(4) 蛇行の発生過程に関する研究

京都大学　正員　足立昭平

蛇行の発生を解析する一つの試みとして，流れの不安定性について若干の考察を試みた。なお実験結果を説明するまでには至っていないけれども，その基本的見解について諸賢の御講評を得れば幸いである。

1、基礎方程式：　水路床面に沿って下流方向にx軸を，それと直角に水平にy軸を，x-y面に垂直に上向きに　軸をとる。流速の各成分をu, vおよびwで表示し，wに関する加速度項を省略できる場合を考えると，運動方程式として次式を採用することができる。

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=g\left(I-\frac{\partial h}{\partial x}\right)+\frac{1}{\rho}\left\{\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu_y\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu_z\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right\}, \quad\cdots\cdots(1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}-u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}=-\frac{\partial h}{\partial y}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu_z\frac{\partial v}{\partial z}\right) \quad\cdots\cdots(2)$$

ここにgは重力の加速度を，ρは水の密度を，Iは水路床勾配を，hは水深を，μ_y, μ_zは渦動粘性係数を表わす。一方連続方程式は，水の非圧縮性から

$$\partial u/\partial x+\partial v/\partial y+\partial w/\partial z=0 \quad\cdots\cdots(3)$$

である。(1), (2)および(3)式の各項をzについて，床面$z=0$から水表面$z=h$まで積分して，zおよびwの項を消去し，u, vのzに関する平均値u_m, v_mを導入すると，

$$\frac{\partial u_m}{\partial t}+k_1u_m\frac{\partial u_m}{\partial x}+k_3v_m\frac{\partial u_m}{\partial y}+\frac{u_m}{h}\left\{(k_1-1)\frac{\partial(u_mh)}{\partial x}+(k_3-1)\frac{\partial(v_mh)}{\partial y}\right\}$$
$$=g\left(I-\frac{\partial h}{\partial x}\right)-k_4u_m\frac{\lambda}{2h}\sqrt{(k_4u_m)^2+(k_5v_m)^2}+k_6\frac{1}{\rho}\left\{\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu_y\frac{\partial u_m}{\partial y}\right)+\frac{1}{h}(1-k_7)\frac{\partial h}{\partial y}\mu_y\frac{\partial u_m}{\partial y}\right\}\cdots(4)$$

$$\frac{\partial v_m}{\partial t}+k_3u_m\frac{\partial v_m}{\partial x}+k_2v_m\frac{\partial v_m}{\partial y}+\frac{v_m}{h}\left\{(k_2-1)\frac{\partial(v_mh)}{\partial y}+(k_3-1)\frac{\partial(u_mh)}{\partial x}\right\}=-g\frac{\partial h}{\partial y}-k_5v_m\frac{\lambda}{2h}\sqrt{(k_4u_m)^2+(k_5v_m)^2}\cdots(5)$$

$$\frac{\partial u_m}{\partial x}+\frac{\partial v_m}{\partial y}=-\frac{1}{h}\left(\frac{\partial h}{\partial t}+u_m\frac{\partial h}{\partial x}+v_m\frac{\partial h}{\partial y}\right), \quad\cdots\cdots(6)$$

こゝに$k_1, k_2, \cdots k_7$はz方向の流速分布に関する係数であって，次式で定義される。

$$\frac{1}{h}\int_0^h u\,dz=u_m,\qquad \frac{1}{h}\int_0^h v\,dz=v_m,$$
$$\frac{1}{h}\int_0^h u^2dz=k_1u_m^2,\quad \frac{1}{h}\int_0^h v^2dz=k_2v_m^2,\quad \frac{1}{h}\int_0^h uv\,dz=k_3u_mv_m,$$
$$u_{at\,z=0}=k_4u_m,\quad v_{at\,z=0}=k_5v_m,\quad \overline{\mu_y\frac{\partial u}{\partial y}}=k_6\mu_y\frac{\partial u_m}{\partial y},\quad \left|\mu_y\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{at\,z=h}=k_7\overline{\mu_y\frac{\partial u}{\partial y}}$$

