

水工学シリーズ 22-B-7

# 流れの平均化方程式と 土水境界における接続条件

京都大学 教授

藤澤 和謙

土木学会

水工学委員会・海岸工学委員会

2022年9月

# 流れの平均化方程式と土水境界における接続条件

## Volume-averaged Equations for Fluid Flow and Interfacial Conditions at Soil/Water Boundaries

藤澤 和謙

Kazunori FUJISAWA

### 1. はじめに

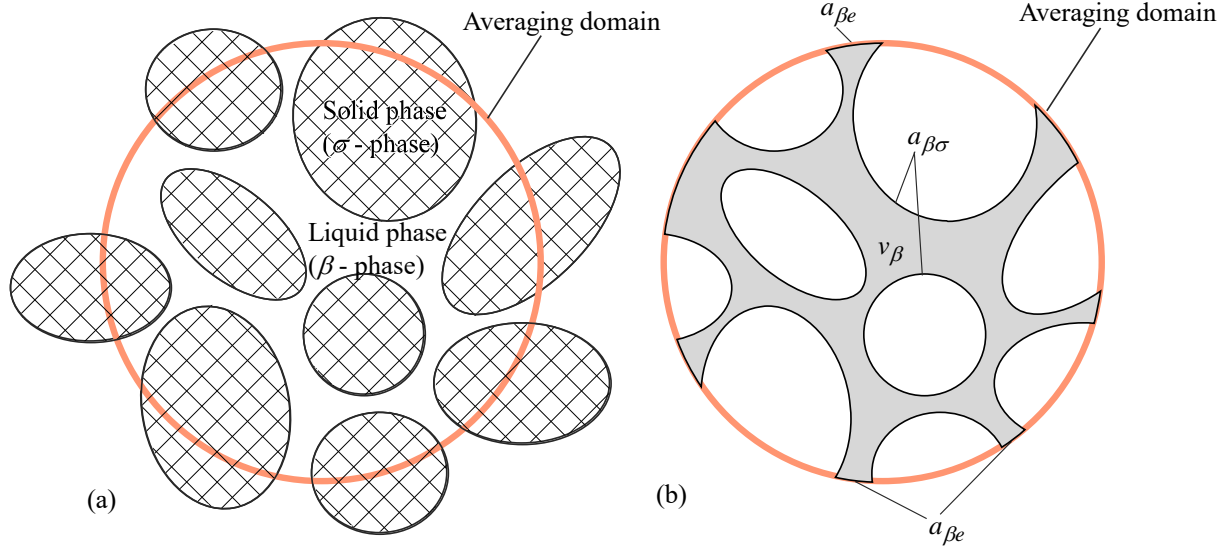
多孔質の内部を流れる浸透流とその周りを流れる流体の挙動を連続的に把握することは、海岸工学や地盤工学分野において重要な課題である。例えば、波浪を受ける地盤の挙動を解析するには、地盤への流体の浸入を許容する流れの解析と同時に、地盤の変形解析が必要となる。後に述べるが、多孔質中の流れに良く知られたダルシー則を適用し、間隙水圧のみを変数とする浸透流解析では、地盤上の流れと地盤内の浸透流とを正確につなげることが困難となる。このような問題は、堤防などの土構造物においても、越水時などには堤体上を流れる河川水（越流水）に加えて、堤体への越流水の浸透と堤体の変形や侵食を同時に把握する際に現れ、重要かつ複雑な問題となる。

ここではまず、地盤上の流れと地盤内の浸透流を統一的に把握するため、Navier-Stokes 式の平均化方程式について、その導出過程を詳述する。導出された平均化方程式は、透水係数が十分に小さい場合にはダルシー則と近似的に一致し、Navier-Stokes 式と同様に慣性項と粘性項を含む方程式となる。その結果、（圧力勾配のみのよって決定されるダルシー流とは異なり）浸透流は圧力勾配だけでなく、流速の時間及び空間変化にも影響を受けるものとなる。これは、浸透挙動を記述するための境界条件に（圧力だけでなく）流速についての条件を必要とすることにつながる。そのため、多孔質体と流体の境界面において必要となる境界条件について、平均化方程式の導出の後に説明する。多孔質体と流体の境界面における境界条件は界面条件（Interfacial condition）と呼ばれ、これまでに複数の条件が提案されてきた。ここでは、最も有名な Bearers-Jeseph 条件を対象として、その役割について考察する

### 2. 平均化方程式

#### 2.1 体積平均と相体積平均

Navier-Stokes 式の平均化方程式を導くにあたり、必要となる平均量を定義し、それに関する空間微分及び時間微分に関する定理について述べる。多孔質体として飽和土を対象とすると、その間隙には、水（液相）のみが存在し、土粒子（固相）によって囲まれた複雑な幾何形状をとる。そこを流れる浸透流について、空間的な平均化を行う領域は、複雑な間隙構造を平滑化するのに必要な大きさを持ちながらも、巨視的な浸透挙動を捉えるのに十分な小ささを有する必要がある。圧力や流速、間隙率といった物理量の微視的な変動を平滑化するのに必要かつ十分な大きさの領域は代表要素体積（Representative Elementary Volume, 略称 REV）と呼ばれる。空間的な平均化を行う領域を平均領域と呼ぶが、それは REV に対応するものである。REV の大きさは、間隙径の数倍のスケールと考えられるが、それを決定することは一つの研究対象であり、REV の大きさに関する議論は避ける。ここでは、Bars and Worster (2006) 及び Whitaker (1999) をもとにして、平均量に関する定理をまとめる。以下では、Howes and Whitaker (1985) に従い、固相には $\sigma$ 、液相には $\beta$  の添え字を用いる。



