6　雨量配分に関する確率論的研究

京都大学防災研究所　正員　工博　°石原安雄
仝　　正員　角屋睦

1. 序言

計画高水流量の設定に際し，計画日雨量の短時間雨量への配分方法が問題になることが多い。　これについて従来は Sherman type の降雨曲線相応の式，あるいは伊藤剛氏の経験法などが用いられて来たが，理論的に取扱われたものはなかったようである。　本来こうした問題は物理的に究明されねばならないであろうが，現段階においてはきわめてむつかしい。　本研究はこれについて若干の確率論的な考察を試みたものである。

2. 短時間雨量の確率分布

いまT時間雨量Rはt時間雨量xの $n=T/t$ ヶの合成量とする。　この種の問題を考えるにはxの確率素分がわかっていると好都合であるが，いまの場合わからないから，Rはnヶの偶然量xの和よりなる偶然量であり，かつ一応定まったある値をとったものとする。そうするとxの分布はRをn分したときの各成分の分布として求められる．　いまRをnヶに分割したときの $(n-1)$ ヶの分点を $z_1, z_2, \cdots\cdots z_{n-1}$ とし，かつ

$$\left.\begin{array}{l} 0 \leqq z_1 \leqq z_2 \leqq \cdots\cdots\cdots\cdots \leqq z_{n-1} \leqq R \\ z_1 = x_1\ ,\ z_2 = x_1 + x_2,\ \cdots\cdots \quad z_{n-1} = R - x_n \end{array}\right\} \tag{1}$$

とする。　そうすると z_1 が $z_1,\ z_1+dz_1,\ \ z_2$ が $z_2,\ z_2+dz_2, \cdots\cdots$ の間にある確率は，アプリオリにはそれぞれ dz/R で表わされる筈であり，これらが同時に起る確率は

$$p(z_1, z_2, \cdots z_{n-1})\,dz_1 \cdot dz_2 \cdots\cdots dz_{n-1} = \frac{(n-1)!}{R^{n-1}}\,dz_1 \cdot dz_2 \cdots\cdots dz_{n-1}$$

ところで

$$\frac{\partial(z_1, z_2, \cdots\cdots z_{n-1})}{\partial(x_1, x_2, \cdots\cdots x_{n-1})} = 1$$

を考慮すれば，各成分 $x_1, x_2, \cdots\cdots x_{n-1}$ の同時確率素分は

$$f(x_1, x_2, \cdots\cdots x_{n-1})\,dx_1 \cdot dx_2 \cdots\cdots dx_{n-1} = \frac{(n-1)!}{R^{n-1}}\,dx_1 \cdot dx_2 \cdots\cdots dx_{n-1}$$

あるいは単一成分 x_1 の確率素分 $f(x_1)dx_1$，および非超過確率 $F(x_1)$ は次式で示される。

$$\left.\begin{array}{l} f(x_1)dx_1 = \iiint\cdots\cdots\int_0^{1-x_1} f(x_1, x_2, \cdots x_{n-1})\,dx_1 \cdot dx_2 \cdots\cdots dx_{n-1} = (n-1)\left(1-\dfrac{x_1}{R}\right)^{n-2} d\left(\dfrac{x_1}{R}\right) \\ F(x_1) \;=\; 1 - \left(1-\dfrac{x_1}{R}\right)^{n-1}, \qquad\qquad 0 \leqq x_1 \leqq R \end{array}\right\} \tag{2}$$

