（7）河床の移動について

神戸大學　正員　松梨順三郎

要旨　移動床をもつ開水路の，河床の不安定限界の條件を，微小振動の方法によって求めたもので，砂漣の発生限界は水流の転波列の発生限界と，河床の砂の掃流の特性および，水流の抵抗法則によって表示しうることを示すものである。

流れの不安定性と河床面の不安定性

1）基本方程式　底面に沿い下流の方向にx軸をとれば，開水路における水流の運動方程式および，連續の方程式はそれぞれ次のように表わされる。

$$\frac{\partial}{\partial t}(U_m h)+\frac{\partial}{\partial x}(\alpha U_m^2 h)=-\frac{\tau}{\rho}+gh\sin\theta-gh\cos\theta\frac{\partial h}{\partial x} \tag{1}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(U_m h)=0 \tag{2}$$

また限界掃流力附近の流砂量を表わす方程式および，その連續式は次のように表わされる。

$$Q_s=f(d)(\tau-\tau_c)^m \tag{3}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t}+\frac{1}{1-\lambda}\frac{\partial Q_s}{\partial x}=0. \tag{4}$$

こゝにtは時間，U_mは断面平均流速，hは水深，gは重力加速度，S_0は等流の時の河床勾配で，任意時刻の河床勾配Sは次式で表しうる。　$S=\sin\theta=S_0-\frac{\partial z}{\partial x}$　，zは規準面からの河床の高さを表わす。τ，τ_cはそれぞれ河床に働く平均摩擦応力および限界の摩擦応力である。ρは流体の密度であって，αは鉛直方向における流速分布による補正係数であって，xおよびtに無関係と假定する。定常等流状態における値をτ_0，U_{m0}，h_m，z_m，として示すと，明らかに　$\tau_0=\rho g h_m S_0$　である。この場合，巾の広い矩形断面の開水路における，層流に対して，$\tau_0=3\mu U_{m0}/h_m$　と表わされる。こゝにμは流体の粘性係数である。また乱流領域においてはChezy．Manning，などの経験的な抵抗法則によって，平均流速を表示するのであるが，Vedernikovが表示したように，これらを一般化して次のように表示することにする。　$U_{m0}^{p}=\frac{1}{K}h_m^{1+\delta}\sin^{t}\alpha$，　こゝに$K$は水路の底面の粗度を表わし，一般に流速および水深には無関係とする。せん断応力の一般化された式は次のようになる

$$\tau_0=\rho g K^{\frac{1}{t}}U_{m0}^{\frac{p}{t}}h_m^{1-\frac{1+\delta}{t}} \tag{5}$$

いま(5)式によって表示した定常等流のせん断力が，現在考えている不定流にも同じ型で表示されるものと假定すれば，せん断応力は一般に流速および水深の函数となる。Q_sは單位巾当りの体積で表示した流砂量である。　またλは砂の間隙率を示す。$f(d)$，m，は砂の特性に関する常数である。(1)式および(3)，(4)式を整理すると

$$\frac{\partial}{\partial t}(U_m h)+\frac{\partial}{\partial x}(\alpha U_m^2 h)=-\frac{\tau}{\rho}+gh\left(S_0-\frac{\partial z}{\partial x}\right)-gh\cos\theta\frac{\partial h}{\partial x} \tag{1'}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t}+\frac{m}{1-\lambda}f(d)(\tau-\tau_c)^{m-1}\left(\frac{\partial\tau}{\partial h}\cdot\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{\partial\tau}{\partial U_m}\frac{\partial U_m}{\partial x}\right)=0 \tag{4'}$$

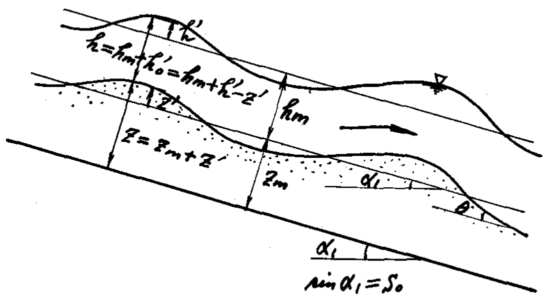
(1)′，(2)，(4)′を移動床をもつ開水路の水流および，流砂に関する基礎方程式とする。

いま河床の砂はすでに始動しており，しかも，その流れが等速定流のような流れ方をしているものと假定し，水流もまた等速定流で流下している状態を想定する。その状態に何らかの原因で微小擾乱が加わると，それによって，平均流速，水深，流砂量したがって河

