

2013 年度（第 49 回）水工学に関する夏期研修会講義集

水工学シリーズ 13-B-3

伊勢湾台風級の高潮と確率潮位

名古屋工業大学 准教授

北野利一

土木学会

水工学委員会・海岸工学委員会

2013 年 8 月

伊勢湾台風級の高潮と確率潮位

Statistical Analysis for Extremes

- Return Period & Encounter Probability for Larger Storm Surges than that by Isewan Tayphoon 1959 -

北野 利一

Toshikazu KITANO

1. 名古屋港と三河港の確率潮位

(1) 2009 年 18 号台風

名古屋港と三河港の潮位偏差に対する極値解析の結果を図-1 および 2 に示す。ここで注目すべき点は、2009 年に三河港に直撃した台風 18 号による潮位偏差である。これにより、コンテナの漂流被害が生じたことを記憶されている方も多いと思われる。三河港において、2008 年までの観測記録で確率潮位偏差を算出すると（図-2a），データとの適合が良い（ように見える）。これに対して、2010 年まで観測期間を延ばし、2009 年の潮位偏差を用いると（図-2b），得られる確率潮位偏差の曲線は上方修正され、上位 1 位と 2 位のデータが外れてる（ように見える）。同様のことが名古屋港でも言えるのかもしれない。すなわち、既往最大値となる伊勢湾台風時の潮位偏差も含めて、観測記録に確率潮位偏差が良好に適合している（ように見える）。たまたま、2009 年台風 18 号は三河港を直撃したが、もし、名古屋港に直撃していたら、同じようなことが起こるであろう。このような結果に直面すると、外力の観測記録と統計解析の結果の適合性の数値の差異を細かく追求することに疑問を感じるのではないだろうか？本稿では、そのような統計や確率の取扱い法を、できるかぎり根底から解き明かそうと企てたものである。沿岸域における来襲波の波動方程式がナビエ・ストークスやオイラーの運動方程式に由来するように、高潮・高波の来襲頻度の統計解析にも根源的な考え方があり、都合のよい曲線で当てはめる作業ではないということが、お分かりいただければ著者の本望である。

上記の解析にあたり、名古屋港の観測期間は 1951-2010 年の 60 年間としている。ただし、三河港については、1971 年以降の資料であるが、1953 年と 1959 年の高潮記録は特別に与えられている。この場合には、名古屋港との比較から、1953 年と 1959 年の高潮の前後は、顕著な高潮が来襲していないと類推して、1951 年から 1970 年における上位最大 2 位の極値と判断をすることも妥当であろう。しかし、1971-2010 年の 40 年間の記録に、何年間の最大値と見れば良いのかよくわからない 2 つの高潮記録が付与されていると見ることも、可能である。このように、連続する記録に付与される孤立した記録を伝説的記録とよび、北野ら (2013a) では、それが付与されることによる効果を検討している。

(2) 観測資料とモデルの適合性とは？

観測資料への確率外力モデルの適合性を計るために、観測記録とそれに対応する確率外力の相関係数を求め、宝・高棹(1988)は SLSC (標準最小二乗基準) を、合田(1988)は相関係数の残差とその平均の比の最小

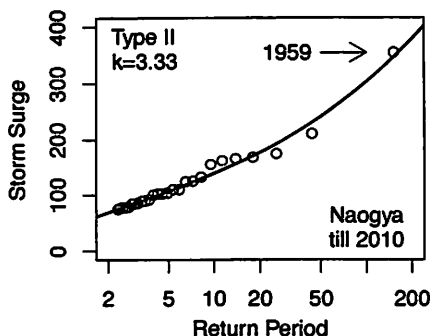


図-1 名古屋港の確率潮位

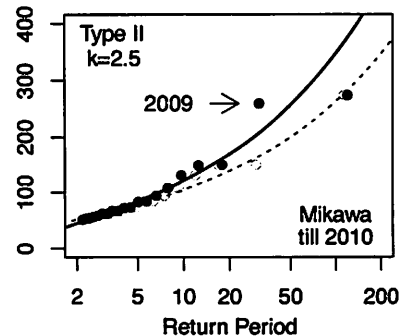
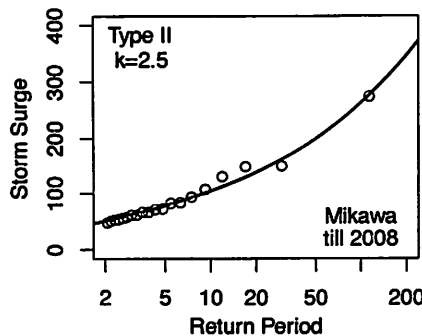


図-2 三河港の確率潮位

のものを良しとする MIR 基準を設けている。また、合田は、相関係数の残差の 95% 範囲に入らないものを候補分布から除く（スクリーニング）ための REC 棄却基準（注：C は Criterion ではなく、Coefficient の略）や、既往最大値を異常値として棄却する目的で、最大偏差に基づく DOL 棄却基準も考案している（合田、2008 にて、まとめられている）。これらの基準を用いて、最終的には、幾つかの候補分布から最良分布を 1 つ選択することになる。そんな都合良く扱っても良いのであろうか？

一目見ただけでも当てはまりが悪いと感じるものを良しとするわけにはいかないが、当てはまりそうな候補分布を幾つか試して、そのなかで当てはまりの良いものを選ぶという方針そのものに致命的な問題があると私は考える。適合が良すぎるのは、むしろ不自然である（そのような不自然さを警告するために、オーバーフィットという概念もある）。過去に生起する可能性があった事象が偶然にも生起しなかった場合、過去の記録に基づいて判断することは、将来に生起する可能性を見逃すという警句が、未曾有の被害をもたらした 2011 年の東日本大震災の後に、しばしば指摘される。まさに、この指摘は、当てはまりの良いものを選ぶという方針の弱点を言い当てているのではないだろうか？ この警句は、統計解析を全般を否定するものではない。科学技術は観測記録に基づくものであり、そのためには、観測記録が本質的に満足すべき原理を定め、その原理を満足する確率分布に観測記録を適合できるかどうかの可否を診断すべきであり、無節操に多様な分布を当てはめて、その中から適合性がよいものを 1 つ選べば良いというものではない。適合性は 1 つに対して良否を確認する程度のものであり、多に対して比較の尺度にするものではないと考える。

2. 再現期間

(1) ベルヌーイ試行における平均待ち時間とポアソン過程における生起率（平均生起数）

例えば、100 年確率潮位偏差 y_{100} とは、何を意味しているか？ 再現期間の定義に従えば、 y_{100} を越える潮位偏差が生じる事象が 1 度生じてから、次に生じるまでの期間の平均が 100 年であるということである。実は、100 年の数え方は 1 とおりではない。そこに、かなり重大な問題点が隠されているのである。