**Fig. 1** 平均領域と液相の境界  
Averaging domain and boundaries of liquid phase

流速や圧力などの液相において定義される物理量を代表して $\phi$ とすると、その体積平均は以下で定義される。

$$\langle \phi \rangle = \frac{1}{v} \int_{v_\beta} \phi dv \quad (1)$$

ここに、 $v$  は平均領域の体積、 $v_\beta$  は平均領域内の液相の領域（もしくは体積）、 $\langle \phi \rangle$  は物理量 $\phi$ の体積平均を表す。**Fig. 1**に平均領域の一例を示す。太線で囲まれた部分が平均領域であり、同図では球形を想定している。平均領域の体積  $v$  はこの球形の体積となる。**Fig. 1 (b)**は、**Fig. 1 (a)**の平均領域に含まれる液相を抽出したものである。液相の体積  $v_\beta$  は **Fig. 1 (b)**の灰色の領域の体積となる。平均領域は、平均操作を行う対象に応じて任意の大きさや形状に設定できるが、時間と空間に依らない一定の大きさを持つ領域であることに注意する。体積平均とは異なる平均量として相体積平均があり、以下のように定義される。

$$\langle \phi \rangle^\beta = \frac{1}{v_\beta} \int_{v_\beta} \phi dv \quad (2)$$

ここに、 $\langle \phi \rangle^\beta$  は（液相における）物理量 $\phi$ の相体積平均である。式(1)で定義される体積平均は、全相の体積を対象とした重み付き平均であるが、式(2)の相体積平均は、液相の領域のみを対象とした平均値となる。また、式(1)と(2)から分かるように、体積平均と相体積平均の間には以下の関係がある。

$$\langle \phi \rangle = \varepsilon_\beta \langle \phi \rangle^\beta \quad (3)$$

$$\varepsilon_\beta = v_\beta / v \quad (4)$$

ここに、 $\varepsilon_\beta$  は液相の体積分率であり、体積含水率に対応する。例えば、物理量 $\phi$ として浸透水の流速を採用すれば、その体積平均は Darcy 流速、相体積平均は実流速に対応し、式(3)は Darcy 流速と実流速の関係を表す。

#### 体積平均の空間微分、時間微分、積

体積平均の空間微分に関する平均化定理は以下の式(5)で与えられる。式(5)から分かるように平均化定理

は、ある物理量に対して「空間微分の体積平均」と「体積平均の空間微分」との関係式である。この定理の数学的証明は、Howes and Whitaker (1985) に詳述されるが、その意味は難しいものではなく、後の 2.4 節に記載する。

$$\left\langle \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right\rangle = \frac{\partial \langle \phi \rangle}{\partial x_i} + \frac{1}{v} \int_{\bar{a}_\beta} \phi n_i da \quad (5)$$

ここに、 $x_i$  は直交座標、 $n_i$  は外向き単位法線ベクトル、 $a$  は平均領域の表面積、 $\bar{a}_\beta$  は平均領域に含まれる液相の境界のうち、液相以外の相と接する部分を意味する（ここでは、液相以外には固相しか存在せず、 $\bar{a}_\beta$  は固相と接する部分  $a_{\beta\sigma}$  に対応する）。**Fig. 1(b)**には、 $a_{\beta\sigma}$  の境界を図示した。

上述の通り、式(5)は体積平均  $\langle \phi \rangle$  の空間微分と空間微分の体積平均  $\langle \partial \phi / \partial x_i \rangle$  をつなげる定理であり、ガウスの発散定理をその左辺に適用すると、

$$\frac{\partial \langle \phi \rangle}{\partial x_i} = \frac{1}{v} \int_{\bar{a}_\beta} \phi n_i da \quad (6)$$

となる。ここに、 $a_{\beta\sigma}$  は平均領域の境界のうち、同じ液相に接する部分を意味する (**Fig. 1(b)** 参照)。式(5)に  $\phi=1$  を代入すると、 $\langle \phi \rangle = \varepsilon_\beta$ 、 $\partial \phi / \partial x_i = 0$  であるため

$$\frac{\partial \varepsilon_\beta}{\partial x_i} = -\frac{1}{v} \int_{\bar{a}_\beta} n_i da \quad (7)$$

となり、体積分率  $\varepsilon_\beta$  の空間微分についての関係式を得る。また、式(3)を式(5)に代入し、式(7)を用いて変形すると

$$\left\langle \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right\rangle = \varepsilon_\beta \frac{\partial \langle \phi \rangle^\beta}{\partial x_i} + \frac{1}{v} \int_{\bar{a}_\beta} \hat{\phi} n_i da \quad , \quad \hat{\phi} \equiv \phi - \langle \phi \rangle^\beta \quad (8)$$

を得る。これは式(5)の右辺を相体積平均によって記述した平均化定理となる。

また、平均量の時間微分については、以下の式が成り立つ。

$$\left\langle \frac{\partial \phi}{\partial t} \right\rangle = \frac{\partial \langle \phi \rangle}{\partial t} - \frac{1}{v} \int_{\bar{a}_\beta} \phi w_i n_i da \quad (9)$$

ここに、 $t$  は時間、 $w_i$  は（液相の）境界面の移動速度を表す。式(9)はレイノルズの輸送定理と同様の数学操作で導かれるが、その意味についても後の 2.4 節に示す。式(9)に  $\phi=1$  を代入すれば、体積分率  $\varepsilon_\beta$  の時間微分に関する以下の式を得る。

$$\frac{\partial \varepsilon_\beta}{\partial t} = \frac{1}{v} \int_{\bar{a}_\beta} w_i n_i da \quad (10)$$

最後に、ある二つの物理量  $\phi$  と  $\varphi$  の積の体積平均については、以下の関係式が成り立つ。

$$\langle \phi \varphi \rangle = \varepsilon_\beta \langle \phi \rangle^\beta \langle \varphi \rangle^\beta + \langle \hat{\phi} \hat{\varphi} \rangle = \frac{\langle \phi \rangle \langle \varphi \rangle}{\varepsilon_\beta} + \langle \hat{\phi} \hat{\varphi} \rangle \quad (11)$$

式(11)は  $\langle \hat{\phi} \hat{\varphi} \rangle$  に  $\hat{\phi} \equiv \phi - \langle \phi \rangle^\beta$  及び  $\hat{\varphi} \equiv \varphi - \langle \varphi \rangle^\beta$  (式(8)参照) を代入し、展開することで容易に導出される。

### Navier-Stokes 式の平均化方程式

飽和土のように多孔質体の間隙が流体で満たされている場合、ダルシー流速のような巨視的な流速を把握することが実用上重要となる。ダルシー流速は、実際には固相と液相が存在する空間がすべて流体で置き換わったことを想定した見かけの流速であり、微視的な流速の体積平均に対応する。そのため、Navier-Stokes 式の体積平均をとることで多孔質領域における巨視的な流速（つまり、ダルシー流速などの平均流速）に対する微分方程式を導くことができる。ここでは、水のような非圧縮性流体を対象として、Navier-Stokes 式に

