + 5.75 \log_{10} (\Gamma_m B_m / 2K_m) \} \dots\dots\dots 29$$

$$\text{イボ型粗度 (完全干渉流)} : \frac{n_m}{x_r^{1/6}} = \left(\frac{B_p}{2}\right)^{1/6} \frac{\Gamma_m^{1/6}}{\sqrt{g}} / \{5.4 \log_{10} (S_m/F_m) - 5.47 + 1.06 \log_{10} (\Gamma_m B_m / 2K_m) \} \dots\dots\dots 30$$

ここに、 K' は砂粒粗度の粒径あるいは相当砂粒粗度、 K は粗度要素の高さ、 S は粗度要素間隔、 b は溝巾、 S は粗度要素の流れに対する投影面積、 F は粗度要素1個当りの壁面面積である。したがつて、原型の水路巾 B_p が与えられれば、砂粒粗度については $2k's_m/E_m$ を、棧、溝、イボの人工粗度については、それぞれ相対粗度間隔 s_m/k_m 、 s_m/b_m および S_m/F_m ごとに、 $2k_m/B_m$

図-3. 相似条件と完全干渉流の抵抗特性



歪 ε	粗 度 $2k's_m/B_m$	適 用 範 囲	
		R_p (m)	$\Gamma_m = 2R_m/E_m$
1	1×10^{-3}	2.3~6	0.018~0.046
2	1×10^{-2}	2.5~6	0.042~0.09
4	6×10^{-2}	3~6	0.09 ~0.16
8	2×10^{-1}	3~6	0.16 ~0.27
16	6×10^{-1}	3.5~6	0.31 ~0.45

をパラメーターとして、 $n_m/x_r^{1/6} \sim I_m$ 曲線を描くことができる（各記号の添字mは、それらを模型水路に使用すればという意味で付け加えたものである）。これらの各人工粗度の抵抗特性を、相似条件から要求される $n_m/x_r^{1/6} \sim I_m$ の関係に直接重ね合わせれば、採用すべき人工粗度の形式と大きさを見出すことができる。いま、代表例として、砂粒粗度の抵抗特性を重ね合せたものが、図-3の実線群であり、 ϵ の各値に対して、採用できる相当砂粒粗度は上表のように判定できよう。図-3から明らかなように、この場合相似条件に規定される n_m は、 $\epsilon=16$ のときほぼ一定値であるが、 ϵ を少々大きくとつても、粗度係数が水位上昇とともに増大する特性を決定的に逆転することは難しく、一方、 ϵ が大きいくほど、原型の同一水位に対する模型の I_m も大きくなるため、相似条件に想定される n_m の特性はますます人工粗度の基本特性から離れ、適用範囲が狭くなっている。この点は模型縮尺の歪みだけでなく、模型水路の粗度構成の歪み、すなわち底面粗度と側壁粗度を変えることによつても補うことができる。その詳細な計算は省略するが、底面と側壁の粗度が相違する水路の全体としての粗度係数は、それぞれの粗度の基本特性の中間の特性を示し、 $I=0$ で底面のそれに、 $I=1.0$ で側壁のそれに漸近する。したがつて、側壁の粗度を底面の粗度よりも大きくすれば、図-3の実線群に示される間辺均一な粗度の場合よりも、粗度係数の水位に対する変化を緩和し、場合によつては逆の特性を与えることもできないわけではない。

このようにして、実現可能な縮尺の組み合わせがわかれば、つぎに実験施設、計測装置の能力を勘案して、縮尺と人工粗度を決定する。人工粗度の形式選択の一応の基準は、 $k'_{sm}/k_m = 5 \sim 10$ のとき稜型、 $1 \sim 5$ のとき溝型、そして重複するけれども $0.5 \sim 3$ のときイボ型を採用する。

なお、上の議論は模型の流れが乱流であることを前提としているから、層流になる場合は改めて、相似律を検討しなければならない。層流を生ずる限界は水路の形状によつても若干差異があるようであるが、一応レイノルズ数 R が500以下のとき層流、1500以上のとき乱流、その中間は遷移領域と考えてよいであろう。したがつて、模型の乱流になるために必要な縮尺関係は、 $H_r^{1/2} R_r > 1500 \nu_r / \nu_{ep}$ であり、 $H_r^{1/2} R_r < 500 \nu_r / \nu_{ep}$ であれば層流ということになる。ここに ν は動粘性係数である。

水路断面形状の効果を考慮した開水路層流の抵抗則は、一般に次式で与えられる。

$$n = K_1 / (R^{4/3} \sqrt{g I_0} / \nu) \quad (n \text{ sec}) \quad \dots\dots\dots (31)$$

ここに K_1 は断面形状による係数で、長方形断面では

$$K_1 = 0.96 \{ r / (1+r) \}^2 / [1 - (192/\pi^5) r \sum_{i=0}^{\infty} \{ \tanh(2i+1) \pi / 2r \} / (2i+1)^5] \dots\dots\dots (32)$$

である。(31)式に示されるように、層流においては人工粗度の意味は失われ、 n は R の $-4/3$ 乗に比例する。したがつて、模型の層流になる場合には、模型水路の粗度選択に自由度がなく、 ν はほぼ一定値であることから、相似条件における縮尺選定の自由度は1となり、 x_r および H_r （したがつて ϵ ）を独立に選ぶわけにはいかない。すなわち、長さの縮尺は(24)式と(31)式とから得られる次式

$$R_r^{3/4} x_r^{-1/2} = 0.96 K_{1m} / (n_r R_m^{4/3} \sqrt{g I_{cm}} / \nu_m) \quad \dots\dots\dots (33)$$

を満足しなければならない。また、要請される K'_{sm} が小さい場合には、乱流であつても、粗面から滑面へ遷移する可能性があるからその点の吟味も行なう必要がある。このようにして、相似条件を満

足する模型縮尺と人工粗度の種々の組合せが見出され、 x_r を大きく選べば、その組合せも際限なく数えあげることができる。実際にはそれらの中から種々の条件を考慮し場合によつては予備実験を併用して一つを選ぶことになるが、人工粗度の採用は比較的長い水路区間の平均値を対象とすることを常に念頭におくことが必要であろう。