1 年間に生じる潮位偏差の最大値が、ある大きさを越える確率を q とすれば（越えない確率は $1 - q$ であり）、年最大潮位偏差が、ある大きさを越える／越えないの 2 値のいずれかをとりベルヌーイ試行の待ち時間分布である幾何分布から、ある大きさを越えてから次に越えるまでの待ち時間（ n 年め）の期待値 T_1 は、

$$T_1 = E(n) = \sum_{n=1}^{\infty} nq(1-q)^{n-1} = q^{-1} \quad (1)$$

と表される。2 値をとるベルヌーイ試行の典型例として、コイントスが知られる。オモテの出る確率 q とウラの出る確率 $1 - q$ のコインを投げる際の問題は、確率を習い始める学生にとってなじみ深いものである。このようにして得られる T_1 が、多くの論文や教科書で用いられている再現期間である（例えば、合田、2008 を参照せよ）。期待値 T_1 は連続量である実数で定義されるのに対し、この場合の確率変数 n は離散量である自然数で扱われることに注意する。なお、 T_1 における添字 1 は、1 年単位で数えた量 n の期待値であることを明示するものである。後に計算の詳細を示すが、2 年単位で数えた量 $2n$ の期待値は T_1 に一致しない（つまり、この場合の 100 年の数え方には、それぞれ固有なルールがある）。ここで、式 (1) を変形すれば、

$$q = \frac{1}{T_1} \quad (2)$$

を得る。一般に、年を単位とする再現期間 T_1 を分母に、分子の 1 も、この場合は、年を単位として考えて、無名数である超過確率 q が得られると理解すべきである。すなわち、1 年間における期間最大値が、ある大きさを越えるか／越えないか、という 2 値のベルヌーイ試行を考えるので、先に述べたとおり、確率変数 n は、年単位で数える。日本沿岸における高潮による潮位偏差を考える場合には、同じ年に 2 度も同じ地点に、比較的に大きな潮位偏差が生じることは、ほとんど無いので、年単位でよいではないか、と思われる向きもおられるかもしれないが、以下で述べる問題提起は、それだけが理由ではない。

再現期間の逆数となる分数，例えば， $1/100$ に対して，「100 年に平均的に 1 回生じる割合」と表現する場合が，多くの文脈になじみやすいように思う．この場合には，分数 $1/100$ は超過確率ではなく，生起率と解釈している．すなわち，次式のように，対象となる期間 T の逆数で生起率 λ_1 を与える．

$$\lambda_1 = \frac{1}{T} \quad (3)$$

この場合， T はどのような単位のものを与えてもよい（つまり，この場合の 100 年の数え方はフリーである）．また，分子の 1 に単位が付かない（回で数える）．式 (3) は，次式に示す波の周期 T と周波数 f の関係

$$f = \frac{1}{T} \quad (4)$$

と形式は同じである．したがって，スペクトル解析になじむ土木技術者にとっては，超過確率で与えられる式 (2) よりも，式 (3) は，より理解し易い形式である，とも言える．なお，この場合は，平均という操作が，回数に適用されていることにも注意されたい．すなわち，所与の期間に生起する回数 j を確率変数と扱っている．平均生起率が与えられた状況で最も基本的な用いられるべき確率過程は，ポアソン過程であり，確率変数 j はポアソン分布に従うと考えるのが都合がよい．ポアソン分布は，所与の期間に対する平均生起率を用いて次式で表される（所与の期間を 1 年とすれば，1 年あたりの生起率 λ_1 を λ に代入すればよい）．

$$f(j) = \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda} \quad (5)$$

また，生起数 j がポアソン分布にしたがう場合のイベント間の時間 t は連続量である実数で扱われ，指数分布に従うことが知られている．ベルヌーイ試行では，イベント間の時間間隔を，離散量（幾何分布に従う変数）で扱われるのに対し，ポアソン過程では連続量（指数分布に従う変数）で扱われる．すなわち，ポアソン過程では，数学的な扱いとして，時間の最小単位を気にしなくてもよい（これが，この場合の 100 年の数え方はフリーであるとした理由である）．なお，ベルヌーイ試行における一定期間（ n を固定）における生起数 j の分布は，次式で表される 2 項分布である（確率を習う際に，一番始めに出会う分布かもしれない）．

$$f(j) = \binom{n}{k} (1-q)^{n-j} q^j \quad (6)$$

一般に用いられる再現期間は，式 (2) に含まれる T_1 であり，式 (3) に含まれる T ではない．場合によっては（年間に複数個の極値を対象とした極大値資料を扱う場合には），両者の違いの断り無く（こっそりと）， T を用いている場合もある．しかし，年最大値資料を扱う場合には，ほとんど例外無く T_1 を用いる（あえて， T が用いられることは無い）．それは， T_1 を T に変換する術（2. (4) の式 (19) に示す）が知られていないことに原因があるのかもしれない．実用上は両者の数値の違いはわずかなものである．私の主張は，そのような数値の問題ではない．再現期間の逆数が，確率なのか，生起率なのか，意味の違いを問題にしている．

(2) コイントスで例える極値モデルの功罪

外力の評価を行うためには，分数 $1/100$ と来襲外力の規模 y_{100} を結びつけなければならない．式 (2) を再現期間の定義に用いる場合には，外力の年最大値が，所与の大きさ y を越える確率を q と与えれば良い．す

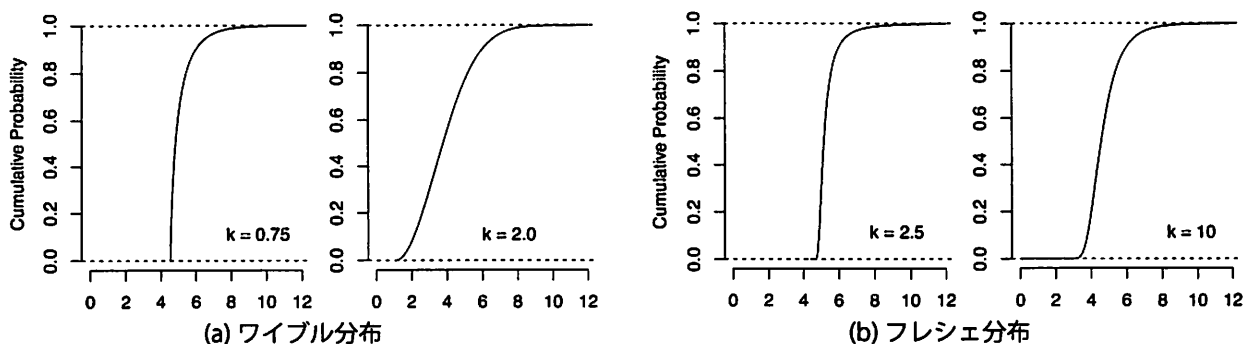


図-3 累積確率関数の例示（横軸は波高を示し，6m, $T_1 = 10$ yr; 7.5 m, $T_1 = 50$ yr で共通に固定してある）

なわち、外力の年最大値の累積確率を表す分布関数 $F_1(y)$ を用いて（最大値を決める期間 1 年を添字に含む）、

$$1 - F_1(y) = q \quad (7)$$

となる。水文学および海岸工学では、分布関数 $F_1(y)$ を具体的にどのように与えるか？を問題の 1 つにしてきた経緯がある。海岸工学では、Petruaskas & Aagaard (1971) に始まり、合田 (1988) が解析法を体系化したことにより、次式で表されるワイブル分布（最大値に対する極値分布の 1 つであるワイブル分布と区別するために、逆ワイブル分布とよばれることもあるので、細心の注意を要する）

$$F(y) = 1 - \exp \left[- \left(\frac{y - B}{A} \right)^k \right] \quad (8)$$

や、ガンベル分布（極値 I 型）ならびにフレシェ分布（極値 II 型）の極値分布が用いられる。

$$F(y) = \exp \left[- \left(1 + \frac{y - B}{kA} \right)^{-k} \right] \quad (9)$$

は、合田 (2008) が用いるフレシェ分布の表現である（上記の式 (8) および (9) では、最大値を決める期間を特に指定していないという点で、 F_1 の代わりに、 F と記している）。また、河川水文学分野では、米国を中心に、対数ピアソン III 型分布が用いられてきた期間が長い（現在は、一般化極値分布に置換えられつつある）。