またλは摩擦係数であって，水路床面の摩擦は床面の流速の2乗に比例するものとする。

2、流水の安定限界：　基礎方程式(4), (5), (6)式において，流れを定常量と微小変動量とに分ける。すなわち，$u_m=U+u'$，$v_m=v'$，$h=H+h'$とおき，また流速分布に関する諸係数の内，主流uに関するk_1, k_3, k_4, k_6, k_7を近似的に1とおけば，

定常流に関して　$$gI-\frac{\lambda U^2}{2H}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu_y\frac{\partial U}{\partial y}\right)=0 \quad\cdots\cdots(7)$$

微小変動流に関して　$$\frac{\partial u'}{\partial t}+U\frac{\partial u'}{\partial x}+v'\frac{dU}{dy}=-g\frac{\partial h'}{\partial x}-\frac{\lambda U}{H}u'+\frac{\lambda U^2}{2H^2}h'+\frac{1}{\rho}\mu_y\frac{\partial^2u}{\partial y^2}, \cdots(8)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t}+\frac{\partial v'}{\partial x}=-g\frac{\partial h'}{\partial y}-k_5\frac{\lambda U}{2H}v' \quad\cdots\cdots(9),\qquad \frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{\partial v'}{\partial y}=-\frac{1}{H}\left(\frac{\partial h'}{\partial t}+U\frac{\partial h'}{\partial x}\right), \cdots\cdots(10)$$

が得られる。(8),(9),(10)式を満足するような微小変動量が時間的に減衰する性格をもつ場合には，流れは安定であるが，時間の経過とともに増大する場合には不安定となる。

(7)式に示されるように主流Uはy方向に分布をもつから，(8),(9),(10)式はすこぶる複雑となる。まず第一段階として，ここでは式の取扱いを簡単にし，微小変動項のおおよその性格を求めるために，主流Uを水路全断面の平均値$\bar{U}$でおきかえることにする。水路巾を$2B$とおき，(7)式を$-B$から$+B$まで積分し

$$\frac{1}{2B}\int_{-B}^{+B}U^2dy \doteqdot \bar{U}^2, \qquad \text{側面の摩擦} \doteqdot \frac{\lambda U^2}{2} \quad \text{とおくと} \quad \bar{U}=\sqrt{\frac{2}{\lambda}}\sqrt{gRI} \quad \cdots\cdots (11)$$

である。(8),(9),(10)式に含まれるUを$\bar{U}$で，また水深HをRでおきかえると

$$\frac{\partial u'}{\partial t}+\bar{U}\frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{\lambda\bar{U}}{R}u'-\frac{\mu_y}{\rho}\frac{\partial^2u'}{\partial y^2}=-g\frac{\partial h'}{\partial x}+\frac{\lambda}{2}\frac{\bar{U}^2}{R^2}h', \quad \cdots\cdots (12)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t}+\bar{U}\frac{\partial v'}{\partial x}+k_5\frac{\lambda\bar{U}}{2R}v'=-g\frac{\partial h'}{\partial y}, \cdots\cdots (13) \qquad \frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{\partial v'}{\partial y}=-\frac{1}{R}\left(\frac{\partial h}{\partial t}+\bar{U}\frac{\partial h}{\partial x}\right)\cdots\cdots (14)$$