したがって理念的には

$$1 - F(x_i) = i/n \quad , \quad i = 1, 2, \cdots\cdots n-1 \tag{3}$$

から，i/n の超過確率をもつような x_i を見出せば，T/n 時間雨量の各成分がわかる筈である。　しかしこの方法では，各成分の組合せの問題が残ってくる。　そこで実際にはnの値を変えて

$$1 - F(x_t') = 1/n \tag{4}$$

を満足する x_t を見出せば各 $t=T/n$ について常に最大値を含む雨量配分がわかる。

以上は雨量配分に関する一つの基本的な考え方であって，実際には，(4) 式を満足するような x_t が常に存在するというようなものではない。 実用的には $t=T/n$ 時間最大雨量 x_t は (4) 式を満足する x_t を実用上の下限値とみなし，$x_t \sim R$ の範囲の値を適宜採択する方式がよいであろう。 すなわち

$$P_r(x_t \geqq x_{t\beta}) \leqq \beta \qquad (5)$$

とするような危険率 β を適当に指定すると，t 時間最大雨量 $x_{t\beta}$ は次式より求めることができる。

$$\left(1-\frac{x_{t\beta}}{R}\right)^{n-1} = \frac{1}{n}\beta \quad , \quad n = T/t \qquad (6)$$

図1は $\beta=0.5\sim0.01$ を与えた場合の $x_{t\beta}/R_{24}$ の値を示したものであり，比較のため伊藤剛氏の範囲，Sherman type の配分式 $x_t/R_{24}=(t/24)^k$ で $k=1/2,\ 1/3$ のときの値を示しておいた。

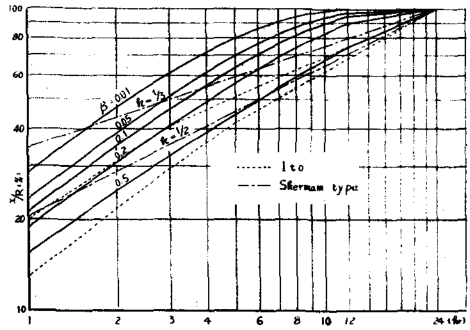

図1　$x_{t\beta}/R_{24}$ の値

3. 短時間雨量最大値の確率分布

前項では (4)，(6) 式を満足する x_t は t 時間雨量の最大値と常識的に考えたわけであるが，厳密に (5)，(6) 式あるいは図1のような表示を考えるときには，分割成分最大値の標本分布を考える必要がある。ただ本問題のように各成分の和が一定という条件の下での最大値の分布は数学的にも未解決の問題のようで，著者らも全面的にはその厳密解を得ていない。 そこで解き得た範囲内での解を利用して若干の考察をする。

式を簡単にするため前項での x/R をあらためて x と書く。 そうすると問題は

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 + \cdots\cdots + x_n = 1 \\ \max(x_2, x_3, \cdots x_{n-1},\ 1-x_1-x_2-\cdots-x_{n-1}) \leqq x_1 \\ x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots x_{n-1} \quad ; \quad \text{independent variable} \end{array}\right\} \qquad (7)$$

を解けばよいが，これは $(n-1)$ 次元の超平面での確率を考えねばならないので，x_1 がつぎのような範囲にある場合よりわからなかった。 簡単に結果のみ示すとつぎのようである。

$$1 \geqq x_1 \geqq 1/2 \ ; \quad \left.\begin{array}{l} p(x_1)dx_1 = n(n-1)(1-x_1)^{n-2}dx \\ P(x_1) = 1-n(1-x_1)^{n-1} \end{array}\right\} \qquad (8)$$

$$1/2 \geqq x_1 \geqq 1/3 \ ; \quad \left.\begin{array}{l} p(x_1)dx_1 = n(n-1)\left[(1-x_1)^{n-2} - (n-1)(1-2x_1)^{n-2}\right]dx_1 \\ P(x_1) = 1-n(1-x_1)^{n-1} - \frac{n(n-1)}{2}(1-2x_1)^{n-1} \end{array}\right\} \qquad (9)$$

$x_1 \leqq 1/3$ のときは $n=4$ の場合は簡単にわかるが，$n \geqq 4$ のときは次元が高くなるのでよくわからない。 $n=4$ の場合を示すとつぎのようである。

$$n=4, \quad 1/3 \geq x_1 \geq 1/4 \; ; \quad \left.\begin{aligned} p(x_1)dx_1 &= 12\,(4x_1-1)^2\,dx_1 \\ P(x_1) &= (4x_1-1)^3 \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