対して体積平均をとることでダルシー流速（体積平均流速）が満たす方程式を導出する。

Navier-Stokes 式は

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (12)$$

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i, \tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (13)$$

と与えられ、 $u_i$  と  $p$  は間隙中の（微視的な）流速と圧力を表す。なお、流体の密度  $\rho$  及び粘性係数  $\mu$  は定数であり、空間的な変化はないものと仮定する。もちろん、式(12)及び(13)は平均領域に含まれる液相のように、微視的な領域の流れを対象としている。

連続式である式(12)の体積平均をとると

$$\left\langle \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} \right\rangle = 0 \quad (14)$$

となる。式(14)に式(5)を適用し、

$$\frac{\partial \rho \langle u_i \rangle}{\partial x_i} + \frac{1}{v} \int_{a_{\beta\sigma}} \rho u_i n_i da = 0 \quad (15)$$

と変形できる。式(15)の左辺第2項において、固相の境界面において流速はゼロ（ノンスリップ条件）を与えれば、同項はなくなり

$$\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_i} = 0 \quad (16)$$

となる。間隙中の流速  $u_i$  の体積平均  $\langle u_i \rangle$  はダルシー流速  $v_i$  に対応するため、式(16)はよく知られたダルシー流速に対する連続式と一致する。

一方、式(13)の体積平均をとると

$$\left\langle \frac{\partial \rho u_i}{\partial t} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} \right\rangle = -\left\langle \frac{\partial p}{\partial x_i} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \right\rangle + \langle \rho g_i \rangle \quad (17)$$

となる。各項の変形過程を以下に示す。

**左辺第1項**

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \rho u_i}{\partial t} \right\rangle &= \rho \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial t} - \frac{1}{v} \int_{a_{\beta\sigma}} \rho u_i w_j n_j da \quad (\because \text{式(9)}) \\ &= \rho \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial t} \quad (\because w_i = 0 \text{ and } u_i = 0 \text{ on } a_{\beta\sigma}) \end{aligned} \quad (18)$$

**左辺第2項**

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} \right\rangle &= \frac{\partial}{\partial x_j} \langle \rho u_i u_j \rangle + \frac{1}{v} \int_{a_{\beta\sigma}} \rho u_i u_j n_j da \quad (\because \text{式(5)}) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j} \langle \rho u_i u_j \rangle \quad (\because u_i = 0 \text{ on } a_{\beta\sigma}) \\ &= \rho \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\langle u_i \rangle \langle u_j \rangle}{\varepsilon_\beta} + \langle \hat{u}_i \hat{u}_j \rangle \right) \quad (\because \text{式(11)}) \end{aligned} \quad (19)$$

右辺第 1 項

$$\left\langle \frac{\partial p}{\partial x_i} \right\rangle = \varepsilon_\beta \frac{\partial \langle p \rangle^\beta}{\partial x_i} + \frac{1}{v} \int_{a_{\beta\sigma}} \hat{p} n_i da \quad (\because \text{式(8)}) \quad (20)$$

この圧力項に対して、圧力  $p$  の相体積平均  $\langle p \rangle^\beta$  を考える理由は、それがピエゾメータ等によって測定される間隙水圧  $\bar{p}$  に対応するためである。

右辺第 2 項

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \right\rangle &= \frac{\partial \langle \tau_{ij} \rangle}{\partial x_j} + \frac{1}{v} \int_{a_{\beta\sigma}} \tau_{ij} n_j da \quad (\because \text{式(5)}) \\ &= \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \left\langle \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right\rangle \right) + \frac{1}{v} \int_{a_{\beta\sigma}} \tau_{ij} n_j da \\ &= \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_i} + \frac{1}{v} \int_{a_{\beta\sigma}} u_i n_j + u_j n_i da \right) + \frac{1}{v} \int_{a_{\beta\sigma}} \tau_{ij} n_j da \quad (\because \text{式(5)}) \\ &= \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{v} \int_{a_{\beta\sigma}} \tau_{ij} n_j da \quad (\because u_i = 0 \text{ on } a_{\beta\sigma}) \\ &= \mu \frac{\partial^2 \langle u_i \rangle}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{1}{v} \int_{a_{\beta\sigma}} \tau_{ij} n_j da \quad (\because \text{式(16)}) \end{aligned} \quad (21)$$

右辺第 3 項

$$\langle \rho g_i \rangle = \rho g_i \langle 1 \rangle = \varepsilon_\beta \rho g_i \quad (\because \text{式(1), (4)}) \quad (22)$$

式(19)～(22)を式(17)に代入して

$$\rho \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial t} + \rho \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\langle u_i \rangle \langle u_j \rangle}{\varepsilon_\beta} + \langle \hat{u}_i \hat{u}_j \rangle \right) = -\varepsilon_\beta \frac{\partial \langle p \rangle^\beta}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 \langle u_i \rangle}{\partial x_j \partial x_j} + \varepsilon_\beta \rho g_i - \frac{1}{v} \int_{a_{\beta\sigma}} \hat{p} n_i da + \frac{1}{v} \int_{a_{\beta\sigma}} \tau_{ij} n_j da \quad (23)$$

を得る。式(23)が Navier-Stokes 式の平均化方程式の原型となる。

## 2.2 Darcy 則と完結問題

Navier-Stokes 式の体積平均をとることで得られた式(16)及び式(23)は、流速  $\langle u_i \rangle$  と圧力  $\langle p \rangle^\beta$  に関する方程式であるが、式(23)の左辺第 2 項に含まれる  $\langle \hat{u}_i \hat{u}_j \rangle$ 、右辺第 4、5 項が未知量として現れる。このため、式(16)及び式(23)だけでは、 $\langle u_i \rangle$  と  $\langle p \rangle^\beta$  について解くことができず、現れた未知量を  $\langle u_i \rangle$  と  $\langle p \rangle^\beta$  を用いて記述する必要が生じる。これは、式(16)及び式(23)のための完結問題となるが、Darcy 則を利用することにより、これらの未知量をモデル化することができる。

