

(14)

分水堤付近における遷移流について

大阪大学

室田 明

§1. 概説: 分水路からの流出がある場合の断面平均水深の变化は Fig-2 の如くであり、断面 E に於て顕著な水位の低下が見られる。更に、分水堤付近のみにて見れば、流速最大値は E で、流速最小値は F である。従つて、主流深が限界以下 ($F_0 < 1$) であつても局所 Froude 数 fr が E の付近で 1 をこえることがある。(Fig-1) 実験、及び次節でのべる計算によると、E で $fr = 1$ となる如き断面 E での Froude 数 (以下臨界値 F_c という。 $F_0 < F_c \leq 1$) は、たとへば、分水堤の主流、分水路尖に於ける水深が主流水深である場合に現れるから実在する水路の大部分は臨界状態に近いといえる。

§2. 臨界 Froude 数: F_c F_c を求めるためには断面 E における y 方向の水深、及び流速分布を知る必要がある。

今、断面平均値は大文字、局所値を小文字で表はすものとして、

$$\text{連続方程式: } \frac{\partial}{\partial x}(uh) + \frac{\partial}{\partial y}(vh) = 0 \quad (1)$$

$$\text{運動方程式: } \begin{cases} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = g \left(\alpha - \frac{\partial h}{\partial x} \right) \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -g \frac{\partial h}{\partial y} \end{cases} \quad (2)$$

$$\text{運動方程式: } \begin{cases} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = g \left(\alpha - \frac{\partial h}{\partial x} \right) \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -g \frac{\partial h}{\partial y} \end{cases} \quad (3)$$

$u \equiv \frac{\partial \Phi}{\partial x}$, $v \equiv \frac{\partial \Phi}{\partial y}$ として (1), (2), (3) から h を消去すれば

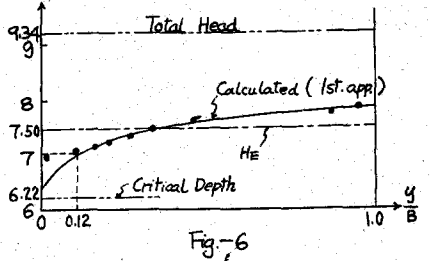
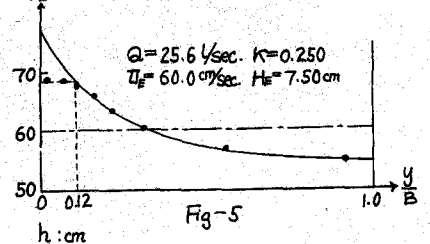
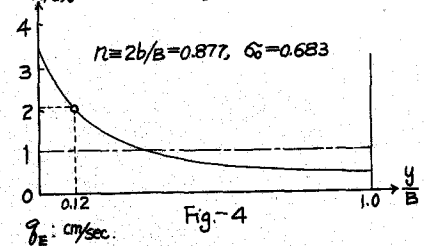
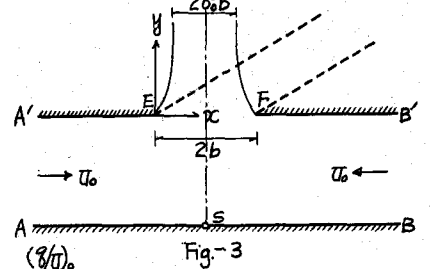
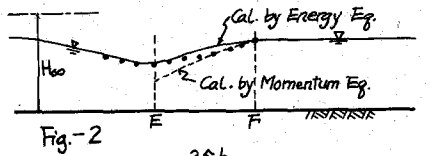
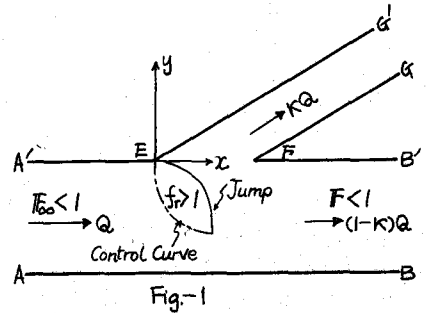
$$\left(1 - \frac{u^2}{gh}\right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - 2 \frac{uv}{gh} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + \left(1 - \frac{v^2}{gh}\right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \quad (4)$$