これらの分布関数には、 A, B および k の母数（パラメータ）が含まれており、それらを観測記録から求める、すなわち、推定する必要がある。推定の手法あるいは手段として、最尤法をはじめとして、積率法（モーメント法）、L モーメント法、そして、最小自乗法が用いられる。いずれの分布関数を用い、そのような手法で、その母数を推定すべきか？このような議論が必要となるのは、統計解析の結果、観測記録が集中する最頻値の周辺では、データはモデルに良好に適合して見えるにも関わらず、既往最大値に対しては、推定された確率外力の曲線から外れ、その再現期間が非常に長くなる場合である。名古屋港の確率潮位偏差に対して、既往最大の伊勢湾台風による偏差は外れていないが、後に示す名古屋の日最大降雨の推定結果に対して、既往最大の東海豪雨は大きく外れる。このような場合、「もっと適合する分布があるにも関わらず、それを用いていないから、推定される確率外力の曲線から既往最大値が外れているのではなかろうか？」と悩まされるのである。また、「推定方法にも何か問題があって、母数がうまく推定できていないのではなかろうか？」という心配に思う人もいるだろう。特に前者の悩みについては、とにかくいろんな分布を候補分布として試すことで、その悩みを解消しようと努める。この時、コイントスで例えることのできる極値モデルが都合が良い。なぜなら、 $[0, 1]$ の範囲で単調増加する関数である累積確率関数ならば、どのようなものであっても、数学的な形式上は問題なく、式 (7) の F_1 に用いることができるからである。すなわち、式 (2) と (7) を組み合わせることにより、（コインの片側が出る確率） q を介して、外力の規模 y と再現期間 T_1 を次式のとおりに簡単に結びつけることができる。

$$1 - F_1(y) = q = \frac{1}{T_1} \quad (10)$$

果たして、式 (10) さえ満足すれば、どんな分布を当てはめても良いのであろうか？コイントスで例えるモデルの論理であれば、形式上は問題ない（ように思える）ので、当てはめた後に残る問題として、あてはまりの良さを検討することになる。その結果、幾つかの候補分布で当てはめて、良くあてはまるものを選ぶという方針になるのは自然な発想かもしれない。

実のところ、式 (10) はゼロ次オーダーで成立すべき条件にすぎないのである。他に、少なくとも 2 次オーダーで満足しなければならない条件があることを、2. (4) で示す。ここで述べておきたいのは、従来法で陥る思考回路の問題点が、どこにあるのかを示しておきたかったのである。すなわち、式 (2) で表される再現期間を用い、コイントスで例えるモデルで考えるゆえに、式 (10) さえ満足すれば良く、また、候補分布の中からあてはまりの良いものを選ぶという発想になるという問題点に、海岸工学をはじめ、水工学の先人たちが囚われてきたのである。後に示すが、他の条件も満足するためには、外力の規模と再現期間の関係は 1

つの関数形に限定され、その場合に検討すべきことは、むしろ、その関係を用いて良いかどうかの是非になる。

もし、あてはまりの良さにトコトンこだわる方に言っておきたいことがある。観測データと推定結果のあてはまりの度合いを、図-1や図-2において、厳密に見れるものではないと考える。なぜなら、図中の白丸は、観測データであるにも関わらず、その横軸は観測される量ではないからである。降順に並べた観測データを順序統計量 $y_{(i)}$ とよび、次式で表される点に、白丸でプロットされているにすぎない。

$$\left\{ q_{(i)}^{-1}, y_{(i)} \right\}, \quad q_{(i)} = \frac{i + \alpha}{n + \beta} \quad (11)$$

ただし、 (α, β) の値は考え次第で異なる。ここでは、合田(2008)に掲載されている極値Ⅱ型分布むけのプロットングポジションを用いた。順序統計量の再現期間を $q_{(i)}^{-1}$ とするのも「観測」と言えるのかもしれないが、単に、超過確率 $q_{(i)}$ を便宜的に割り付けただけである。そのような「観測」データと推定結果のあてはまりの良さを表す数値に一喜一憂するのはナンセンスと、私は考えている。

(3) 極値解析における根源的なロジック：比例関係

ここで簡単な（ひっかけ）問題を出そう。

問題：100年に1回の割合で生じるイベントと、200年に1回のイベントの平均は幾らか？

わざとぶっきらぼうな表現をして、平均がどこにかかるかをわざと曖昧にしてある。うっかりして、

$$\begin{array}{r} \text{100 年に1回のイベント} \\ +) \quad \text{200 年に1回のイベント} \\ \hline \text{300 年に2回} = \text{150 年に1回} \quad ?! \end{array}$$

という間違いをするかもしれない。A地点に来襲する外力が、あるレベルを越える生起率を $1/100$ 、A地点に隣接するB地点に来襲する外力が、同じレベルを越える生起率を $1/200$ とする。この時、2つの地点を併合して、いずれかの地点で、設定したレベルを越える外力が来襲する生起率を求めよ、というのが問題の状況になるだろう。なお、2地点AおよびB地点への外力の来襲は独立とする。その答えは、

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{100} + \frac{1}{200} \right) = \frac{3}{400} = \frac{1}{133.3\ldots} \quad (12)$$

より、その再現期間は約133年となる。平均には、いわゆる算術平均、幾何平均、調和平均などさまざまなものがあり、「使用上の注意をよく読み、用法と要領（用量?）を守って、正しくお使いください」と頭ごなしに言われても困るかもしれない（この場合は、調和平均を用いている）。むしろ、上述のメモを

$$\begin{array}{r} \text{100 年に1回のイベント} = \text{200 年に2回のイベント} \\ +) \quad \text{200 年に1回のイベント} \\ \hline \text{400 年に3回} = \text{133.3 (= 400/3) 年に1回} \end{array}$$

と訂正して、理解するのがよいだろう。ここで、「100年に1回 = 200年に2回」および「400年に3回 = 133.3 (= 400/3) 年に1回」という生起率が一定となる関係（生起率における比例関係）が用いられていることに注意すべきである。我々は、この比例関係を第一に満足させることを重視しているはずである。

もう1つ問題を挙げる。図-4に示すように、 8×8 の正方形を三角形と台形に分解して、 5×13 の長方形に並び変えられるようである。このパラドックスは、どこに矛盾の原因があるのか？ 比例関係の満足を重視する我々の直感を裏切るところに、この問題の答えがある。

式(5)のポアソン分布に含まれる生起率 λ は、対象期間に応じた値を入れるべきである。1年あたりの平均生起数（生起率） λ_1 に対して、 n 年あたりの平均生起数 λ_n は、次式の比例関係を満足する必要がある。

$$\lambda_1 : 1 = \lambda_n : n \quad \leftrightarrow \quad \lambda_n = n\lambda_1 \quad (13)$$

上述のメモに含まれる「100年に1回 = 200年に2回」も、この比例関係のとおりである。

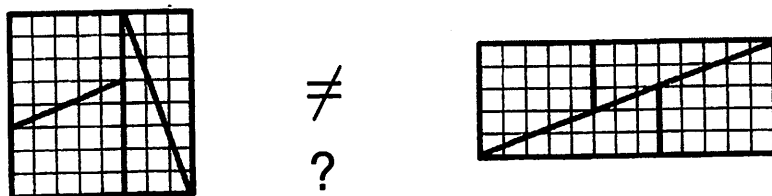


図-4 $8 \times 8 \neq 5 \times 13$ のパラドックス

2年単位のベルヌイ試行を考えて、2年最大値が再現期間 T_1 の確率外力を越えない確率は、再現期間の定義である式(2)によるものと、2年間で越えないということは、1年目も越えず、2年目の越えないという意味から得られるものと、2とおりで表されるゆえ、次の関係式を得る。

$$1 - \frac{1}{T_2} = \left(1 - \frac{1}{T_1}\right)^2 = 1 - \frac{2}{T_1} + \frac{1}{T_1^2} \quad \Leftrightarrow \quad T_1 \neq 2T_2 \quad (14)$$