ここでは、透水試験（定水位試験）のように一様な定常浸透（ $\langle u_i \rangle$  が定数）が生じている実験を想定し、上記の未知量のモデル化を行う。これは、実験を通して上記の未知量のモデリングを行うことに対応し、特定の条件のもとでこの完結問題を解くことを意味する（より一般的な条件でのモデリングについては Whitaker (1986) を参照のこと）。

浸透水の定常な流れが生じている場合、平均領域の液相において以下の運動量保存則が成り立つ。

$$\int_{a_{\beta\sigma}} \rho u_i u_j n_j da = \int_{a_{\beta\sigma} \cup a_{\beta\sigma}} \sigma_{ij} n_j da + \int_{v_\beta} \rho g_i dv \quad (24)$$

ここに、 $\sigma_{ij}$ は応力テンソルであり、左辺が液相境界からの運動量の出入りを表し、右辺が液相に作用する力（第1項はトラクション、第2項は物体力）を意味する。水のようなニュートン流体の場合、 $\sigma_{ij}$ は

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij} \quad , \quad \tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (25)$$

と表されるため、式(24)の右辺第1項は

$$\begin{aligned} \int_{a_{\beta\sigma} \cup a_{\beta e}} \sigma_{ij} n_j da &= \int_{a_{\beta\sigma} \cup a_{\beta e}} (-p\delta_{ij} + \tau_{ij}) n_j da \\ &= - \int_{a_{\beta\sigma} \cup a_{\beta e}} p n_i da + \int_{a_{\beta\sigma} \cup a_{\beta e}} \tau_{ij} n_j da \end{aligned} \quad (26)$$

と変形できる。式(26)の右辺第1項について

$$\begin{aligned} \int_{a_{\beta e}} p n_i da &= \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{v_\beta} p dv \quad (\because \text{式(6)}) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left( v_\beta \langle p \rangle^\beta \right) \quad (\because \text{式(2)}) \\ &= \frac{\partial v_\beta}{\partial x_i} \langle p \rangle^\beta + v_\beta \frac{\partial \langle p \rangle^\beta}{\partial x_i} \\ &= - \langle p \rangle^\beta \int_{a_{\beta\sigma}} n_i da + v_\beta \frac{\partial \langle p \rangle^\beta}{\partial x_i} \quad (\because \text{式(7)}) \end{aligned} \quad (27)$$

となることを考慮すれば、同項は

$$\begin{aligned} \int_{a_{\beta\sigma} \cup a_{\beta e}} p n_i da &= \int_{a_{\beta\sigma}} p n_i da + \int_{a_{\beta e}} p n_i da \\ &= \int_{a_{\beta\sigma}} \left( p - \langle p \rangle^\beta \right) n_i da + v_\beta \frac{\partial \langle p \rangle^\beta}{\partial x_i} \\ &= \int_{a_{\beta\sigma}} \hat{p} n_i da + v_\beta \frac{\partial \langle p \rangle^\beta}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (28)$$

と変形できる。また、式(26)の右辺第2項についても

$$\begin{aligned} \int_{a_{\beta e}} \tau_{ij} n_j da &= \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{v_\beta} \tau_{ij} dv \quad (\because \text{式(6)}) \\ &= v \frac{\partial \langle \tau_{ij} \rangle}{\partial x_j} \quad (\because \text{式(1)}) \\ &= v \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_i} \right) + v \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{1}{v} \int_{a_{\beta\sigma}} u_i n_j + u_j n_i da \right) \quad (\because \text{式(5)}) \\ &= 0 \quad (\because u_i = 0 \text{ on } a_{\beta\sigma}, \langle u_i \rangle = \text{Const.}) \end{aligned} \quad (29)$$

となることから、同項は

$$\int_{a_{\beta\sigma} \cup a_{\beta e}} \tau_{ij} n_j da = \int_{a_{\beta\sigma}} \tau_{ij} n_j da \quad (30)$$

となる。式(24)の左辺については、

$$\int_{a_{\beta e}} \rho u_i u_j n_j da = v \frac{\partial}{\partial x_j} \langle \rho u_i u_j \rangle \quad (\because \text{式(6)})$$

$$\begin{aligned}
&= v\rho \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\langle u_i \rangle \langle u_j \rangle}{\varepsilon_\beta} + \langle \hat{u}_i \hat{u}_j \rangle \right) \quad (\because \text{式(11)}) \\
&= v\rho \frac{\partial \langle \hat{u}_i \hat{u}_j \rangle}{\partial x_j} \quad (\because \langle u_i \rangle = \text{Const.}) \tag{31}
\end{aligned}$$

と変形できる．式(28)，(30)，(31)を式(24)に代入すると，

$$\begin{aligned}
&\int_{a_{\beta\sigma} \cup a_{\beta\epsilon}} \sigma_{ij} n_j da + \int_{v_\beta} \rho g_i dv = \int_{a_{\beta\epsilon}} \rho u_i u_j n_j da \\
\Rightarrow & -v_\beta \frac{\partial \langle p \rangle^\beta}{\partial x_i} - \int_{a_{\beta\sigma}} \hat{p} n_i da + \int_{a_{\beta\sigma}} \tau_{ij} n_j da + v_\beta \rho g_i = v\rho \frac{\partial \langle \hat{u}_i \hat{u}_j \rangle}{\partial x_j} \\
\Rightarrow & \frac{1}{v} \left\{ -\int_{a_{\beta\sigma}} \hat{p} n_i da + \int_{a_{\beta\sigma}} \tau_{ij} n_j da \right\} - \rho \frac{\partial \langle \hat{u}_i \hat{u}_j \rangle}{\partial x_j} = \varepsilon_\beta \left( \frac{\partial \langle p \rangle^\beta}{\partial x_i} - \rho g_i \right) \tag{32}
\end{aligned}$$

となる．式(32)の左辺には式(23)で現れた未知量がまとめられる．重力加速度の大きさを  $g$  として，以下の Darcy 則

$$\langle u_i \rangle = \frac{k_s}{\rho g} \left( \frac{\partial \langle p \rangle^\beta}{\partial x_i} - \rho g_i \right) \tag{33}$$

を適用すると，未知量は

$$\frac{1}{v} \left\{ -\int_{a_{\beta\sigma}} \hat{p} n_i da + \int_{a_{\beta\sigma}} \tau_{ij} n_j da \right\} - \rho \frac{\partial \langle \hat{u}_i \hat{u}_j \rangle}{\partial x_j} = -\varepsilon_\beta \frac{\rho g}{k_s} \langle u_i \rangle \tag{34}$$