(12)式をxで微分し，(14)式の$\partial u'/\partial x$を代入してu'を消去し，さらにyで微分して，(13)式の$\partial h'/\partial y$を代入してh'を消去すると

$$\Big[\frac{1}{gR}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{U}\frac{\partial}{\partial x}\right)^3+\frac{1}{\bar{U}}\left\{(k_5+2)\frac{\bar{U}^2}{gR}\cdot\frac{\lambda}{2R}-\frac{\mu_y}{\rho}\frac{\bar{U}}{gR}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right\}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{U}\frac{\partial}{\partial x}\right)^2+\Big\{\frac{\lambda}{2R}\cdot\frac{\bar{U}^2}{gR}\left(\frac{k_5\lambda}{R}+\frac{\partial}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$$

$$-\frac{\mu_y}{\rho}\cdot\frac{\bar{U}}{gR}\cdot\frac{k_5\lambda}{2R}\cdot\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big\}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{U}\frac{\partial}{\partial x}\right)+\frac{\lambda\bar{U}}{2R}\left\{\frac{\lambda}{2R}\frac{\bar{U}^2}{gR}\frac{\partial}{\partial x}-\left(k_5\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)+\frac{2R}{\lambda}\frac{\mu_y}{\rho\bar{U}}\frac{\partial^4}{\partial y^4}\right\}\Big]v'=0\cdots (15)$$

上式はyについて偶数階の微分であるから，v'の解の形は，

$$v'\propto\cos\beta y\, e^{\gamma\bar{U}t+i\alpha x} \quad \cdots\cdots (16)$$

である。これを(15)式に代入して，

$$(\gamma+i\alpha)^3+\epsilon(k+a)(\gamma+i\alpha)^2+\left\{\epsilon^2ak+\frac{1}{F_r^2}(\alpha^2+\beta^2)+i\epsilon\alpha\right\}(\gamma+i\alpha)+\frac{\epsilon}{F_r^2}(k\alpha^2+a\beta^2)+i\epsilon^2\alpha=0\cdots (17)$$

ここに　$\epsilon=\dfrac{\lambda}{2R}$，$F_r=\dfrac{\bar{U}}{\sqrt{gR}}$，$a=2+\dfrac{\mu_y}{\rho}\dfrac{\beta^2}{\bar{U}\epsilon}$，$k=k_5$　である。

γは一般に複素数であって，$\gamma=\gamma_1+i\gamma_2$である．従って安定，不安定は$\gamma_1$の正負で判定され，$\gamma_2$は微小変動の伝播速度を表わし，伝播速度$\omega$は$-\gamma_2\bar{U}/\alpha$である。

安定，不安定の限界は　$\gamma_1=0$で与えられるから，(17)式において$\gamma_1=0$とおくと

$$\omega/\bar{U}=-\gamma_2/\alpha=1+\frac{1}{2(k+a)}\left\{1\pm\sqrt{1+\frac{4}{F_r^2}(k+a)\left(k+a\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)}\right\} \quad \cdots\cdots (18)$$

$$(\epsilon/\beta)^2=\left(1-\frac{\omega}{\bar{U}}\right)\left\{\left(1-\frac{\omega}{\bar{U}}\right)^2-\frac{1}{F_r^2}\left(1+\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)\right\}\Big/\frac{\beta^2}{\alpha^2}\left\{1+ka\left(1-\frac{\omega}{\bar{U}}\right)\right\} \quad \cdots\cdots (19)$$

いま微小変動の波長をLとおくと　$\alpha=2\pi/L$，また側壁面で$v'=0$とおくと，$\beta=\pi/B$であるから，上式はF_r, $\lambda B/2\pi R$, $L/2B$, $\omega/\bar{U}$の諸量で構成され，前2者は水路の形状と水路を流れる流量で与えられる。従って，安定限界は　$F_r\sim\lambda B/2\pi R$面に$L/2B$または$\omega/\bar{U}$をparameterとして表わせる。蛇行の発生にこの考察を適用するためには，さらに不安定領域に属する変動の波長について何らかの条件を与えねばならない。これについてはなお十分な成果を得ていないのであるが　実験水路で得られた結果では，水路条件に応じて，確かに蛇行発生の限界が存在し，$F_r\sim\lambda B/2\pi R$面に描いたその限界は，実験砂の異なる数種の実験について，殆んど一致するという興味ある結果を得ることができた。