ここで、 T_2 は、次のイベントの生起を2年単位で数えた平均数であり、単位をつけて表せば、少し奇妙な表記になるが、 T_2 [2年] となり、これを一般的な標記に変えるために [] 中の2を出して、 $2T_2$ [年] と表記したくなるのが、我々の直感である。しかし、それができないことを、式(14)は示しているのである(例えば、 $T_1 = 100$ に対して、 $2T_2 = 100.5025 \neq T_1$ となる)。これは、式(2)で定義される再現期間の論理的欠陥とも言える。近似の良否という程度の問題ではなく、式(2)で与えられる相互の量 T_1 および T_2 の対応が、我々の直感どおりではなく、式(14)に示される複雑なものになっているのである。これは、我々、人間にとって厄介な扱いにくい定義と言える。他方、我々の直感どおりに、式(13)の比例関係が成り立つ生起率を用いて、式(3)で定義される再現期間を用いるべきではなかろうか？

(4) 比例関係を満足することと等価な保存則

まずは、 i 年間における外力 y を超える平均生起数(生起率) λ_i として、生起率関数を

$$\lambda_i(y) = \exp \left\{ -\frac{1}{\xi} \log \left(1 + \xi \frac{y - \mu_i}{\sigma_i} \right) \right\} \quad (15)$$

と与えると、次式に示すとおり、式(13)の比例関係を満足することが確認できる。

$$n\lambda_1(y) = \exp \left\{ -\frac{1}{\xi} \log \left(n^{-\xi} + \xi \frac{y - \mu_1}{n^{\xi}\sigma_1} \right) \right\} = \exp \left\{ -\frac{1}{\xi} \log \left(1 + \xi \frac{y - \mu_n}{\sigma_n} \right) \right\} = \lambda_n(y) \quad (16)$$

ただし、上式の変形において、式(15)に含まれる定数 μ_1, σ_1 と μ_n, σ_n の置き換えを行っている。

$$\mu_n = \mu_1 + \sigma_1 \frac{n^{\xi} - 1}{\xi}, \quad \sigma_n = n^{\xi}\sigma_1 \quad (17)$$

なお、定数 ξ は期間 i に依存しない。また、特に、 $\lambda_1(\mu_1) = \lambda_n(\mu_n) = 1$ となることに注目する。これは、 μ_1 を越える1年あたりの生起率が1回、 μ_n を越える n 年あたりの生起率も1回となることを意味する。したがって、式(3)で定義される再現期間を用いれば、 μ_1 および μ_n が、再現期間1および n 年の確率外力ということになる。

式(15)で表される生起率を式(5)のポアソン分布に代入して、1年あたりに y を超える生起数がゼロ回となる確率が得られる。これは、年最大値が y を超えない確率(累積確率)関数であり、

$$F_1(y) = \exp \{ -\lambda_1(y) \} = \exp \left\{ - \left(1 + \xi \frac{y - \mu_1}{\sigma_1} \right)^{-1/\xi} \right\} \quad (18)$$

となる。これは一般化極値分布となっている (μ_1, σ_1 および ξ は位置、尺度および形状母数である)。ここで用いたポアソン分布と年最大値分布の関係から、 T_1 を T に変換する公式も次式のように得られる。

$$\frac{1}{T} = \lambda_1 = -\log \left(1 - \frac{1}{T_1} \right) \quad (19)$$

なお、式(10)に式(18)を代入して ($T_1 = n$ と置換), 次式で得られる確率外力 y_n と μ_n は異なる. それゆえ記号を区別した方がよい (ただし, $y_n \approx \mu_n$ ($n \rightarrow \infty$) となるので, 実用上は困らないかもしれないが).

$$y_n = \mu_1 + \sigma_1 \frac{[-\log(1 - 1/n)]^{-\xi} - 1}{\xi} \quad (20)$$

次に, 生起率 λ_i と外力 y の関係として, 変化量の関係 (微係数) を考える. 図-5 に示すように, 生起数をカウントする閾値を上げると, 生起率は低下する. その変化を異なる期間長で計っても「保存」されることを扱うのである. たとえば, 1) 期間を固定し, 生起率が, $\lambda_{50} = 1$ から $\lambda_{50} = 0.5$ に低下する場合と, $\lambda_1 = 0.02$ から $\lambda_1 = 0.01$ に低下する場合の外力レベルの変化率が等しい. あるいは, 2) 生起率の値を固定し, 期間長を変えた結果として, 生起率が変化した時の外力レベルの変化を見ていると解釈してもよい. この解釈は少しややこしいが, 例えば, 生起率 λ を $\lambda_1 = 0.02$ から $\lambda_2 = 0.02$ に変化させた場合と, $\lambda_{50} = 1$ から $\lambda_{100} = 1$ に変化させた場合の外力レベルの変化率が等しい, というようなものである. 保存則の形式で記述するために, まず, 式(13)の比例関係 (ある y で成立する関係) を次のように書き換える.

$$\lambda_n \Big|_{\lambda_n=1} = \lambda_n \Big|_{\lambda_1=1/n} \left(= n\lambda_1 \Big|_{\lambda_1=1/n} \right) = 1 \quad (21)$$

これと同じ形式で, 次式のように微係数が保存される (べきである).

$$D^\nu y \Big|_{\lambda_n=1} = D^\nu y \Big|_{\lambda_1=1/n} \quad (22)$$

なお, 生起率の変化は, そのままで見るのではなく, 対数変換する必要がある. なぜなら,

$$\log \lambda_n = \log \lambda_1 + \log n \quad \rightarrow \quad d \log \lambda_n = d \log \lambda_1 \quad (23)$$

となり, 対数変換された生起率の変化は期間長 n に依存しないからである. そこで, 次式に示す微係数を扱うことになる. なお, 式(15)の生起率関数を用いて微係数を求めた結果を最右辺に併記してある.

$$D^0 y = y = \mu_i + \sigma_i \frac{\exp(-\xi \log \lambda_i) - 1}{\xi} \quad (24)$$

$$D^1 y = -\frac{dy}{d \log \lambda_i} = \frac{\sigma_i}{\lambda_i^\xi} \quad (25)$$

$$D^2 y = -\frac{d}{d \log \lambda_i} \log \left(-\frac{dy}{d \log \lambda_i} \right) = \xi \quad (26)$$

これらの微係数を式(22)の保存則に代入することにより, 重要な結果が得られる. すなわち, $\nu = 0, 1$ から, 式(17)に表される定数 μ_n, σ_n と μ_1, σ_1 の関係が得られ, また, $\nu = 3$ から, 形状母数 ξ が期間 i に依存しないことが得られる. 特に, $\nu = 0$ から得られる関係は, 式(20)の y_n を式(19)により再現期間 n で書換えたものに相当するとも言える. したがって, 式(10)で確率外力 y_n を求めることは, $D^0 y$ に対する保存則を成立させることに相当する. 2. (2)において, 「式(10)はゼロ次オーダーで成立すべき関係式に過ぎず, さらに高次オーダーで成立すべき関係式がある」と指摘したのは, 式(24)に加え, 式(25)および(26)の微係数で, 保存則が成立しなければならないことに拠るからである. なお, 式(26)の2階微分はやや特殊な量になっているが, de Haan & Ferreira (2006) のテキストにも現れる.

