(1)　運動方程式と連続の式とを用いて変動する水位の資料から摩擦係数を求める方法について

東京大学地球物理学教室　木下武雄

概要　開水路の流体の運動方程式と連続の式とを用いて、変動する水位の時間的・空間的分布から、摩擦係数（ここではChezyの係数）を求める方法を説明し、実例を示す。

§1　著者はさきに運動方程式と連続の式を連立させて不定流としての洪水流をあらわす方法を調べた。すなわち開水路の流体の運動方程式(1)と連続の式(2)を用いる。(1)式については加速度項は小さいので省略してある。

$$-i+\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{v^2}{C^2R}=0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial A}{\partial t}+\frac{\partial (Av)}{\partial x}=0 \tag{2}$$

ここでCはChezyの係数である。$t=t_1$に於いて水位hの空間的分布がわかっていれば、(1)式から平均流速vが求められる。そのvを(2)式に代入すればΔt秒後の断面積の増加高$\frac{\partial A}{\partial t}\cdot\Delta t$が求められるので、$t=t_1+\Delta t$に於ける水位$h$があらゆる地点でわかる。この様に(1)(2)両式を交互に解くことによつて、時間的に変動する洪水流をあらわすことができるわけである。ここでは$h(t_1)$とCを既知として$h(t_1+\Delta t)$を求めたが、若し実測により$h(t_1)$, $h(t_1+\Delta t)$の空間的な値の分布がわかつていたら、Cを未知数として計算できる筈である。それがこの方法の骨子である。

§2　方法：具体的には次に述べるように2通りの方法が考えられる。(イ)を微分的方法と呼び、(ロ)を積分的方法と称してもよいかも知れない。

(イ)　(1)式は変形して　$v=CR^{\frac{1}{2}}\left(i-\frac{\partial h}{\partial x}\right)^{\frac{1}{2}}$　となる。更に流量　$Q=A\cdot v$　を導入すれば、$Q=CAR^{\frac{1}{2}}\left(i-\frac{\partial h}{\partial x}\right)^{\frac{1}{2}}$　となる。これは

$$Q=C\,F(h)\qquad \text{但し}\ F(h)=AR^{\frac{1}{2}}\left(i-\frac{\partial h}{\partial x}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3}$$

とおける。AもRもhの函数であるから、Fはhの空間的分布がわかればきめられる値である。若し矩形水路でManningの公式的に摩擦を考えるなら　$F=Bh^{\frac{5}{3}}\left(i-\frac{\partial h}{\partial x}\right)^{\frac{1}{2}}$　とおいて、$C\rightarrow\frac{1}{n}$　と直せばよい。つまり、指数法則型の摩擦係数を仮定すれば、Qは摩擦係数Cと水位の函数Fとの2つの部分に分けられる。これを(2)式に代入し、この時$\frac{\partial C}{\partial x}$は小さいとして省略すれば、

$$\frac{\partial A}{\partial t}=-C\frac{\partial F}{\partial x} \tag{4}$$

$$C=-\frac{\partial A}{\partial t}\Big/\frac{\partial F}{\partial x} \tag{5}$$

(5)式の右辺はすべて水位によつてきまるから、水位の測定によつてCが求められる。この場合の注意をあげると、(i)水路断面の形状がわかつていること。(ii)$\frac{\partial F}{\partial x}$は$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$を含むから少くとも3地点で水位の観測があること。(iii)$\frac{\partial}{\partial t}$があるから水位の時間的変化も観測されていること。(iv)それらの微分であるため、変動が適当に大きいこと。定流時は勿論、洪水のピーク時も望ましい資料ではない。(v)誤差の十分に小さい測定値であること。数値微分

