(14) 洪水流についての数値計算

東京大学地球物理　　木下武雄

§1. 河川の流れがどんな運動の法則に従うかは、いうまでもなく河川工学上極めて重要である。定流については古くから多くの研究者によつて各種の実験式が提案されている。非定流については、前述の実験式を含む運動方程式と連続の式とが成り立つと云われている。この運動方程式は一次元的であり、平均流速を用いて大へん簡単化されてはいるが、非線型偏微分方程式であるため解析的に正確に解かれているわけではない。

筆者は原式をなるべく省略しないで、これを連立方程式として数値的に解いた。この報告では、(1)この方程式が実際の川での実際の洪水を表現しうること、(2)模型的な水路についての解から非定流としての洪水のもつ様々な物理的性質を量的に検討することを述べる。

そこで基礎方程式としてはよく知られた平均流速の運動方程式と連続の式を用いる。

$$\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial x}=gI-g\frac{\partial z}{\partial x}-g\frac{v^2}{C^2R} \tag{1}$$

$$\frac{\partial A}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(A\cdot v)=0 \tag{2}$$

xは上流より下流へ河道に沿つてとる。zは河床からの水位。実際の川では河床勾配は複雑にかわるので

$$-I+\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial H}{\partial x} \tag{3}$$

となる絶対高Hを導入する。そして(1)を書きなおして、

$$\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial x}=-g\frac{\partial H}{\partial x}-g\frac{v^2}{C^2R} \tag{1'}$$

本質的に相違はないが、実用上模型水路では(1)(2)式を、実際の河川では(1')(2)を連立して解くのが便利である。

実際の河川では、断面積Aと絶対水位Hとの関係は実測によつて得られ資料から$A=A(H)$なる函数関係を知つて、これと(1')(2)との3式を連立させて、t, xの函数としてH, A, vを解くわけである。

$A\propto z$の場合でもこの連立偏微分方程式は大へん複雑になり、これを解くためには、初期條件として各地点で、境界條件として時々刻々v, zの値が高い精度で必要である。しかし水位さえ量水標の不足から充分な資料がない現状で、平均流についての流速を高い精度で測定することは望めない。そこで初期境界條件として平均流速を用いないですむ方法が望まれる。それには慣性力項：(1)の左辺を省略すれば、初期境界條件として水位を与えるだけで十分である。そうすれば希望する範囲で水位を平均流速と共に予測できるのである。

こうして求めた水位と平均流速から慣性力項を得て他の項と比べても数%をこえないので、(i)精度、(ii)初期境界條件、(iii)値が小さい、との3つの理由で慣性力項を省略する。

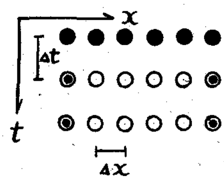
これらの式を具体的に解くために、流量$Q=A\cdot v$を用い少し変形して、

$$Q=\sqrt{C^2b^2z^3\left(I-\frac{\partial z}{\partial x}\right)}=\sqrt{C^2\frac{A^3}{P}\left(-\frac{\partial H}{\partial x}\right)} \tag{4}$$

$$\frac{\partial A}{\partial t}=-\frac{\partial Q}{\partial x} \tag{5}$$

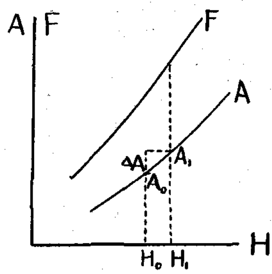
を解く。

解を求めるべき領域を図の如くxの間隔をΔx，tの間隔をΔtとしたmeshesに分ける。初期条件としては或時刻$t=0$のときのあらゆる点に於ける水位を与える。図の●。境界条件としては上流端の点を$x=0$とし、下流端の点を$x=l$としそこに於ける水位が時刻の函数として与えられる。図の◉。上流の境界条件は雨雪の流出又はダムの放流による水位の変動とみられ、下流の境界条件は海面の潮汐による変動と解せばよい。



$t=0$に於いて水位がわかっているから水面勾配を求めて(4)式により流量が各点に於いて得られる。流量が既知となれば、(5)式を用いて次の時刻$t=\Delta t$への断面積の増分がわかるため、その時の水位が新たに決定される。これを繰返していけば水位流量が交互に求められていく。

断面が矩形であれば、$A \propto z$で断面積の増分は簡単に水位に変換されるが一般の河川のの場合にはそうはいかない。実際計算ではHとAとの函数関係をグラフにしておく。$t=0$に於いてH_0, A_0がわかっていて(5)式からΔAが求まるから、図のようにΔAをA_0に加えて$t=\Delta t$に於ける新たなA_1、従ってH_1を知ることができる。この時$F=\sqrt{C^2 \frac{A^3}{P} \frac{1}{\Delta x}}$なる量は$H$の函数であるからグラフにかきこんでおけば(4)式の演算が極めて手早くできる。このFに断面の形状、抵抗などの知識が含まれているので、水位によって抵抗が変る影響も容易に入れることができる。



計算不安定を防ぐためのΔx, Δt間の関係の詳しい議論は省略するが、Δx, Δt間の制約には、その時のH, A, I, C, Q等が関係する。雑に云えばΔtをなるべく小さくした方が計算不安定をおこさないようである。

§2. 実際の河川に於ける実例として鬼怒川の川島より下流の部分42^{km}に於いて、1949年9月1日キティ台風による洪水を選んだ。$\Delta x = 2^{km}$, $\Delta t = 6$分40秒。下に量水標の測定と計算により得られた水位とを比較して示す。

模型水路の例は一様な矩形水路で、上流端で与えるハイドログラフ$z = 1 + \frac{t^2(T-t)^2}{M}$ $0 \leqq t \leqq T$で継続時間T，最高水位を適当に変えてその伝播状況を調べる。図はsteepnessと伝播速度とで、これにより洪水の伝播速度がsteepnessに関係していることがわかる。

水路断面は矩形であるが、或部分から下流の川巾を3倍にした場合、境界条件はかえないで一様水路と比べる。伝播速度はおくれ、水位上昇は$\frac{1}{3}$になるわけではない。