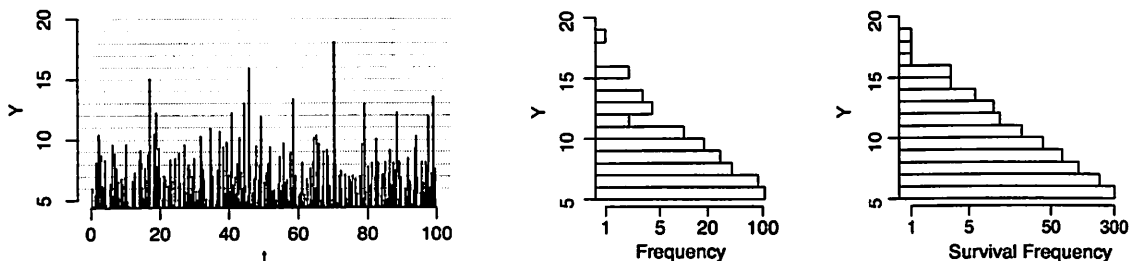


図-5 閾値の変化に伴う生起率の変化の例示 (左から順に, a) 時系列, b) y の階級毎の頻度, c) 閾値を超過する頻度)

式(24)~(26)に式(22)の保存則を適用したものは、水理学における連続式、ベルヌーイの定理、運動量による力の釣り合い式に対応する重要な関係式であると考え、極値統計解析では、一般化極値分布や一般化パレート分布や順序統計量の漸近分布のみを用いるべきである。そうしなければならない理由が、式(22)の保存則の成立、すなわち、式(13)の生起率の比例関係の成立として端的に現れていると考える。逆に言えば、我々が直感的に理解できる最も単純な条件（生起率の比例関係が成立する条件）のもとでは、極値の漸近分布しか使えないのである。もちろん、その条件を満足できずに、極値の漸近分布が使えない状況に直面する場合もある。しかし、保存則の1つ（ゼロ次オーダーである式(24)に対するものであり、式(10)のこと）しか満足しない適当な候補分布をいろいろと試して解決できるような問題ではないのである。むしろ、さらに条件を付けることにより（時間変数で条件を付ければ、トレンドや季節変化になり、気象指数などでも条件付けは可能である）、そのような条件による効果を取り除けば、生起率の比例関係という最も単純な条件が適用できることになり、式(15)の生起率を用いて、ポアソン分布で頻度解析が可能となる（極値の漸近分布を極値に適用して極値統計解析を行うことは、生起率を用いて、ポアソン分布で頻度解析を行うことに等しい。後者を点過程モデルによる極値統計解析とよぶこともある、Coles, 2001 参照）

3. 希少発生・甚大被害なイベントを極値解析の対象にしているという認識でよいのか？

(1) Rule of Thirds：オリジナルと我々にとって重要なもう1つの意味

図-6は、スマートフォンのカメラ機能でお馴染みのおと、縦と横に3分割した線が表示された画面である。これらの3分割の補助線の上に、撮影対象の重要な要素を配置することにより、バランスの良い構図が得られるという経験則の一種である。

図-7は、平均が1となるポアソン分布の累積分布を描き、生起数が0, 1および2以上で区切り線を入れたものである。それぞれの確率は、

$$f(0) = f(1) = \frac{1}{e} \approx 0.3679, \quad \sum_{j=2}^{\infty} f(j) = 1 - \frac{2}{e} \approx 0.2642 \dots \quad (27)$$

であり、いずれも約3分の1となっているとみなすことができる。これをポアソン確率における rule of thirds と名付ける。この大雑把とも言える認識が、極値理論で、非常に重要な役割を果たすと私は考える。

ここで、極値解析における問題提起を、もう1つさせていただきたい。極値解析は、希少発生・甚大被害なイベントを対象に行うものと認識されている。一般的な統計的検定に用いられる棄却基準に、 p 値が 0.05 や 0.01 以下となることを一般に使っているのに対し、超過確率が 0.02 や 0.01 となるクォンタイル（外力レベル）を推定しようというのは、なにか論理的に無理があるのではなかろうか？あるいは、それゆえに、極値解析は、まるで、論理的には不可能を可能にする魔術的な手法と思われているのではないだろうか？そのため、得られた結果が期待するものではない（推定される確率外力の曲線から、観測記録が大きく外れる結果となった）場合には、その結果が十分に信用されていないのみならず、せっかく行った極値理論もそれほど役に立たない、という印象を与えている（ような雰囲気を感じるのは、私だけだろうか？）

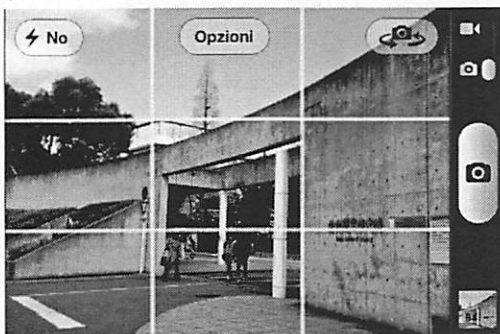


図-6 Rule of Thirds (写真撮影技術)

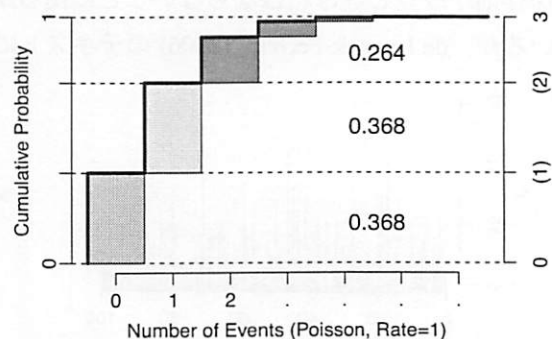


図-7 Rule of Thirds (ポアソン確率)

100 年に平均的に 1 度生じるイベントは、その生起数が比例関係を満足する（ポアソン分布に従う）と考えるならば、100 年間に生じるイベント数の実現値が、ちょうど 1 度である確率は約 1/3 であり、イベントが生じない（イベント数 = 0 となる）確率も約 1/3 であり、イベント数が 2 度以上となる確率も約 1/3 であり、どの場合も、それなりに起こりうるのである（0.0X のような小さな確率ではないのだ！）。極値解析とは、これらの十分に起こりえる事象に対して、統計解析を行うものであり、取るに足らない小さな確率で生じる事象を解析対象にしていると考えるのは、論理的に飛躍するのではなかろうか？「否、その解析に、年最大値を用い、年最大値分布における確率は、1/100 という希少（微小）確率を用いているおり、上述の説明は詭弁ではなかろうか？」と指摘される方もいるだろう。前節で説明したとおり、年最大値分布を基準に考えるのが良くないのである。それゆえ、むしろ、生起数が比例関係を満足するという根源的な原則さえ成り立つことだけを前提にしているのである。

ポアソン確率における rule of thirds は、Borgman (1963) が導入した遭遇確率の概念で言い直すことができる。所与の再現期間の確率外力を超える外力に再現期間内に遭遇する確率は、 $1/e \approx 0.368$ である。つまり、rule of thirds では 1 回とそれ以上で約 1/3 ずつと分割している確率を、遭遇確率では併せた表現になっている。むしろ、遭遇確率を、平均生起率と同じ（1 回）だけ遭遇する確率と、それよりも多くに遭遇する確率に分けることにより、遭遇しない確率よりも遭遇する確率が約 2 倍程度あることを意識させる点に、rule of thirds の特徴がある。

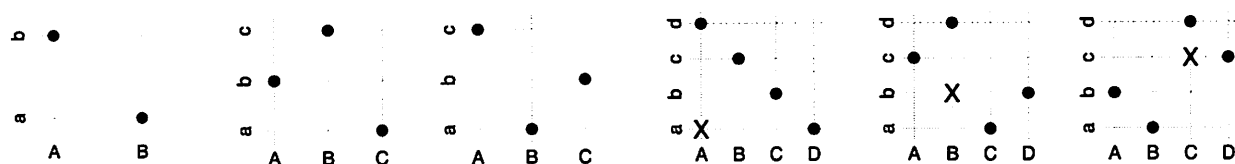
(2) 5 人グループにおける約 3 分の 1 (Rencontre Problem)

