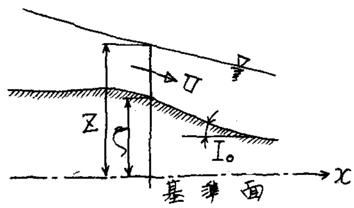
（6）河床変動の理論的考察

大阪大学工学部　正員　工博　　田中　清

本文は河床変動を理論的に取扱うための一つの試みに過ぎないものであり、今後さらに修正を要する点が多い。



x = 位置（下流向きを正），t = 時間

ζ = 基準面よりの河床高，Z = 基準面よりの水面高，

U = 流速，Q = 流量，I_0 = 平均河床勾配，

b = 河巾，C = Chézyの係数，H_0 = 平均水深（$H_0 = \frac{Q}{bU_0}$），

F = Froude数（$F = U_0/\sqrt{gH_0}$）。

流れはほゞ定常状態にあるものとする。

運動方程式：$$U\frac{\partial U}{\partial x} = g\left\{I_0 - \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{U^2}{C^2(Z-\zeta)}\right\} \quad (1)$$ 。

連続方程式：$$b(Z-\zeta)U = Q \quad (2)$$ 。

Q = Const.，b = Const. の場合，(1)，(2) より

$$U\frac{\partial U}{\partial x} = g\left\{I_0 - \frac{bU^3}{C^2Q} - \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{Q}{bU^2}\frac{\partial U}{\partial x}\right\} \quad (3)$$ 。

Exnerの理論と同様に河床の昇降変動は流れの加速度によるものと仮定すれば，

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\varepsilon\frac{1}{g}\frac{DU}{Dt} \doteqdot -\frac{\varepsilon U}{g}\frac{\partial U}{\partial x}, \quad (\text{こゝに } \varepsilon > 0) \quad (4)$$ 。

河道の平均流速を U_0 とし，河床の凹凸による速度変動を u とすれば，

$$U = U_0 + u, \quad |u| \ll |U_0| \quad (5)$$ 。

(5) を用いて(3)，(4) 式を線型化し，uを消去すれば，

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial t\partial x} + \omega\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} - \Gamma\frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0, \quad (6)$$

こゝに $$\omega = \varepsilon\Big/\left(\frac{1}{F^2}-1\right), \quad \Gamma = 3g\omega/\varepsilon C^2H_0 \quad (7)$$ 。

$F \neq 1$ の場合には (6)式は双曲線型方程式であり，その特性方程式は。

$$\omega(dt)^2 - dt\cdot dx = 0 \quad (8)$$ 。

現象の伝播速度：$$dx/dt = \omega \quad (9)$$

$\xi = x - \omega t$，$\eta = \omega t$ と置いて (6)を変換すれば，

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial\xi\partial\eta} + \Gamma\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\xi} - \frac{\partial\zeta}{\partial\eta}\right) = 0 \quad (10)$$ 。

$$\zeta = \theta\cdot\exp.\{\Gamma(\xi-\eta)\} = \theta\cdot\exp.\{\Gamma(x-2\omega t)\} \quad (11)$$

なる変換をすれば，(10) は

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial\xi\partial\eta} + \Gamma^2\cdot\theta = 0 \quad (12)$$ 。

初期条件は， $t=0$ の時 $\varsigma=f(x)$，従って $\theta=e^{-\Gamma x}\cdot f(x)$ (13)

また， $\xi=x$，$\eta=0$ の時 $[\theta]_{\xi=x,\,\eta=0}=e^{-\Gamma\cdot\xi}\cdot f(\xi)$ (14)

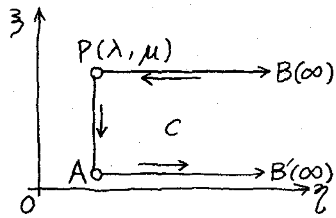
(12) の Riemann 函数 R は，

$$R(\xi,\eta:\lambda,\mu)=J_0\{2|\Gamma|\sqrt{(\xi-\lambda)(\eta-\lambda)}\} \tag{15}$$

$$P=\frac{1}{2}\left(R\frac{\partial\theta}{\partial\eta}-\theta\frac{\partial R}{\partial\eta}\right),\qquad Q=\frac{1}{2}\left\{R\frac{\partial\theta}{\partial\xi}-\theta\frac{\partial R}{\partial\xi}\right\} \tag{16}$$

