13　Unit-hydrograph と流出函数

大阪大学・工学部　　田 中　清

本文はかって土木学会関西支部で講演したものを修正したものである。

1. Unit-hydrograph の概念 ： 玉手箱（Black box）に励起（Excitation）を加えると，時間的遅れをともなった応答（Response）があるとき，その玉手箱のからくりを開かぬまゝで，励起と応答との関係を定めるための物理的手段があり，数学的には積分方程式の形式をとる。一つの河川の流域を玉手箱とし，その流域の降雨を励起，河川の流量を応答とみなして，流域の流出機構に立ち入らないで降雨量から直ちに河川流量を求める方法が Unit-hydrograph の方法である。玉手箱の余効函数（After-effect function）を $f(t)$ とし、その操作の時間的遅れを $t-t_0$，時刻 t における降雨強度を $x(t)$，流量を $y(t)$ とすれば，

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t} x(t_0)\ f(t-t_0)\,dt_0 \qquad (1)$$

こゝに $t<t_0$ では，$f(t-t_0)=0$ とする。

$t-t_0=\tau$ とすれば，$y(t)=\int_0^{\infty} f(\tau)\,x(t-\tau)\,d\tau$ (2)

単位降雨 $x(t)=\delta(t-t_0)$（たゞし δ；Dirac 函数）に対しては $y(t)=f(t-t_0)$ となり、水文学的には余効函数 $f(t-t_0)=f(\tau)$ が基本 Unit-hydrograph である。

(2)は，

$$\int_0^{\infty} y(t)\,dt=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} f(\tau)\,x(t-\tau)\,d\tau\cdot dt=\int_0^{\infty} x(t)\,dt\cdot\int_0^{\infty} f(\tau)\,d\tau$$

となり、$Q=\int_0^{\infty} y(t)\,dt$ は総流出量，$R=\int_0^{\infty} x(t)\,dt$ は総降雨量，$K=\int_0^{\infty} f(\tau)\,d\tau$ は流出係数，となる。$x(0)=0$，$x(\infty)=0$，$f(0)=0$，$f(\infty)=0$ とする。

この操作にあたってつぎの二つの仮定が必要である。

(1) 定常性の仮定 ： 励起 $x(t)=x_1(t)$ に対し、応答が $y(t)=y_1(t)$ ならば，励起：$x(t)=x_1(t+\tau)$ に対し、応答は $y(t)=y_1(t+\tau)$ である。

(2) 線型性の仮定 ： 励起 $x(t)=x_1(t)$，$x(t)=x_2(t)$ に対し応答がそれぞれ $y(t)=y_1(t)$ $y(t)=y_2(t)$ ならば、励起 $x(t)=ax_1(t)+bx_2(t)$ に対し応答は $y(t)=ay_1(t)+by_2(t)$。

これらの仮定に対し洪水の流出現象は必ずしも常に成立するとは限らない。一般に流域の大きな河川ではこれらの仮定が近似的に成立するようであるが、わが国の中小河川ではその違反が大きい。違反の原因としては，(1) わが国のように狭い区域に集中豪雨のある場合には流域に対する時系列的な降雨分布によって $f(t)$ に差がある。(2) 流域の降雨に対し履歴現象を考慮せねばならない。これは滲透能の変化である程度補正されよう。(3) 洪水に伴う河状変動の影響。水位による河道貯溜量や氾濫滞水量の差と流速の差による時間的遅れの差，等がある。(4) 流出機構の非線型性。このような水文学的モデルは容易に作られる。たとえば豪雨による地下水系の組織の破壊等が考えられる。この場合には，

$\int_0^{\infty}|f(\tau)|d\tau$ ：有限確定値なる系の安定性の條件にも関係する。

2. Unit-hydrograph の改変：流出機構が上記の2仮定に反することから，玉手箱のからくりを明すことはUnit-hydrographの本質からは違反することになる。しかし，わが国ではどうしてもこの玉手箱の機構に触れなければならないようである。

(1) 流域の降雨履歴に対する改変：流域の滲透能 g は降雨継続時間 t によって

$$g(t)=g_{\infty}+(g_0-g_{\infty})e^{-kt} \qquad (3)$$

こゝに，g_0＝初期滲透能，g_{∞}＝終極滲透能，$g_0>g_{\infty}$。

短時間の流出機構において，降雨量を表層流出（表面流出とSub-layer流出）と滲透分から成るものとして，$x(t)$ の代りに $t\geqq 0$ に対して

$$\xi(t)=x(t)-\left\{g_{\infty}+(g_0-g_{\infty})e^{-kt}\right\} \qquad (4)$$

なる有効流出分：$\xi(t)$ を用い，

$$y(t)=\int_0^{\infty}f(\tau)\left[x(t-\tau)-\left\{g_{\infty}+(g_0-g_{\infty})e^{-k(t-\tau)}\right\}\right]d\tau \qquad (t\geqq\tau) \qquad (5)$$

としてもよい。一般には $\left\{g_{\infty}+(g_0-g_{\infty})e^{-kt}\right\}$ を一定と仮定し，$\xi(t)$を有効降雨としている。

また表層流出に対する余効函数を $f_1(t)$，地下水流出に対する余効函数を $f_2(t)$ として，

$$y(t)=\int_0^{\infty}f_1(\tau)x(t-\tau)d\tau+\int_0^{\infty}f_2(\tau)\,x(t-\tau)d\tau \qquad (6)$$

の形にして考えることも出来る。

(2) 流域の降雨分布に対する改変：河川にそって位置座標を z とし，流域の降雨分布を $x(t,z)$ とし，余効函数を $f(t,z)$ とすれば

$$y(t,z)=\int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{z'}x(t_0,z_0)\cdot f(t-t_0,z-z_0)dt_0\cdot dz_0 \qquad (7)$$

こゝに $z<z_0$ で $f(t-t_0,z-z_0)=0$ とす。$z-z_0=\zeta$ とおけば形式的に

$$y(t,z)=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}f(\tau,\zeta)\cdot x(t-\tau,z-\zeta)d\tau\cdot d\zeta \qquad (8)$$

なる拡張も考えられる。ことに $f(t,z)=f_1(t)\cdot f_2(z)$ (9) であれば取扱いは容易である。

3. 任意の降雨からのUnit-hydrographの作製：いままでのUnit-hydrographの作製には独立した一様な強い降雨だけが用いられていた。(1)の $f(t)$と $x(t)$ とは変換可能であってStieltjesの結合函数となっている。（証明略）。これらによって任意の降雨強度分布をする降雨とそれらに対する河川流量とが函数形で与えられれば，余効函数 $f(t)$ としてのUnit-hydrographは求められる。

4. 流出函数：余効函数 $f(t)$の形を経験的に仮定する方法が流出函数の方法である。Unit-hydrographの形は一般にPearsonのⅢ型分布に近い。（Ⅰ, or Ⅴ型を用いてもよい。）

その原点を一端にとり

$$f(t)=\frac{\nu}{\Gamma(p)}(\nu t)^{p-1}e^{-\nu t}, \quad こゝに\ \nu>0,\ p>1 \qquad (10)$$

何回かの出水観測からU-Hyd.graphを作りその時間基長の中心周りの2次，3次の乗積モーメントを μ_2, μ_3 とすれば $\nu=2\mu_2/\mu_3$，$p=4\mu_2^3/\mu_3^2$ (11) として求められる。