9　偶然累加現象としての流出

都立大学　正員　　丸井信雄

河川の流域に降った雨は支流から本流に合して流下して流量観測地点に到達するのであるから，或る地点の降雨は同時刻に本流上の或る地点に降った雨と一緒に観測地点に達する。そこで，流域の平面上に分布した降雨を本流線上に降ったものと見做し，その本流線上に分布する仮想降雨を更に本流と対応する x 軸上に於ける降雨と考える。しかして，x 軸上に降った雨は時間の経過と共に x 軸上で分散して拡がり，その分散は“偶然”に支配され，かつ互いに“独立”であるものと考える。その様に考えると，一定の流量観測地点を通過する流量はこの雨水の分散の過程に於ける流域各地点の各時刻の降雨の独立量累加として把握され，確率論の方法が適用出来よう。

1.　基礎式の誘導

今，時間の始めに $x=\xi$ に降った雨の粒子が t 時間後に x に在る確率密度を $f(x,\xi;t)$ とする。時刻 t に於ける x 軸上の粒子（水量）の分布密度を $\varphi(x,t)$ で表わすと，
時刻 $t=t$ に微小区間（ξ，$\xi+d\xi$）にある粒子 $\varphi(\xi,t)d\xi$ が Δt 時間後に（x，$x+dx$）内に来ている確率は

$$f(x,\xi;\Delta t)dx\cdot\varphi(\xi,t)d\xi \tag{1}$$

である。従って

$$\varphi(x,\ t+\Delta t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,\xi;\Delta t)\cdot\varphi(\xi,t)d\xi \tag{2}$$

上式の関係から $\varphi(x,t)$ の形を求めるのであるが，$f(x,\xi,t)$ に次の関係を仮定する。

$$\left.\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty}f(x,\xi,t)d\xi=1\\
&\int_{-\infty}^{\infty}(\xi-x)f(x,\xi,t)d\xi=m(x,t)\qquad\text{（平均値，平均速度）}\\
&\int_{-\infty}^{\infty}(\xi-x)^2f(x,\xi,t)d\xi=\sigma^2(x,t)\qquad\text{（分散率，分散速度）}\\
&\frac{1}{t}\int_{-\infty}^{\infty}|\xi-x|^3f(x,\xi,t)d\xi\longrightarrow 0\qquad(t\to 0)
\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

(3)のうち平均値及び分散率については，独立即ち時間的にも場所的にも“一様である”現象と考えているのであるから，（一様な偶然累加現象）

$$\left.\begin{aligned}
&m(x,t)=m(x)\cdot t=m\cdot t\qquad(m=\text{const})\\
&\sigma^2(x,t)=\sigma^2(x)\cdot t=\sigma^2 t\qquad(\sigma^2=\text{const})
\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

となる。

(2)式に，補助関数を用いて，両辺をそれぞれ Taylor 展開して(3)の関係を用いれば，雨水の分布を表わす関係として，次の微分方程式が得られる。

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=-m\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} \tag{5}$$

上式は積分によって

$$\frac{d}{dt}\int_a^b\varphi(x,t)\,dx=\left|-m\varphi+\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_a^b \tag{6}$$

と書きかえられ，この式の左辺は（a，b）区間に存在する水量の確率の時間的変化，即ち（a，b）区間から流出する水量の割合を表わす。

次に(5)式に対して，$x=\xi$の点にのみ集中して降雨が時刻$t=\tau$に瞬間的にあった場合と条件を与えれば，(5)式の解は（$t>\tau$，$\sigma>0$）

$$\varphi(x,\xi;t,\tau)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma\sqrt{t-\tau}}\,e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{m\sqrt{t-\tau}}{\sigma}-\frac{x-\xi}{\sigma\sqrt{t-\tau}}\right)^2} \tag{7}$$

2．流出関数及び流出強度関数

(7)式で与えられるものは強度1なる瞬間的降雨による分布であるが，このような降雨によって生起すべき流出の時間的変化を表わすものを流出強度関数と呼ぶ。前述のような降雨がありこれをx点に於て流量観測をするものとすると，流出強度qはx点をxの＋の方向に通過する量となるから，次式で与えられる。

$$\begin{aligned}q&=-\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{x}\varphi(x,\xi;t,\tau)\,dx\\&=\left|m\cdot\varphi-\frac{\sigma^2}{2}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_{-\infty}^{x}=\frac{\frac{m\sqrt{t-\tau}}{\sigma}-\frac{x-\xi}{\sigma\sqrt{t-\tau}}}{2\sqrt{2\pi}(t-\tau)}\,e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{m\sqrt{t-\tau}}{\sigma}-\frac{x-\xi}{\sigma\sqrt{t-\tau}}\right)^2}\end{aligned} \tag{8}$$