クリスマスなどのパーティで生じる悲劇の状況である。各自が持参したプレゼントをランダムに並び替えて、参加者に割り当てる。その時に、自らが持参したプレゼントが当たってしまうハプニングが生じない確率 P_n を求める問題である。2 人だけのパーティならば当然 1 とおりしかない（図-8a 参照）。3 人の場合は、A 君、B 君、C 君が持参したプレゼントを a, b, c と記せば、ハプニングが生じない状況は、図-8b に示す 2 とおりのパターンになる。すなわち、右のパターンは、A 君が持参したプレゼント a を B 君が受け取り、B 君が持参した b を C 君が、C 君が持参した c を A 君が受け取り、事無きに終わる。この 3 人に加え、D 君が参加した場合に、ハプニングが生じないパターンは 2 種に分類される。

第 1 種 A 君、B 君、C 君のうち 1 人にハプニングが生じて、残りの 2 人は無事にプレゼント交換ができていた時に、D 君は、そのハプニングが生じた人とプレゼント交換するパターン。

第 2 種 A 君、B 君、C 君でプレゼント交換が無事成立した後に、新たに加わった D 君が 3 人のうちの誰かとプレゼントを交換するパターン。

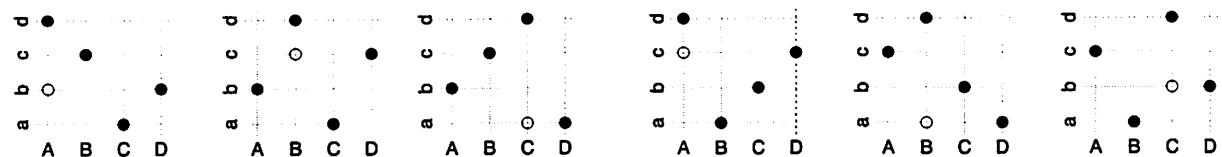
これらを図示したものが、図-8c および 8d である。第 1 種のパターンでは、×印のハプニングが生じてい



a) 2 人の場合

b) 3 人の場合

c) 4 人の場合（第 1 種のパターン）



d) 4 人の場合（第 2 種のパターン）

図-8 プレゼント交換成立の状況

るプレゼントを d と交換し (残りの 2 人はプレゼント交換ができていることにも注意), 第 2 種のパターンでは, 白丸印のプレゼントを D 君の持参したプレゼント d と交換 $\times$ 印のハプニングが生じているプレゼントを d と交換するのである. 合計 $3 \times 1 + 3 \times 2 = 9$ とおりとなる. これを一般化して, n 人のパーティでハプニングが生じないパターンの数を X_n とすれば,

$$X_n = (n-1)(X_{n-1} + X_{n-2}) \quad (28)$$

となる. これを次式のように変形すれば, 2 階の漸化式を 1 階の漸化式に変形できる.

$$\begin{aligned} X_n - nX_{n-1} &= -(X_{n-1} - (n-1)X_{n-2}) = (-1)^k (X_{n-k} - (n-k)X_{n-k-1}) = (-1)^{n-2} (X_2 - 2X_1) \\ &= (-1)^n \quad \rightarrow \quad X_n = nX_{n-1} + (-1)^n \end{aligned} \quad (29)$$

1 人のクリスマスパーティーでは, 自分用のプレゼントを用意するだけである (すなわち, 交換できないゆえ, $X_1 = 0$). 漸化式に順次代入して, $X_2 = 1, X_3 = 2, X_4 = 9, X_5 = 44, X_6 = 265, X_7 = 1854, \dots$ となる. また, ゼロ人のパーティでの場合の数を求めることは, 組み合わせ論的に無意味であるが, 漸化式より, $X_0 = 1$ と定義できる. 5 人のプレゼントの並び替えの総数は $5!$ であるので, $P_5 = X_5/5! = 0.3666 \dots$ となる. 無事にパーティでのプレゼント交換ができる確率よりも, うまいかない確率が過半数を占めること ($1 - P_5 = 0.6333 \dots$) に驚かされる. また, ちょうど j 人がハプニングに見舞われる確率 $P_5(j)$ は, 5 人から j 人を選んで, 残りの $(5-j)$ 人が無事にプレゼント交換できればよいので,

$$P_5(j) = \binom{5}{j} \frac{X_{5-j}}{5!} = \frac{X_{5-j}}{(5-j)!} \bigg/ j! \quad (30)$$

である. これを用いることにより, ハプニングに見舞われる人の数の期待値は,

$$\sum_{j=1}^5 j P_5(j) = \frac{0 \cdot 1X_5 + 1 \cdot 5X_4 + 2 \cdot 10X_3 + 3 \cdot 10X_2 + 4 \cdot 5X_1 + 5 \cdot 1X_0}{120} = 1 \quad (31)$$

と得られる (組み合わせ論的には解釈不能な $X_0 = 1$ がここで用いられるので, X_0 に意味が全く無いわけではない). n 人のパーティでも, その期待値はちょうど 1 となり, ハプニングが見舞われず無事にプレゼント交換ができる確率は約 $1/3$ となる. さらに, $P_n(j)$ が, 生起率 1 のポアソン分布に近似できることが導くことができる. これについては, より一般的なツールを用いて次節で詳細に検討することとして, ここでは, このような自然な設定条件の下で, ポアソン分布における rule of thirds が現れることに注目したい.

なお, このようなハプニングを置換における不動点とよんでいる. 式 (28) の漸化式は, 水理学でも有名なオイラーにより導かれ, ここで扱っている問題は, 出会いの問題 (Rencontre Problem) とよばれている.

(3) 離散数学入門

前節の解法は分かりやすいが, 問題に固有な方法であり, 応用は限定される. より一般的に解いて, 類似する問題に応用するためには, 整数を巧く扱うための道具が必要になる.

実数で取り扱う問題において, 少し複雑な内容を得るために微少量を導入して, 微分を用いる必要がある. これと同様に, 整数で取り扱う問題においては, 差分が重要な役割を果たす. 任意の関数 $g(n)$ に対して,

$$\Delta g(n) = g(n+1) - g(n) \quad (32)$$

として, 差分が定義される. 微分における微少量 dx は, $\Delta x = (x+1) - x = 1$ であることに注意しておく. 例えば, ベキ関数 x^n の微分に対して, 下降ベキ x^n の差分が類似した関係にある.

$$\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}, \quad \frac{\Delta}{\Delta x} x^n = \Delta x^n = nx^{n-1} = (x+1)x^{n-1} - x^{n-1}(x-n+1) \quad (33)$$

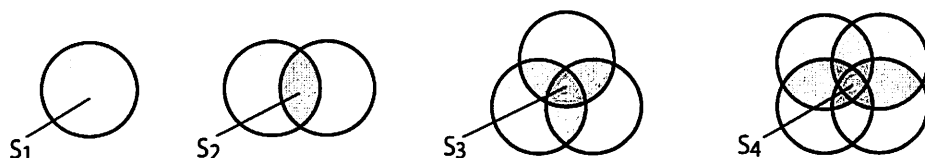


図-9 包含と排除の原理による重複の解消

なお、上昇べき $x^{\bar{n}}$ とあわせて、下降べき $x^{\underline{n}}$ を以下に定義しておく.

$$x^{\underline{n}} = \frac{x!}{(n-x)!} = x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1) \quad (34)$$

$$x^{\bar{n}} = \frac{(x+n-1)!}{(n-1)!} = x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1) = (x+n-1)^{\underline{n}} \quad (35)$$

さらに、差分についての重要な公式として、下記の 1 組の反転公式が知られる.

$$g(n) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \Delta^i g(0) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \Delta^{n-j} g(0) \quad (36)$$

$$\Delta^n g(0) = \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \binom{n}{i} g(i) = \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} g(n-j) \quad (37)$$

これは、差分 Δ を前進演算子 F を用いて、

$$\Delta = F - 1; \quad \Delta g(x) = (F - 1)g(x) = g(x+1) - g(x), \quad Fg(x) = g(x+1) \quad (38)$$

と表せることを利用して、次のように、 Δ および $F (= \Delta + 1)$ をそれぞれ 2 項展開したものである.