以上によって $n \leq 4$ のときは厳密解が得られたことになるから，例えば 24 時間雨量より 1 時間最大雨量を求めるには，R_{24} を 4 分し更に 3 分，2 分と細分化していけば，$n>4$ のときの解を類推することは不可能ではない。　ただこの方法は確率の評価があいまいになる欠点がある。

さて実用上われわれが問題にするのは，配分された各 $t=T/n$ 時間雨量の最大値 x_t が，これ以上大きな値をとることはないであろうという限界を押えることである。　すなわち適当な有意水準として危険率 β を指定して，(8)～(10) 式で $1-P(x_{t\beta})=\beta$ となるような $x_{t\beta}$ を求めればよい。　そうすると，β として 0.05 あるいは 0.01 などの値を指定する限り，$n \leq 8$ $t \geq 3^{hr}$ の範囲ではこれらの解は (6) 式と完全に一致する。またこの場合でも $\beta \leq 0.5$ の範囲，あるいは $n=12$，$t=2^{hr}$ のときでも，高々誤差 2% 以内の精度で，(6) 式の結果に一致する。　$n=24$，$t=1^{hr}$ のときは厳密解が充分な範囲まで得られていないのではっきりとはわからないが，R_{24} の細分を 2 段階程度に行って概略の検討をすると，やはり実用上 (6) 式で充分なようである。　このことは，(6) 式では，特に最大値の確率分布を扱ってはいないにもかかわらず，実質的に最大値を取り扱っていることになっているからであろう。　結局式形の簡単なことをも考慮すると，実用的には (6) 式でよいと考えられる。

4. 実用上の問題

i) 研究成果の検証

図 2 は昭和 33 年台風 21，22 号による関東地建管内各地の雨量データを整理して確率分布を調べたもので，点線は (6) 式より計算した値である。　データが特殊なものだけに，これだけでは本研究成果の妥当性を云々できないであろうが，一応充分な適合性を示していると考えてよいであろう。

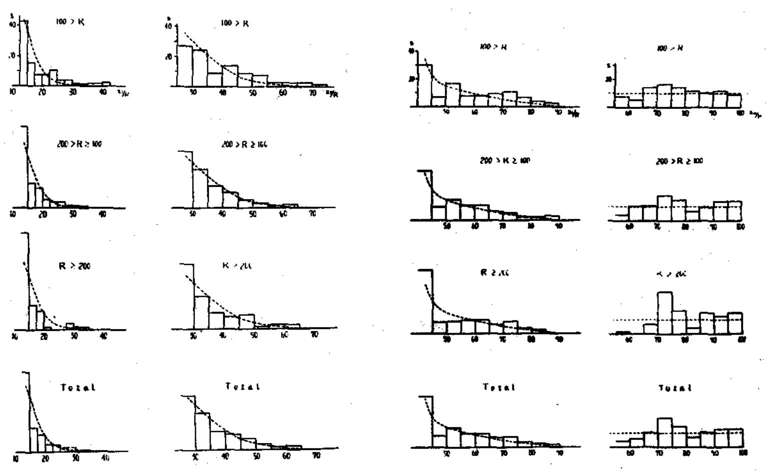

図 2-1　x_1/R_{24} の分布　　図 2-2　x_3/R_{24} の分布　　図 2-3　x_6/R_{24} の分布　　図 2-4　x_{12}/R_{24} の分布

ii) β の値

実際には x_t/R の値は偶然量ではなく，x_t そのものが物理的要因に支配されないであろうかという懸念がある。これは β の値が任意に指定できないで

はないかという問題，ひいては i）の問題にも関連してくる重要な問題である。

さて図2ではこうした問題を検討する意味で，一応 R_{24} の値に応じて区別をしておいた。また図3は同じデータの整理方法を変えてみたものである。これらのデータだけでは上述の問題の解答は得がたいが，本データの範囲では上述の疑念は薄いようである。したがって一応は β の値を任意に指定してよい。平均的な意味では $\beta=0.5$，あるいは目的に応じて $\beta=0.2, 0.1, 0.05$ などの値を用いてよいと思う。むろんこうした問題については更に検討を加える予定である。