ここにm/σ及び$(x-\xi)/\sigma$は降雨には無関係でその流域の特性を表わす定数であると考える。（このqは実際に観測する事は出来ない。）

更に強度1の降雨がT時間継続した場合が所謂 unit graph（流域単位面積当り）となるので，それは(8)を（τ，$\tau+T$）の時間範囲で積分したものとして得られる，即ち，雨の降り始めを$\tau=0$として

$$\begin{aligned}Q_0&=\int_0^T q\,d\tau\\&=\int_0^T\frac{\frac{m\sqrt{t-\tau}}{\sigma}-\frac{x-\xi}{\sigma\sqrt{t-\tau}}}{2\sqrt{2\pi}(t-\tau)}\,e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{m\sqrt{t-\tau}}{\sigma}-\frac{x-\xi}{\sigma\sqrt{t-\tau}}\right)^2}\cdot d\tau\end{aligned} \tag{9}$$

$m\sqrt{t-\tau}/\sigma+(x-\xi)/\sigma\sqrt{t-\tau}=u$ とおき流域特性の定数を $-\sigma/m=\alpha$，$(x-\xi)/\sigma=\beta$ (10)

とおいて上の積分を計算する。α，βの dimension は共に$[T]^{\frac{1}{2}}$である。

$$Q_0=e^{-2\frac{\beta}{\alpha}}\int_{\frac{\beta}{\sqrt{t}}-\frac{\sqrt{t}}{\alpha}}^{\frac{\beta}{\sqrt{t-T}}-\frac{\sqrt{t-T}}{\alpha}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}du\qquad(t>T)$$

更に $\int_{-\infty}^{X}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}du=\Phi(X)$ とおけば

$$\left.\begin{aligned}&t\geqq T\text{ の時}\qquad Q_0=e^{-\frac{2\beta}{\alpha}}\left[\Phi\left(\frac{\beta}{\sqrt{t-T}}-\frac{\sqrt{t-T}}{\alpha}\right)-\Phi\left(\frac{\beta}{\sqrt{t}}-\frac{\sqrt{t}}{\alpha}\right)\right]\\&0<t<T\text{ の時}\qquad Q_0=e^{-\frac{2\beta}{\alpha}}\left[1-\Phi\left(\frac{\beta}{\sqrt{t}}-\frac{\sqrt{t}}{\alpha}\right)\right]\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

3. 流域特性定数（α, β）

この理論に現われる流域の特性を表わす定数α及びβは共に降雨の状態は勿論，單位図に於て考慮する降雨継続時間Tにも無関係であって，唯流域の地形（形状，大きさ，勾配等），地質，森林状況等にのみ関係すると考えられる。

前の(5)或は(8)式及び(10)式からわかる様に，$\alpha\to\infty$ 即ち$m\to 0$の場合は，(5)式は熱伝導の方程式となる。この場合については，筆者は既に報告した（都立大学工学部報告；英文 昭和34年3月）処である。また$\sigma\to 0$の場合は(8)式から"流出量は流域に貯留されている水量に比例する"と言う理論と同一になる。

mは分散の場合の平均速度であるが，この流出の場合これに関係するものは重力であるから，流域の勾配が大きい程この値は大きいと想像され，従ってαは小さい値をとるであろう。

βは（$x-\xi$）即ち流域の降雨を代表する様な地点と流量観測地点との距離により，その距離が大きい程βの値も大きいであろう。但し，この距離は流路に沿った長さで測られるのが良いであろうけれども，流路延長は使用する地図の縮尺によって一定にならないので，これの代用として，流域の図心から観測地点までの直線距離（降雨が流域に均等に降った場合とする様な時）或は，集中降雨地点から観測地点までの直線距離を用いるのが良い様である。

α及びβの決定は実測による結果に合致する様に(11)式から試算によって求めなければならないが，βの決定には降雨，流量ともに1時間単位観測値が望ましく，αの決定にはより長時間の推移が必要になるので1日単位の観測値が正確を期する為には必要になる。

計算例；

河川名	流量観測地点	流域面積(km²)	図心からの距離(km)	α(hr)	β(hr)
狩野川	大仁	322	7.6	20	2
多摩川	熱海	253	12.5	10	3
大井川	下泉	959	30.6	20	4
木曽川	桃山	1,098	15.1	20	3
蘭川	妻篭	44	3.5	30	2
神流川	若泉	371	22.5	5	3
鏑川	山名	550	23.8	10	3
烏川	君川橋	284	17.7	10	4
烏川	岩鼻	1,271	23.1	10	3
碓氷川	下河原	128	14.6	10	2
碓氷川	板鼻	266	13.5	20	2

（降雨は流域一様とした，αの値は概略値）

4. 基底流量，浸透能

この理論によると，基底流量は考慮する降雨については別に算出する必要はなく，唯，これより以前の降雨による流出が引続いているものだけとして良い。

浸透能については，降雨があっても河川の流量として直接には現われないものが確かに存

れする。これは蒸発と地中に浸透して地下水の様になって後に流出する分があるためと想像されるが、この部分は上記の理論には含まれないからこれに相当する分をあらかじめ降雨から差引いて置く事にする。しかし理論を単純化するために差引量を一定にして、その大体の量を二〜三の流域について調べて見ると、日雨量にして10粍前後となるから、10 ㎜/d を降雨強度曲線から差引いて残りの降雨について前述の理論即ち単位図法を適用すると良い。