臨界状態以下では上式は楕円型であるから、この場合に対応する境界値問題を解けば E 断面での流速分布が足る。今、 $\alpha = 1$ 近似として、非圧縮流に対応する解、すなわち $h = H_0$: 一定, $fr \rightarrow 0$ として Laplace Eq. とする E 断面での $g(\sqrt{u^2 + v^2})$ 分布を求め、断面方向の水深 h は、Specific energy が断面方向に一定、すなわち

$$\frac{g^2}{2g} + h = \frac{U_E^2}{2g} + H_E \quad (5)$$

より定まる h を $\alpha = 1$ 近似とする。

前報で述べた通り branch を持つ水路の定常計算は複雑であり、かつ E 点での特異性をさけるため出口部 EF



からの自由流出 (Fig-3) に $U-U_0$ の平均流を重畳させて Fig-1 での主水路内流速分布を求めると、断面 E での g -分布は Fig-4 の如くなる。以上の計算過程によつて h のオーソ近似を求めると Fig-6 の様になり、水面勾配が小さい部分では十分実験値と一致する。更に、実験によると、 $x=0$, $0 < y/B \leq 0.12$ の領域では u , h はほぼ一定と見られるので、この領域で $\alpha \equiv (g/u)_0 \equiv (u/u)_0 \approx 2$ (ただし添字 0 は自由流出の諸量を示す。) とすれば E の十分近傍で $u \approx U(1 + \frac{K}{2})$, 更に、Fig-3 から $K = 2U_0/U$ であるから之を (5) に代入すれば結局、E で $fr = 1$ となる如き断面 E での臨界 Froude 数: $Fr_c (\leq 1)$ は次の如く求まる。

$$Fr_c^2 = \frac{2}{\{3(1 + \frac{K}{2})^2 - 1\}} \quad (6)$$

$K = 1$, すなわち逓流量 Q が分水路に流入するときの $Fr_c^2 = 0.348$ である。

S.3. Control-Curve 及び Jump 波型の計算: 式(4)の形式判別式は、

$$D = fr^2 - 1, \quad fr = g^2/g_h, \quad g^2 = u^2 + v^2 \quad (7)$$

であり、 $fr > 1$ のとき双曲線型、 $fr < 1$ のとき楕円型となるから遷移領域では (4) は混合型となることが予想される。前述の如く、断面平均値はすべて臨界状態に近いので、限界流速: g_c からの擾乱をとるものとし、

$$\Phi \equiv g_c x + \varphi(x, y) \quad (g \ll \Phi), \quad u = g_c + \varphi_x, \quad v = \varphi_y \quad (8)$$

φ を一次の微小量とし、高次の微小量を省略すると、

$$u^2/g_h \approx 1 + 3\varphi_x/g_c, \quad uv/g_h \approx \varphi_y/g_c, \quad v^2/g_h \approx (\varphi_y/g_c)^2$$

であるから、之を (4) に代入し、更に、この場合 $\varphi_x \gg \varphi_y$ と考えられるので、結局、遷移流の基礎式として次式をうる。

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{3}{g_c} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad \text{又は} \quad u' = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v' = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad \text{と} \quad \frac{3}{g_c} u' \frac{\partial u'}{\partial x} - \frac{\partial v'}{\partial y} = 0 \quad (9)$$

式(9)は非線型であるがいわゆる reducible であるから物理面 (x, y) を座標平面 (u', v') に変換する hodograph 法によつて線型化する。

なお、上式で、 $u' > 0$ すなわち $u > g_c$ (射流) のとき (9) は双曲線型、

$u' < 0$ すなわち $u < g_c$ (常流) のとき (9) は楕円型

となり、TRICOMI 型の混合型偏微分方程式である。

今 $\bar{u} \equiv 3u'/g_c$, $\bar{v} \equiv 3v'/g_c$ なる無次元量を用い、 $(x, y) \rightarrow (\bar{u}, \bar{v})$ 変換、すなわち

$$\frac{\partial x}{\partial \bar{u}} = \frac{1}{J} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y}, \quad \frac{\partial y}{\partial \bar{u}} = -\frac{1}{J} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x}, \quad \text{及} \quad \frac{\partial x}{\partial \bar{v}} = -\frac{1}{J} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}, \quad \frac{\partial y}{\partial \bar{v}} = \frac{1}{J} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \quad (J = \frac{\partial(\bar{u}, \bar{v})}{\partial(x, y)}) \quad (10)$$

とし、更に $\bar{u} = -\bar{w}$ とすれば遷移流ホドグラフ方程式として線型化される方程式をうる。

$$\bar{w} \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial \bar{w}^2} + \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial \bar{w}^2} = 0 \quad (11)$$

上式は $\bar{w}$ の正負に対応して双曲型、楕円型となり、混合型の特性をなお保持している。

(11) の素解は $y \sim e^{\pm \lambda \bar{w}} z^{\frac{1}{3}} C_{\lambda/3}(\lambda z)$, $z \equiv \frac{3}{2} \bar{w}^{\frac{2}{3}}$ ($C_{\lambda/3}$ は $1/3$ 次の円筒函数)

であるから対応する境界条件によつて $fr = 1$ の Control-Curve が定まる。