$$g(n) = F^n g(0) = (\Delta + 1)^n g(0) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} 1^{n-i} \Delta^i g(0) \quad (39)$$

$$\Delta^n g(0) = (F - 1)^n g(0) = \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \binom{n}{i} F^i g(0) \quad (40)$$

式 (37) の関係式は、特に、「包含と排除の原理 (Inclusion-exclusion principle)」, 「ふるいわけ公式 (Sieve theorem)」という名称でよばれるものに相当し、その確率表現として、総数 $g(n)$ で除して得られる確率を S_j , P_n および $P_n(j)$ で表せば、すなわち、

$$S_j = \binom{n}{j} \frac{g(n-j)}{g(n)}, \quad P_n = \frac{\Delta^n g(0)}{g(n)}, \quad P_n(j) = \binom{n}{j} \frac{\Delta^{n-j} g(0)}{g(n)} \quad (41)$$

とにおいて、式 (37) (この場合、後の計算の準備のために、最右辺を用いていることに注意) は、

$$1 - P_n = S_1 - S_2 + S_3 - \cdots + (-1)^n S_n \quad (42)$$

と書き換えられる ($S_0 = 1$). 図-9 は、 S_1, S_2, S_3 および S_4 のイメージをベン図で表したものである (ただし、 S_4 を表す 4 つの円の重複で S_2 を表すものが全て描かれているわけではない点に注意). この公式は、系統的に場合の数やその確率を求めるのに役立つ. それを以下に解き明かそう.

式 (36) の関係式について、あえて書物で解説が加えられることはほとんどない (その理由は、数学者にとっては当たり前過ぎるのであろうか?). これは、結論から言えば、連続量に対するテーラー展開に相当するものである. すなわち、 $x=0$ まわりに $\varepsilon = n\delta x$ で関数 $g(x)$ をテーラー (マクローリン) 展開すると、

$$g(n\delta x) = g(0) + n\delta x \frac{dg(0)}{dx} + \frac{(n\delta x)^2}{2!} \frac{d^2 g(0)}{dx^2} + \cdots + \frac{(n\delta x)^j}{j!} \frac{d^j g(0)}{dx^j} + \cdots + \frac{(n\delta x)^n}{n!} \frac{d^n g(0)}{dx^n} + \cdots \quad (43)$$

と表せる. 式 (36) における 2 項係数を下降べきによる表現 $\binom{n}{j} = n^{\underline{j}}/j!$ で書き換えれば、

$$g(n) = g(0) + n\Delta g(0) + \frac{n^{\underline{2}}}{2!} \Delta^2 g(0) + \cdots + \frac{n^{\underline{j}}}{j!} \Delta^j g(0) + \cdots + \frac{n^{\underline{n}}}{n!} \Delta^n g(0) \quad (44)$$

と変形できる. ここで、 $\Delta x = 1$ であることと、式 (43) において $\delta x = dx$ として両者を同等の量とみなし、分母分子で相殺すれば、離散量の式 (44) は、連続量のテーラー展開に相当することがわかる. もちろん、連続量のべき n^j は離散量の下降べき $n^{\underline{j}}$ に相当すること (式 (33) を参照) や、連続量は無限項まで展開されることに對し、離散量は n 項で終わるという違いはある. なお、この式の両辺を、正の値 $g(n)$ で除して、全ての場合の確率の累和の形式とみて、全確率が 1 となることに利用される. すなわち、式 (41) の確率 $P_n(j)$ を用いて、次式のように得られる. 以上により、ここで用いる道具の準備は整った.

$$\sum_{j=0}^n P_n(j) = 1 \quad (45)$$

ここで、3. (2) の約3分の1を再訪問しよう。 n 人のプレゼントの並び替えの場合の数 (permutaions) は、 $n!$ である。また、図-9のベン図に示されるとおり、場合の数の重複を許せば、 n 人の内、少なくとも j 人が自らのプレゼントに当たる場合の数は $(n-j)!$ である (残りの $n-j$ 人にも、自らのプレゼントが当たるものもいるという点で重複を許した数え方になっている)。また、 n 人の内、その j 人を選ぶ組み合わせの数を考えると、 $g(n) = n!$ とおいて、式 (37) あるいは (42) を適用して、

$$P_n = \frac{\Delta^n 0!}{n!}, \quad S_j = \binom{n}{j} \frac{(n-j)!}{n!} \quad (46)$$

となる。この P_n が、3. (2) で用いられている P_n に一致する。すなわち、 $X_n = \Delta^n 0!$ となる。横方向に $n!$ を並べて、その隣合う差を順に下段の左側に順次、記せば次のようになる。最左列の値が、 $\Delta^n 0!$ である。これは、3. (2) で数えた X_n に一致することが確認できる。

	0!	1!	2!	3!	4!	5!	6!	7!
Δ^0	1	1	2	6	24	120	720	5040
Δ^1	0	1	4	18	96	600	4320	35280
Δ^2	1	3	14	78	504	3720	30960	287280
Δ^3	2	11	64	426	3216	27240	256320	2656080
Δ^4	9	53	362	2790	24024	229080	2399760	27422640
Δ^5	44	309	2428	21234	205056	2170680	25022880	312273360
Δ^6	265	2119	18806	183822	1965624	22852200	287250480	3884393520
Δ^7	1854	16687	165016	1781802	20886576	264398280	3597143040	52370755920

表内の1列めを分子に、1行めを分母にして、除すれば、 P_n は次のように得られる。

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	...
fraction	0/1	1/2	2/6	9/24	44/120	265/720	1854/5040	...
numeric	0.000	0.500	0.333	0.375	0.367	0.368	0.368	...

となる。ここで注目すべきは、その収束のはやさである。 $n=5$ でも $1/e \approx 0.368$ による近似は十分である (これでおわかりであろう、国民的に知られた男性グループの数 $n=5$ を単純な動機から用いたわけではないのである)。ところで、前節の式 (28) を次のように変形することもできる。

$$\frac{X_n}{n!} - \frac{X_{n-1}}{(n-1)!} = \frac{-1}{n} \left\{ \frac{X_{n-1}}{(n-1)!} - \frac{X_{n-2}}{(n-2)!} \right\} = \dots = \frac{2(-1)^{n-2}}{n!} \left(\frac{X_2}{2} - \frac{X_1}{1} \right) = \frac{(-1)^n}{n!} \quad (47)$$

その結果、確率 P_n を次式で表すことも可能である。

$$P_n = \frac{X_n}{n!} = \sum_{i=2}^n \frac{(-1)^i}{i!} = \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{i!} \approx \frac{1}{e} \quad (48)$$

また、自らのプレゼントが当たる人数が j 人である確率を $P_n(j)$ は、式 (30) を一般化して、

$$P_n(j) = \binom{n}{j} \frac{\Delta^{n-j} 0!}{n!} = \frac{P_{n-j}}{j!} \quad (49)$$

となる。これは、式 (41) の3つめの式からも得られる。 P_{n-j} は e^{-1} に近似できる ($n-j \gg 1$)。したがって、

$$P_n(j) \approx \frac{e^{-1}}{j!} = \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda} \Big|_{\lambda=1} \quad (50)$$

と近似できる。これは、 $\lambda=1$ のポアソン分布である。なお、 n 人のパーティにおける自らのプレゼントが当たる人数の期待値は、次式に示すとおり、ちょうど1となる。

$$\begin{aligned} E(j) &= \sum_{j=0}^n j P_n(j) = \sum_{j=0}^n j \frac{n(n-1)!}{j(j-1)!(n-j)!} \frac{\Delta^{n-j} 0!}{n(n-1)!} = \sum_{j=1}^n \binom{n-1}{j-1} \frac{\Delta^{(n-1)-(j-1)} 0!}{(n-1)!} \\ &= \sum_{j=0}^n \binom{n-1}{j} \frac{\Delta^{(n-1)-j} 0!}{(n-1)!} = \sum_{j=0}^n P_{n-1}(j) = 1 \end{aligned} \quad (51)$$