最後に本研究は石原教授を主任とする総合研究費による研究の一部であることを記し，謝意を表する。

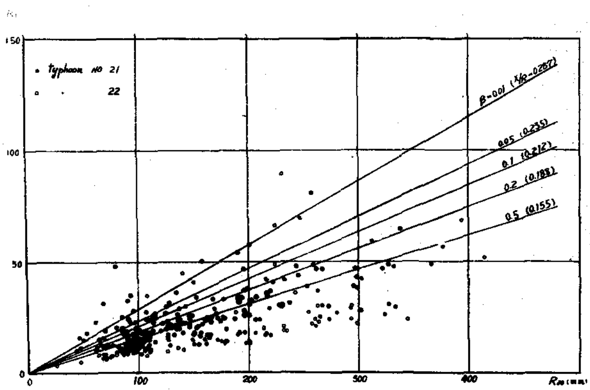

図 3-1　1時間最大雨量と24時間雨量の関係

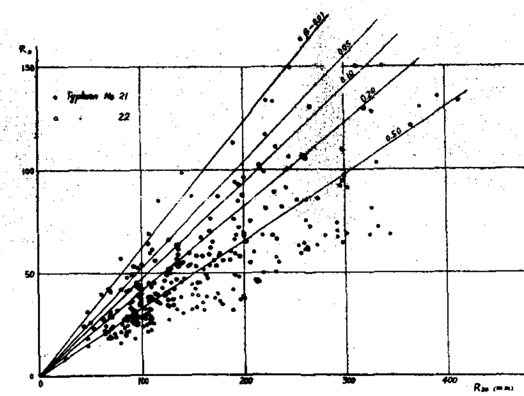

図 3-2　3時間最大雨量と24時間雨量の関係

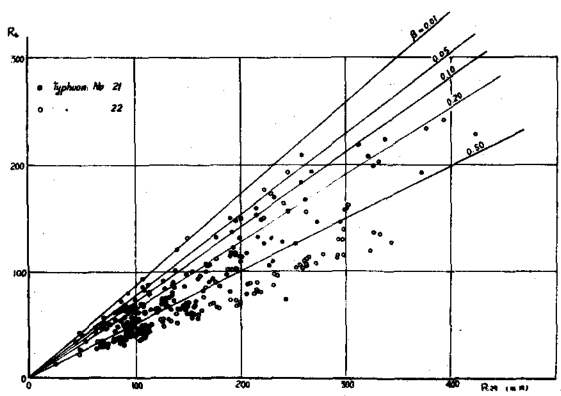

図 3-3　6時間最大雨量と24時間雨量の関係

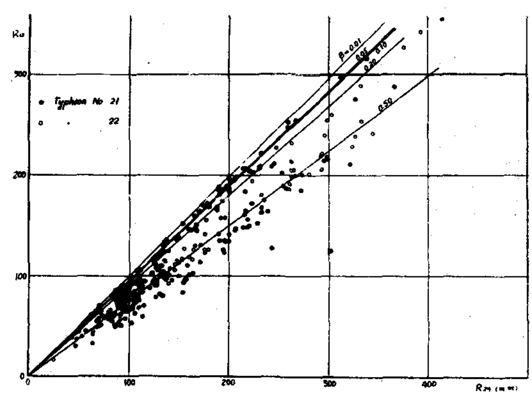

図 3-4　12時間最大雨量と24時間雨量の関係