とモデル化できる．なお，間隙内の代表流速を  $q$ ，間隙径などの代表長さを  $l$  とすれば，式(34)の左辺第1項及び第2項は，以下のようにそのオーダーを評価できる．

$$\frac{1}{v} \left\{ -\int_{a_{\beta\sigma}} \hat{p} n_i da + \int_{a_{\beta\sigma}} \tau_{ij} n_j da \right\} = O\left(\frac{\mu q}{l^2}\right) \tag{35}$$

$$\rho \frac{\partial \langle \hat{u}_i \hat{u}_j \rangle}{\partial x_j} = O\left(\frac{\rho q^2}{l}\right) \tag{36}$$

式(35)と式(36)の比はレイノルズ数 ( $ql/v$ ) に対応し，レイノルズ数の小さな場合に適用される Darcy 則は，式(34)の左辺第1項をモデル化するものと言える．

式(34)を式(23)に代入すると，式(23)は

$$\rho \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial t} + \rho \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\langle u_i \rangle \langle u_j \rangle}{\varepsilon_\beta} \right) = -\varepsilon_\beta \frac{\partial \langle p \rangle^\beta}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 \langle u_i \rangle}{\partial x_j \partial x_j} + \varepsilon_\beta \rho g_i - \frac{\varepsilon_\beta \rho g}{k_s} \langle u_i \rangle \tag{37}$$

となる．式(37)が多孔質領域における Navier-Stokes 式の平均化方程式であるが，同式右辺の第2項と最終項を，それぞれブリンクマン項 (Brinkman term) とダルシー項 (Darcy term) と呼ぶことに由来して，式(37)は Darcy-Brinkman 式と呼ばれる．ブリンクマン項は，ダルシー則に粘性の影響を加えたものであるが，その項に利用する粘性係数の値には，多孔質体を流れる流体とは異なる値が採用されることもある．しかし，式(37)の平均化方程式は，(平均化が可能な領域では) ブリンクマン項に用いる粘性係数は多孔質体を流れる流

体と同じとなることを示す。

### 2.3 Darcy-Brinkman 式の無次元化

透水係数  $k_s$  の代わりに固有透水係数  $K$

$$K = \frac{\mu k_s}{\rho g} \quad (38)$$

を用いると、式(37)は

$$\rho \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial t} + \rho \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\langle u_i \rangle \langle u_j \rangle}{\varepsilon_\beta} \right) = -\varepsilon_\beta \frac{\partial \langle p \rangle^\beta}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 \langle u_i \rangle}{\partial x_j \partial x_j} + \varepsilon_\beta \rho g_i - \frac{\varepsilon_\beta \mu}{K} \langle u_i \rangle \quad (39)$$

となる。ここで、代表流速に  $q$ 、代表長さに  $l$  をとり、式(39)に無次元化を施すと、

$$\text{Re} \cdot \text{Da} \left[ \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_j} \left( \frac{\tilde{u}_i \tilde{u}_j}{\varepsilon_\beta} \right) \right] = \varepsilon_\beta \left[ -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}_i} + \frac{K \rho g_i}{\mu q} - \tilde{u}_i \right] + \text{Da} \frac{\partial^2 \tilde{u}_i}{\partial \tilde{x}_j \partial \tilde{x}_j} \quad (40)$$

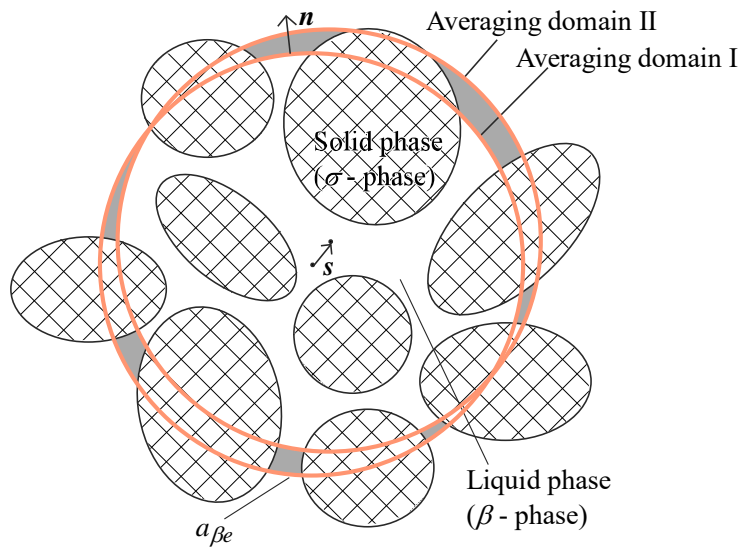
とできる。ここに、

$$x_i = l \tilde{x}_i, \quad t = \frac{l}{q} \tilde{t}, \quad \langle u_i \rangle = q \tilde{u}_i, \quad \langle p \rangle^\beta = \frac{\mu l q}{K} \tilde{p} \quad (41)$$

$$\text{Re} = \frac{ql}{\nu} = \frac{\rho ql}{\mu}, \quad \text{Da} = \frac{K}{l^2} \quad (42)$$

であり、 $\text{Re}$  はレイノルズ数、 $\text{Da}$  はダルシー数となる。なお、固有透水係数  $K$  の平方根は長さの次元を持ち、間隙サイズのオーダーを表すため、ダルシー数は代表長さと間隙サイズの比の二乗を意味する。式(40)からわかるように、レイノルズ数及びダルシー数が十分に小さいとき、同式は右辺の第1項のみが支配的となるため、

$$-\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}_i} + \frac{K \rho g_i}{\mu q} - \tilde{u}_i = 0 \quad (43)$$



**Fig. 2** 体積平均値の空間変化  
Spatial change in volume-averaged quantity

と近似される．式(43)に式(41)を代入し，次元を持つ方程式とすれば，ダルシー則そのものであることは容易に確かめられる．動水勾配と浸透流速が線形関係にある浸透挙動を考える範囲では，レイノルズ数とダルシー数は十分に小さく，式(37)の Darcy-Brinkman 式は，わずかな慣性と粘性を許容するダルシー則と考えてよい．