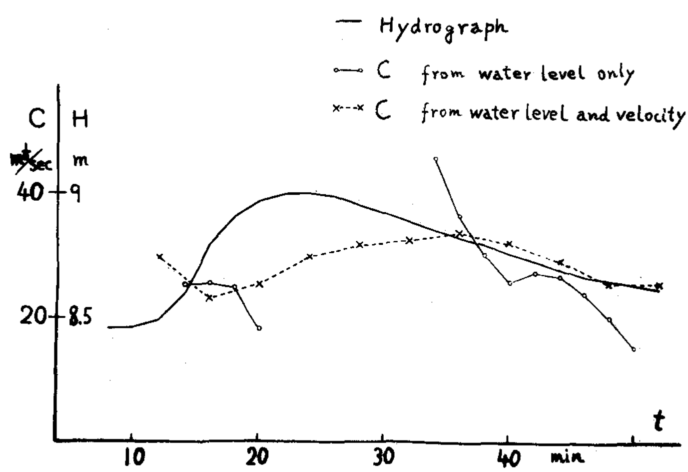
のとき、用いる点を多くして誤差が相殺するようにつとめる。(vi)資料の良否の判別には、(4)式を水位変動のはじめから終りまで積分すれば、$\int_0^\infty \frac{\partial A}{\partial t}dt = -\int_0^\infty C\frac{\partial F}{\partial x}dt$ で左辺は $A_\infty - A_0 = 0$ とおけるため、Cが不変と仮定すれば、$\int_0^\infty \frac{\partial F}{\partial x}dt = 0$ というのが単純でよいようである。

(ロ) もう一つの方法は、川の適当な区間をとり、$t=0$ に於ける水位を初期条件とし、上流端下流端の量水標の実測値を境界条件として前述の通り(1)(2)両式を連立させて、数値計算を行う。このときCに様々の値を仮定して何度か試算してみる。そうしてその区間内部の量水標の実測値と計算値を比べ、両者がよく合うようにCを選ぶ。これは(i)全体の傾向を合わせるもので、資料の精度は(イ)ほど心配せずにすむ。(ii)計算は単純であるが、手数は多い。(iii)数値計算の Δt, Δx の関係は注意を要する。何故なら、不一致がおこった場合、Cの推定が悪かったためか、計算不安定かわからないと困る。(iv)摩擦法則は指数法則型とかぎる必要はないが、簡単なものの方が好ましい。

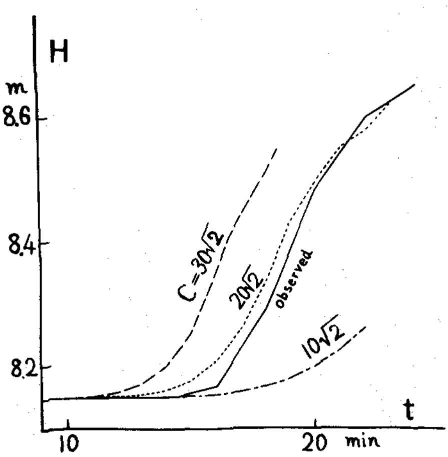
この方法で、Cの見積りちがいでおこる端的な不一致の例は、Cが小さすぎると計算上下流端で水面に逆勾配を生じ、Cが大きすぎると下流端で滝のような現象をおこす。

§3 実例：米田正文らの行なった京都新高瀬川の実験洪水の資料を用いた。水深は初め30cm位から増し、最大約1mとなり、約1時間で元に戻る。この変動は水路が矩形とみなせる範囲内で行なわれた。100m毎に量水標を設けて、2分毎に記録がとられた。同時に4箇所で流速の実測も行なわれているので、水位・流速から直接にCを求めることもできる。方法(イ)による結果を第1図に示す。著者の方法によるC —o—o は精度に若干の疑問を残すが、大勢は流速よりのCとよく一致している。方法(ロ)によるハイドログラフを第2図に示す。図の地点は全区間の $\frac{1}{3}$ だけ下流端からさかのぼった点である。水位の立ち上りを除いて $20\sqrt{2}$ はよく一致している。両図から $C=28\,m^{\frac{1}{2}}sec^{-1}$ と結論できる。

§4 結び：従来は流速・水位の実測からCを求めたために、Cの算出が容易でなかったが、この方法によれば測定の容易な水位だけからCが求められるので、この方法は甚だ有効であると云えよう。 文部省試験研究費の補助をうけて行った。ここに謝意を表す。



第1図



第2図