(3) 最大流量・最小エネルギーに関するBélanger-Bössの定理の水理学的意義

京都大学工学部　正員　岩佐義朗

開水路における定常流の理論は，すでに前世紀の中頃よりDupuitおよびBresseによって研究が進められて以来，多くの研究者によって解析され，一様水路におけるその理論的発展はほぼ完成の域に達しているようである。この理論の中核をなすものは，Bélanger-Bössの定理の同時生起性を表わすいわゆるJaegerの一般理論であって，支配断面の水理学を形成し，またしたがって，支配構造物の水理学的機能を明らかにする重要な関係である。

ところが，Jaegerの理論では支配断面の生起に伴う水流の遷移現象には何ら言及していないから，実際に支配構造物の機能を水理学的に明確にすることは困難である。ここでは，遷移流の水理学的特性とBélanger-Bössの定理とを結び付け，Jaegerの一般理論の表わす水理学的意義を明確にするとともに，開水路における定常流の水理学の基本原理を確立しようとするものである。

いま，水流の運動現象を1次元解析法に従って表示すると，エネルギー保存則によってつぎのように表わされる。

$$\frac{dH_0}{dx}=\sin\theta-\left(\frac{\tau}{\rho g R}\right)\left(\frac{u_b}{u_m}\right) \quad , \tag{1}$$

および

$$f(Q, H_0, h, A, \theta, \cdots\cdots)=0 \quad , \tag{2}$$

ここに，x軸は水路床に沿い下流の方向にとり，Qは流量，H_0は比エネルギー，hは水深，Aは流水面積，Rは径深，u_bは底面付近の流速，u_mは平均流速，τは剪断力，θは水路の局所傾斜角，ρは水の密度，gは重力の加速度である。

著者がさきに明らかにしたように，水流の遷移現象がおこるのは，(1)および(2)式よりえられる水面形方程式に特異点があらわれるところである。すなわち，

$$\frac{dh}{dx}=\left\{\sin\theta-\left(\frac{\tau}{\rho g R}\right)\left(\frac{u_b}{u_m}\right)-\frac{\partial H_0}{\partial x}\right\}\Big/\frac{\partial H_0}{\partial h} \quad , \tag{3}$$

であるから，(3)式の分子および分母がともに0となる点である。したがって，明らかに遷移点でBössの定理が成立していることがわかる。

水流の遷移現象は，(3)式によって表わした水面形方程式の性質によって，三種類にわけられる。鞍形点があらわれると，水流は常流より射流へと滑かに遷移し，鞍形点はいわゆる支配断面の位置を与える。一方において，結節点あるいは渦状点があらわれると，水流は射流より常流へと遷移するが，常流領域ではdownstream controlであるため一般には下流の影響をうけ，跳水現象によって流れの状態は急激に変化し，遷移水面形曲線はこれらの点を通過しなくなる。したがって，Bössの定理が成立するところは，一般には水面形状に鞍形点があらわれる点であることが理解されよう。

また，(2)式よりBössの定理を書きあらわすと，つぎのように示される。

$$\left(\frac{\partial H_0}{\partial h}\right)_c=-\left\{\left(\frac{\partial f}{\partial h}\right)_c+\left(\frac{\partial f}{\partial A}\right)_c\left(\frac{\partial A}{\partial h}\right)_c+\cdots\right\}\Big/\left\{\left(\frac{\partial f}{\partial H_0}\right)_c+\left(\frac{\partial f}{\partial A}\right)_c\left(\frac{\partial A}{\partial H_0}\right)_c+\cdots\right\}=0, \tag{4}$$

ところが，(4)式の分母は0でないから，結局，Bössの定理は

$$\left(\frac{\partial f}{\partial h}\right)_c+\left(\frac{\partial f}{\partial A}\right)_c\left(\frac{\partial A}{\partial h}\right)_c+\cdots=0, \tag{5}$$

となる。これに反して，Bélangerの定理は

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial h}\right)_c=-\left\{\left(\frac{\partial f}{\partial h}\right)_c+\left(\frac{\partial f}{\partial A}\right)_c\left(\frac{\partial A}{\partial h}\right)_c+\cdots\right\}\Big/\left\{\left(\frac{\partial f}{\partial Q}\right)_c+\left(\frac{\partial f}{\partial A}\right)_c\left(\frac{\partial A}{\partial Q}\right)_c+\cdots\right\}=0, \tag{6}$$

であるから，Bössの定理と同様に $(\partial Q/\partial h)_c=0$ は(6)式の分子が0となることを表わしている。すなわち，Bélangerの定理とBössの定理とは鞍形点において同時に生起されることになり，この点で水流は滑かに常流より射流へと遷移する。このことが，いわゆるJaegerの一般理論の意味するところであるが，ここで述べたように水流の遷移現象と結び付けて考えると，この理論を容易に理解することができる。

以上の考察を進めるに当っては，エネルギー保存則によって解析を行ったが，運動量保存則による1次元解析法を用いると，断面形状が一様な場合には，最大流量と最小モーメンタム・フラックスの同時生起性が鞍形点によってもたらされることを，全く同様にして証明することができる。ところが，エネルギー方程式と運動量方程式とは流体運動を取り扱う力学的関係が異なっているから，ここで考察を進めている程度の近似理論では，最大流量，最小エネルギーおよび最小モーメンタム・フラックスの同時生起性を論ずることはできない。BoussinesqやJaegerのいうように，流体運動の力学的機構が完全に数学的な表示によって表わされた後に，はじめてこれら三者の同時生起性が予期されるであろう。

この同時生起性に関する理論は，換言すれば，与えられた境界特性のもとで水は何故最も流れやすいようにしか流れないかという事実を表わしているものである。したがって，この理論は定常流における水理学の種々の問題に応用される。これらのなかで，最も重要なものは，漸変流における水面形状の追跡であり，背水領域の決定に合理的な指針を与え，また支配構造物による流量の一点測定法に対する基本的原理を与えることである。これらのなかで，二・三の例は本講演会において別の題目のもとで明らかにされるが，この理論の意味するところは水理学的に十分理解されるであろう。

最後に本研究を遂行するに当り，終始御懇切な指導を賜わった石原藤次郎教授に深謝するとともに，本研究は文部省科学研究費によって行われたものの一部であることを付記する。