## 2.4 平均化定理の意味

体積平均の微分に関する定理である式(5)は，**Fig. 2**に示すように，平均領域をわずかに移動させた際に，体積平均の値がどの程度変化するかを考えることで理解できる（藤澤・村上，2019）．**Fig. 2**には，例として，微小なベクトル  $s$  の方向に移動させて二つの平均領域（Averaging domain I と II）を示す．同図において，ベクトル  $s$  は球形を仮定した平均領域の中心座標の変位に対応させて示した．ある物理量  $\phi$  の体積平均  $\langle \phi \rangle$  の  $s$  方向への方向微分  $\partial \langle \phi \rangle / \partial s$  は以下の式で与えられる．

$$\frac{\partial \langle \phi \rangle}{\partial s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{v} \int_{v_{\beta,II}} \phi dv - \frac{1}{v} \int_{v_{\beta,I}} \phi dv}{s} \quad (44)$$

ここに， $s$  はベクトル  $s$  の大きさであり， $v_{\beta,I}$  と  $v_{\beta,II}$  は平均領域 I と II における液相の領域を意味する．式(44)右辺の分子にある体積平均の差は，**Fig. 2**において，二つの平均領域にはさまれた液相領域（**Fig. 2**の灰色の部分）における積分に対応するため，ベクトル  $s$  の大きさが十分に小さい場合，

$$\frac{1}{v} \int_{v_{\beta,II}} \phi dv - \frac{1}{v} \int_{v_{\beta,I}} \phi dv \approx \frac{1}{v} \int_{a_{\beta e}} \phi \mathbf{n} \cdot \mathbf{s} da \quad (45)$$

と近似できる．式(45)は，上記の灰色の部分の体積を，微小表面積  $da$  を底面積として，それに法線方向の移動量  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{s}$ （底面からの高さに対応）を乗じて求める操作である．式(45)により，式(34)の右辺は

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{v} \int_{v_{\beta,II}} \phi dv - \frac{1}{v} \int_{v_{\beta,I}} \phi dv}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{v} \int_{a_{\beta e}} \phi \mathbf{n} \cdot \mathbf{s} da}{s} = \frac{1}{v} \int_{a_{\beta e}} \phi \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_s da \quad (46)$$

と変形できる．ここに， $\mathbf{e}_s$  はベクトル  $s$  と同じ方向の単位ベクトルである．式(46)を式(44)に代入すると

$$\frac{\partial \langle \phi \rangle}{\partial s} = \frac{1}{v} \int_{a_{\beta e}} \phi \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_s da \quad (47)$$

となり，ベクトル  $s$  の方向を直交座標系と一致させれば，

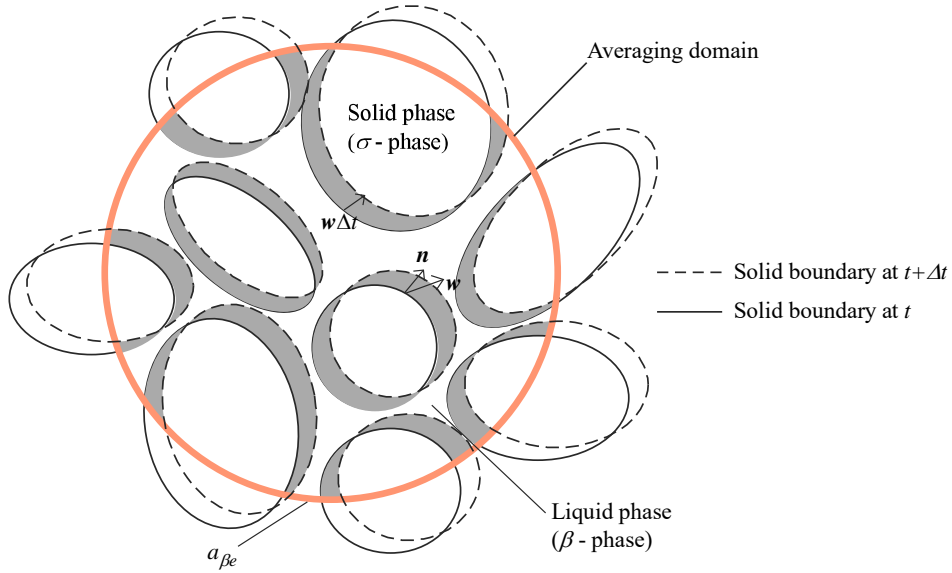
$$\frac{\partial \langle \phi \rangle}{\partial x_i} = \frac{1}{v} \int_{a_{\beta e}} \phi n_i da \quad (48)$$

となる．式(48)は式(6)と同じであり，ガウスの発散定理を用いて，式(48)を変形すれば

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle \phi \rangle}{\partial x_i} &= \frac{1}{v} \int_{a_{\beta e}} \phi n_i da \\ &= \frac{1}{v} \int_{\bar{a}_{\beta} \cup a_{\beta e}} \phi n_i da - \frac{1}{v} \int_{\bar{a}_{\beta}} \phi n_i da \\ &= \frac{1}{v} \int_{v_{\beta}} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dv - \frac{1}{v} \int_{\bar{a}_{\beta}} \phi n_i da = \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right\rangle - \frac{1}{v} \int_{\bar{a}_{\beta}} \phi n_i da \end{aligned} \quad (49)$$

を得る，式(43)の最後の等式は式(5)と一致する．

**Fig. 3**には，平均量の時間微分を考えるための液相領域の時間変化を示す．同図は，**Fig. 1(b)**に示した液相領域が，液相や土粒子の移動によって変化する様子を示す．式(9)の平均量に対する時間微分を考える際は，空間の座標については固定されているおり，平均領域の位置は変化しないことに注意する．時刻  $t$  における物理量を  $\phi$ ，液相領域を  $v_{\beta,t}$  とし，微小時間  $\Delta t$  だけ経過したときのそれらを  $\phi_{t+\Delta t}$ ， $v_{\beta,t+\Delta t}$  とすると， $\phi$  の体積平



**Fig. 3** 液相領域の時間変化  
Geometrical change of liquid phase with time

均の時間微分は以下のように与えられる.

$$\frac{\partial \langle \phi \rangle}{\partial t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{V} \int_{V_{\beta,t+\Delta t}} \phi_{t+\Delta t} dv - \frac{1}{V} \int_{V_{\beta,t}} \phi_t dv}{\Delta t} \quad (50)$$