と置けば $\oint_C (P d\eta - Q d\xi)=0$ 。 (17)

1. $F<1$，$\omega>0$，$\Gamma>0$ の場合



$$-\int_B^P Q\,d\xi+\int_P^A P\,d\eta-\int_A^{B'} Q\,d\xi=0,$$

$\theta_B=0$，$(\theta R)_{B'}=0$ であるから

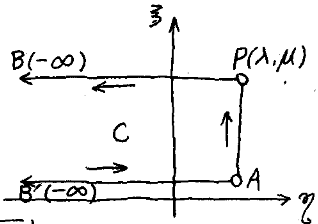
$$\theta_P=\theta_A+\int_A^{B'}\theta\frac{\partial R}{\partial\xi}d\xi\ 。 \tag{18}$$

従って，

$$\theta(\lambda,\mu)=e^{-\Gamma\lambda}\cdot f(\lambda)+\Gamma\cdot\mu\int_\lambda^{+\infty}e^{-\Gamma\xi}\cdot f(\xi)\frac{I_1\{2\Gamma\sqrt{(\xi-\lambda)\mu}\}}{\sqrt{(\xi-\lambda)\mu}}d\xi, \tag{19}$$

$$\varsigma(x,t)=e^{-\Gamma\omega t}\cdot f(x-\omega t)+\Gamma\omega t\,e^{\Gamma(x-2\omega t)}\int_{x-\omega t}^{+\infty}e^{-\Gamma\lambda}\cdot f(\lambda)\frac{I_1\{2\Gamma\sqrt{(\lambda-x+\omega t)\omega t}\}}{\sqrt{(\lambda-x+\omega t)\omega t}}d\lambda\ 。 \tag{20}$$

2. $F>1$，$\omega<0$，$\Gamma<0$ の場合



$$-\int_{B'}^A Q\,d\xi+\int_A^P P\,d\eta-\int_P^Q Q\,d\xi=0,\qquad \theta_B=0,\ (\theta R)_{B'}=0$$

であるから，

$$\theta_P=\theta_A-\int_{B'}^A\theta\frac{\partial R}{\partial\xi}d\xi\ 。 \tag{21}$$

従って，

$$\theta(\lambda,\mu)=e^{-\Gamma\lambda}\cdot f(\lambda)+\Gamma\mu\int_{-\infty}^{\lambda}e^{-\Gamma\xi}\cdot f(\xi)\frac{J_1\{-2\Gamma\sqrt{(\lambda-\xi)\mu}\}}{\sqrt{(\lambda-\xi)\mu}}\cdot d\xi, \tag{22}$$

$$\varsigma(x,t)=e^{-\Gamma\omega t}\cdot f(x-\omega t)+\Gamma\omega t\,e^{\Gamma(x-2\omega t)}\int_{-\infty}^{x-\omega t}e^{-\Gamma\lambda}\cdot f(\lambda)\frac{J_1\{-2\Gamma\sqrt{(x-\omega t-\lambda)\omega t}\}}{\sqrt{(x-\omega t-\lambda)\omega t}}\cdot d\lambda, \tag{23}$$

こゝに，I_1 は変形せられた Bessel 函数，J_1 は Bessel 函数である。

一般的に $\varsigma(x,t)=e^{-\Gamma\omega t}\cdot f(x-\omega t)+S$ (24)

の形となり，S なる項は現象が尾を引くことを表わしている。

常流（$F<1$ $\omega>0$，$\Gamma>0$）の場合には現象が下流に伝播しながら減衰し，

射流（$F>1$，$\omega<0$，$\Gamma<0$）の場合には現象は上流に伝播しながら減衰し，いづれの場合にも河床は平坦化して行く傾向にある。特に尾を引く現象 S 項は常流，射流の背水と逆方向に影響することになり，多大の疑義を残している。

$F=1$ の場合には (6) は放物線型方程式となり拡散現象に変ることになる。