床高が変動するが、その変動流速，水深，河床高をそれぞれ U_m', h_o', z' とすれば

$U_m = U_{mo} + U_m'$, $h = h_m + h_o' = h_m + h' - z'$

$z = z_m + z'$



と表わすことができる。これらの水理量を(1)',(2),(4)' に代入し，さらに(1)',(2),(4)'を x および，t に関して微分し，微小擾乱による変動量とその導函数の積，および，それぞれの自乗以上の高次の項を微小量として無視した関係式より，変動流速 U_m' および変動水深 h_o' を消去して方程式を線形化すると，次の式をうる。

$$\frac{\partial^3 z'}{\partial t^3} + f\frac{\partial^3 z'}{\partial t^2 \partial x} + k\frac{\partial^3 z'}{\partial t \partial x^2} + l\frac{\partial^3 z'}{\partial x^3} + w\frac{\partial^2 z'}{\partial t^2} + n\frac{\partial^2 z'}{\partial t \partial x} = 0 \qquad (6)$$

こゝに，$f = 2\alpha U_{mo}$, $k = \alpha U_{mo}^2 - g h_m \cos\theta - aX$, $l = -a(XU_{mo} - Yh_m)$, $w = \frac{X}{\rho h_m}$, $n = -\frac{Y}{\rho} + gS_o + \frac{X}{\rho}\frac{U_{mo}}{h_m}$, である。ただし

$$a = \frac{mg}{1-\lambda} f(d)(\tau_o - \tau_c)^{m-1} , \quad X = \left(\frac{\partial\tau}{\partial U_m}\right)_o , \quad Y = \left(\frac{\partial\tau}{\partial h}\right)_o \qquad (7)$$

こゝにカッコに添字 0 をつけたものは，微分係数の定常等流状態における値を示すもので
あるが $\left(\frac{\partial\tau}{\partial U_m}\right)_o = \frac{\partial\tau_o}{\partial U_{mo}}$ $\left(\frac{\partial\tau}{\partial h}\right)_o = \frac{\partial\tau_o}{\partial h_m}$ となる。この(6)式が河床面の微小振巾の擾乱波に対する第一次近似方程式であり，河床の不安定限界を求めるための基本方程式である。

2)，不安定限界條件

いま擾乱による波高の変化が，次式で表わされるような波形で與えられるものと假定して，

$$z' = Ae^{\gamma t}\binom{\cos}{\sin}\left[\rho\left(x - \frac{c}{\rho}t\right)\right] = Ae^{\gamma t + i\rho x} \qquad \text{こゝに} \quad \gamma = \gamma_r - ic \qquad (8)$$

この擾乱波の時間的な発達あるいは減衰について考察する。γ の実数部 γ_r は(8)式で表わされる擾乱波の振巾の時間的変動を示すものであるから，この擾乱波が安定であるか，不安定であるかは γ_r の符号によって決定される。その條件は $\gamma_r > 0$ ならば不安定 $\gamma_r \leqq 0$ ならば安定である $\gamma_r = 0$ はその限界を与えると考えられる。(8)式を(6)式に代入し $\gamma_r = 0$ の限界を与える條件式を求めると，次式をうる。

$$\left\{U_{mo}^3 X^3 - 3X^2(Yh_m U_{mo}^2 - \rho g S_o h_m U_{mo}^2) + 3X(Y^2 h_m^2 U_{mo} + \rho^2 g^2 S_o^2 h_m^2 U_{mo} - 2\rho g S_o Y h_m^2 U_{mo}) + (-Yh_m + \rho g S_o h_m)^3\right\}$$
$$-\alpha\left\{U_{mo}^3 X^3 - 3X^2(Yh_m U_{mo}^2 - \rho g S_o h_m U_{mo}^2) + 2X(Y^2 h_m^2 U_{mo} + \rho^2 g^2 S_o^2 h_m^2 U_{mo} - 2\rho g S_o Y h_m^2 U_{mo})\right\} - g h_m \cos\theta\left\{U_{mo} X^3 - X^2(Yh_m - \rho g S_o h_m)\right\}$$
$$= a\rho g S_o X^3 h_m \qquad (9)$$

ただし，X，Y，a は(7)式で与えられる。

(9)式は移動床をもつ開水路の河床の不安定限界を表わす條件式で，任意の抵抗法則に対して適用しうる一般的な関係式である．一般化された抵抗法則(5)式を導入して(9)式の水理学的な意義を明らかにしてみよう．(5)式を(9)式に代入して次式をうる

$$\frac{(p+1+q)^2}{p^2} - \alpha\frac{(p+2+2q)}{p} - \frac{1}{F_r^2} = a_o\rho g K^{\frac{1}{q}} \frac{p}{p+1+q} h_m^{1-\frac{1+p}{q}} U_{mo}^{\frac{p}{q}-3} \qquad (10)$$

こゝに F_r は水流の Froude 数を表わす。(10)式より河床の不安定限界條件に重要な関係を有する水理量として，抵抗法則の型式，水流の Froude 数，鉛直方向の流速分布に関する補正係数，河床の砂の掃流の難易が考えられる。