式(50)はその右辺の分子部分を変形して

$$\frac{\partial \langle \phi \rangle}{\partial t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\frac{1}{V} \int_{V_{\beta,t+\Delta t}} \phi_{t+\Delta t} dv - \frac{1}{V} \int_{V_{\beta,t}} \phi_{t+\Delta t} dv}{\Delta t} + \frac{\frac{1}{V} \int_{V_{\beta,t}} \phi_{t+\Delta t} dv - \frac{1}{V} \int_{V_{\beta,t}} \phi_t dv}{\Delta t} \right) \quad (51)$$

とできる. 式(51)の右辺第1項の分子にある体積平均の差は, **Fig. 3**において, 時刻  $t$  と  $t+\Delta t$  での平均領域にはさまれた領域 (**Fig. 3** の灰色の部分) における積分に対応し,  $\Delta t$  が十分に小さいとき

$$\frac{1}{V} \int_{V_{\beta,t+\Delta t}} \phi_{t+\Delta t} dv - \frac{1}{V} \int_{V_{\beta,t}} \phi_{t+\Delta t} dv \approx \frac{1}{V} \int_{\bar{a}_\beta} \phi_{t+\Delta t} \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} \Delta t da \quad (52)$$

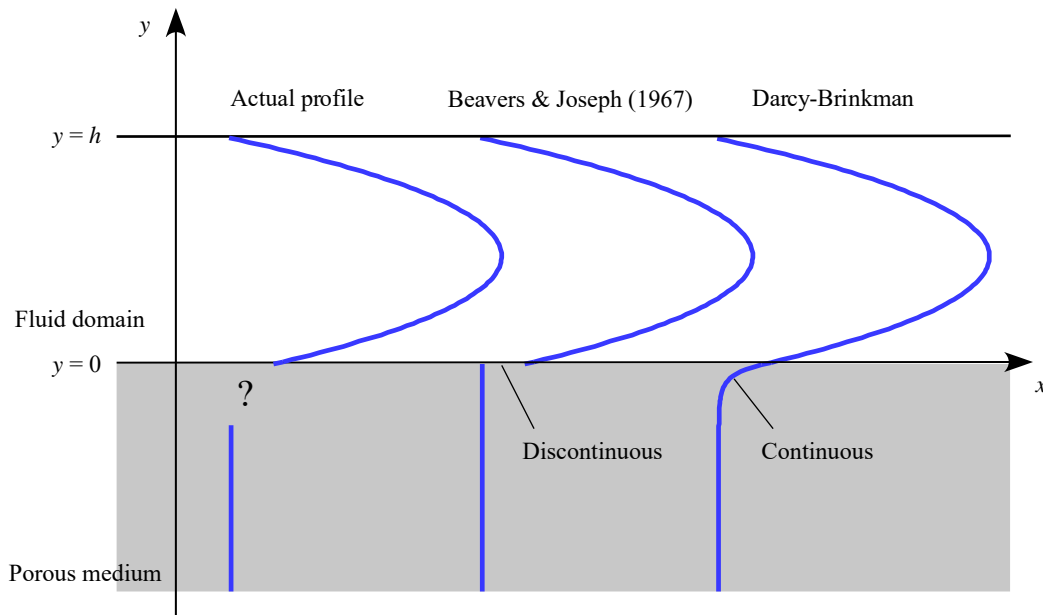
と近似できる. 式(52)は, 上記の灰色の部分の体積を, 微小表面積  $da$  を底面積として, それに  $\Delta t$  間の法線方向移動量  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{w} \Delta t$  (底面からの高さに対応) を乗じて求める操作を意味する (**Fig. 3** 参照). 式(52)において,  $\mathbf{w}$  は平均領域に含まれる液相境界の移動速度であり, その右辺は **Fig. 3** の灰色で示した領域での積分を意味する. また, 平均領域は変化しないためその境界の移動速度はゼロであることに注意する. 式(51)に式(52)を代入して整理すれば,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle \phi \rangle}{\partial t} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\frac{1}{V} \int_{\bar{a}_\beta} \phi_{t+\Delta t} \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} \Delta t da}{\Delta t} + \frac{1}{V} \int_{V_\beta} \frac{\phi_{t+\Delta t} - \phi_t}{\Delta t} dv \right) \\ &= \frac{1}{V} \int_{\bar{a}_\beta} \phi_{t+\Delta t} \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} da + \frac{1}{V} \int_{V_\beta} \frac{\partial \phi}{\partial t} dv \\ &= \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial t} \right\rangle + \frac{1}{V} \int_{\bar{a}_\beta} \phi_t \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} da \end{aligned} \quad (53)$$

を得る. 式(53)の左辺第2項を右辺へと移項すれば, 式(9)が導かれる.

### 3. 界面条件とその役割

今, 多孔質体中の流れとその上(または周り)の流体領域(流体のみによって占められた領域)を区別し, それぞれの領域で別々の支配方程式を解くことを考える. もちろん, 流体領域における支配方程式は Navier-Stokes 式であるが, 多孔質体中の浸透流を解く際には, 上述の Darcy-Brinkman 式を用いる他にも, 従前のように連続的にダルシー則を代入し, 間隙水圧のみを変数とする方程式を解く方法も考えられる. しかし, 例えば, 水と土の境界のような流体領域と多孔質体の境界において, 圧力と流速を適切につなげるには間隙水圧のみを変数とする従来の浸透流解析は向いていない. それは, 圧力と境界と垂直な流速成分は連続でなければならないものの, ダルシー則では圧力(間隙水圧)と流速が独立でないため, 圧力と流速を境界上で同時に与えることができないためである. 境界に垂直な流速成分の連続性は, 質量保存を満たすために必要であり, 圧力の連続性は最も一般的な境界条件となる. なお, 境界に沿う接線方向の流速成分については, 現在も研究対象となっており, いくつかのモデルが提案されている.



**Fig. 4** 多孔質体上のハーゲン・ポワズイユ流れ  
Hagen-Poiseuille flow on a porous medium

一般的には, 流体領域の流れと多孔質体中の浸透流を連続的に解析するには, その境界において上述の界面条件を満たすような計算手法を適用する必要があるが, ここでは, 簡単な問題として水平方向のハーゲン・ポワズイユ流れを取り上げ, 界面条件の役割について考える.

**Fig. 4** に示した多孔質体上の定常なハーゲン・ポワズイユ流れを考えると, 流速は  $x$  方向(水平方向)のみであり, Navier-Stokes 式及びダルシー則から以下の式を得る.

$$-p' + \mu \frac{d^2 u}{dy^2} = 0 \quad (0 < y < h) \quad \text{in Fluid domain} \quad (54)$$

$$-p' - \frac{\mu}{K} \langle u \rangle = 0 \quad (y < 0) \quad \text{in Porous medium} \quad (55)$$

ここに,  $u$  は水平方向流速  $u_x$ ,  $p'$  は水平方向の圧力勾配  $\partial p / \partial x$  を意味し, 流体領域と多孔質体において, 同じ一定の値を持つと仮定している. なお, この問題では, 流体領域と多孔質体の境界に垂直な流速成分はな

いため、簡単なダルシー則の適用が可能である。

式(55)は、多孔質領域において

$$\langle u \rangle = -\frac{K}{\mu} p' \quad (y < 0) \quad (56)$$

となり、流速は一定となる。流体領域では、式(54)を積分することで以下を得る。

$$u = \frac{p'}{2\mu} y^2 + C_1 y + C_2 \quad (0 < y < h) \quad (57)$$

ここに、 $C_1$  と  $C_2$  は積分定数である。流体領域の上部 ( $y = h$ ) においてノンスリップ条件、

$$u = 0 \quad \text{at} \quad y = h \quad (58)$$

流体領域下部の界面に Beavers-Joseph 条件 (Beavers & Joseph, 1967)

$$\frac{du}{dy} = \frac{\alpha}{\sqrt{K}} (u - \langle u \rangle) \quad \text{at} \quad y = 0 \quad (59)$$

を課すことで、式(57)の二つの積分定数を決定でき、流体領域において

$$u = \frac{p'}{2\mu} \left( y + h + \frac{-h^2 + 2K}{h + \frac{\sqrt{K}}{\alpha}} \right) (y - h) \quad (0 < y < h) \quad (60)$$

と速度分布を求めることができる。多孔質体では、圧力勾配  $p'$  によって流速は既定され、式(59)の Beavers-Joseph 条件を課すことから、流速 ( $\langle u \rangle$  と  $u$ ) は界面において不連続となる点に注意する。このように、界面条件を課すことで、流体領域の流れと多孔質体中の浸透流を接続することが可能となる。

次に、多孔質体中の浸透流に Darcy-Brinkman 式を適用してみる。この場合は、粘性項 (Brinkman 項) の存在により、界面における流速を連続にすることができる。Fig.4 に示した定常な  $x$  方向の流れに、Darcy-Brinkman 式を適用すると

$$-p' + \frac{\mu}{\lambda} \frac{d^2 \langle u \rangle}{dy^2} - \frac{\mu}{K} \langle u \rangle = 0 \quad (y < 0) \quad (61)$$

と変形できる。式(61)において  $\lambda$  は間隙率である。式(61)の一般解のうち、 $y \rightarrow -\infty$  において発散しないものは以下の形をとる。

$$\langle u \rangle = D \cdot e^{\sqrt{\frac{\lambda}{K}} y} - \frac{K}{\mu} p' \quad (y < 0) \quad (62)$$

ここで、 $D$  は積分定数である。流体領域の上部 ( $y = h$ ) におけるノンスリップ条件 (式(58)) に加えて、界面条件として流速と流速勾配の連続性を課す。

$$u = \langle u \rangle \quad \text{and} \quad \frac{du}{dy} = \frac{d\langle u \rangle}{dy} \quad \text{at} \quad y = 0 \quad (63)$$

これらの条件により、式(57)の  $C_1$  及び  $C_2$  と式(62)の  $D$  の 3 つ積分定数を定めることができ、流体領域及び多孔質領域において、以下の解を得る。

$$u = \frac{p'}{2\mu} \left( y + h + \frac{-h^2 + 2K}{h + \sqrt{\frac{K}{\lambda}}} \right) (y - h) \quad (0 < y < h) \quad (64)$$

$$\langle u \rangle = \frac{p'}{2\mu} \cdot \frac{-h^2 + 2K}{h + \sqrt{\frac{K}{\lambda}}} \cdot \sqrt{\frac{K}{\lambda}} e^{\sqrt{\frac{\lambda}{K}} y} - \frac{K}{\mu} p' \quad (y < 0) \quad (65)$$

このように、Brinkman項を導入することで、流速を連続的に解くことが可能となる。上述の通り、界面条件は、それぞれの領域における境界条件となり、多孔質体と流体領域の流速をつなげる役割を果たす。

**Fig.4** に界面条件として Beavers-Joseph 条件を課した場合、また Brinkman 項を導入して流速を連続につなげた場合の流速分布の様子を示す。Brinkman 項を導入した場合、流体領域と多孔質体の中で流速は連続となるが、多孔質体の上面において急激に流速が変化する。この領域は式(65)から分かるように  $\sqrt{K/\lambda}$  のオーダーであり ( $\sqrt{K}$  は長さの次元を持ち、間隙サイズのオーダー)、非常に小さな区間で流速が変化する。このような非常に小さな区間での急激な流速の変化を Beavers-Joseph 条件はモデル化している。なお、式(60)と式(64)を比較すると、 $\alpha = \sqrt{\lambda}$  のとき、それらは全く同じ式となる。

#### 参考文献

- Bars, M.L. and Worster, M.G. (2006) : Interfacial conditions between a pure fluid and a porous medium: implications for binary alloy solidification, *Journal of Fluid Mechanics*, 550, 149-173.
- Beavers, G.S. and Joseph, D.D. (1967) : Boundary conditions at a naturally permeable wall, *Journal of Fluid Mechanics*, 30, 197-207.
- Howes, F.A. and Whitaker, S. (1985) : The spatial averaging theorem revisited, *Chemical Engineering Science*, 40(8), 1387-1392.
- Whitaker, S. (1999) : *The method of volume averaging*, Kluwer.
- 藤澤和謙, 村上 章 (2019) : Darcy-Brinkman 式の不飽和領域への拡張, *農業農村工学会論文集*, 308 (87-1), I\_27-I\_36.