ここで、全確率が1であること (は、式 (46) の P_n を式 (36) に代入して確認可) を用いている。以上の結果から、このモデルがポアソン確率における rule of thirds を示す良い例の1つであることがわかる。

2項分布をポアソン近似により近似する方法は、(大数の法則にもじって) 小数の法則として紹介される。

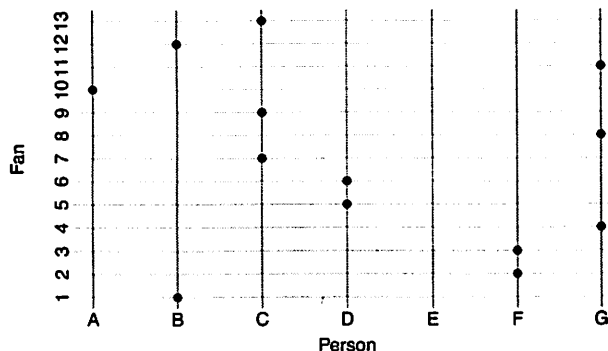


図-10 ファン投票の例示（アイドルEに残念な思いが）

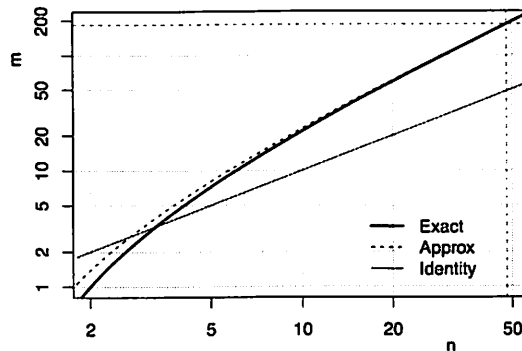


図-11 $\lambda \approx 1$ となる n と m の組合せ

その場合に、生起数の期待値を 1 にするためには、希少発生確率 $q = 1 - \exp(-0.01) \approx 0.00995 \dots$ となる ($n = 100$ の場合) が、その割り切れない値を的確にイメージすることは難しい。このことも、極値理論をコイントスによるモデルのみで理解しようとする罪の 1 つと考える。

(4) 48 人グループにおける約 3 分の 1 (Empty Cell Problem)

式 (37) において、 $g(n) = n^m$ を用いると、

$$Q_{(n,m)} = \binom{n}{k} \frac{\Delta^{n-k} 0^m}{n^m}, \quad S_j = \binom{n}{j} \frac{(n-j)^m}{n^m} \quad (52)$$

となる。 n^m は、区別のできる n 個の壺に区別のできる m 個の玉を入れる総数である。 $n = 48$ 人のアイドルにファン投票 ($m = \text{ファンの数}$) を行う際に、ファンの一人からも投票されないアイドルがゼロである確率を表している。この場合、 m の数を変えれば、その期待値 λ も変わる。あるアイドル 1 人に着目して、そのアイドルがファンの 1 人からも投票されない確率は $(1 - 1/n)^m$ であり、少なくとも 1 人のファンが投票してくれる確率は $1 - (1 - 1/n)^m$ となる。そして、アイドル n 人に対する期待値 λ は、次式で与えられる。

$$\lambda = n \left(1 - \frac{1}{n} \right)^m \quad (53)$$

図-11 は、上式において期待値 $\lambda = 1$ として、 n と m の関係を示したものである。図中の点線は近似式 $m \approx n \log n$ と ($\lambda = 1, n \gg 1$) である。 $n = 48$ の場合、 $m = 184$ で、 $\lambda = 0.997$ となる（残念ながら、この場合には、期待値をキッカリ 1 にすることは難しい）。

ファンの 1 人からも投票されないアイドルの数がちょうど j 人である確率を $Q_{(n,m)}(j)$ とすると、

$$Q_{(n,m)}(j) = \binom{n}{j} \frac{\Delta^{n-j} 0^m}{n^m} = \left(1 - \frac{j}{n} \right)^m \binom{n}{j} Q_{(n-j,m)} \quad (54)$$

と表される。この場合も、式 (53) で表される期待値を生起数 λ とするポアソン分布に近似できる（本論では省略するが、例えば、Feller (1968) を参照。実のところ、ファン投票の問題設定は、古くから知られる有名な問題の 1 つであり、Empty Cell Problem とよばれる）。これを数値的に具体的に示そう。式 (53) にて、 $\lambda \approx 1$ となる (n, m) の組み合わせに対して、式 (52) で表される $Q_{(n,m)}$ を求めると、

$(n, m) =$	(5, 7)	(7, 13)	(13, 32)	(48, 184)	(101, 463)	(365, 2150)	(2013, 15310)
$Q(n, m) =$	0.2150	0.2973	0.3091	0.3494	0.3544	0.3639	0.3671
$\lambda =$	1.0486	0.9436	1.0036	0.9974	1.0082	1.0014	0.9999

となり、 $1/e \approx 0.368$ にゆっくりと収束する様子がわかる。この場合は、 n にかなり大きな数が必要であり、 $n = 48$ でもまだ十分とはいえない。しかし、数が大きくなるにつれて、計算の労が急激に増える（差分で計算できるのも $n = 13$ 程度までであろう）某女子グループの数に合わせたのは、そのような数理的な背景がある。なお、実際の“総選挙”では、投票されるアイドルの数も 48 より多いが、桁違いの投票数（「私のことは嫌いでも、AKB48 のことは嫌いにならないでください」の名言で知られる 2011 年には $n = 150$ 、総投票数 $m = 1,166,145$ ）ゆえに、事実上 $\lambda \approx 0$ ($\approx 0.343/10^{3385}$) となる。その分母は、無量大数 10^{68} や

googol 10^{100} よりも大きい (余談であるが, 大きな数のことを天文学的数と言われることが多いが, 組合せ論的数とも表現してもよいのかもしれない. なお, 不可説不可説転という超巨大数もある). 現実問題として, 知人・友人・親戚一同が投票するので, わざわざこのような計算をしなくても, $\lambda = 0$ であろう.

ところで, $n = 48$ での計算を式 (52) の差分を用いて実行するのは難しい. なぜなら, 分子の大きな数を分母の大きな数で割ることになるからである (数式処理システムを用いた計算環境なら問題は少ないが, 一般的な数値計算環境では厳しい). 確率 $Q_{(n,m)}$ および $Q_{(n,m)}(j)$ は, 第2種スターリング数 $\left\{ \begin{smallmatrix} m \\ n \end{smallmatrix} \right\}$ を用いて,

$$Q_{(n,m)} = \frac{n!}{n^m} \left\{ \begin{smallmatrix} m \\ n \end{smallmatrix} \right\}, \quad Q_{(n,m)}(j) = R_{(n,m)}(n-j), \quad R_{(n,m)}(k) = \frac{n^k}{n^m} \left\{ \begin{smallmatrix} m \\ k \end{smallmatrix} \right\} \quad (55)$$

と表される. 第2種スターリング数の漸化式から, 確率 $Q_{(n,m)}$ を次のように作ることができる.

$$Q_{(n,m)} = Q_{(n,m-1)} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{m-1} Q_{(n-1,m-1)} \quad (56)$$

ここで, $Q_{(1,m)} = 1$, $Q_{(m+1,m)} = 0$ を境界値として, 再帰的に漸化式を適用して計算すればよい.

2項係数に加え, 第1, 2種スターリング数は, それぞれ次式に示す漸化式が知られる.

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}, \quad \left[\begin{smallmatrix} n+1 \\ k \end{smallmatrix} \right] = n \left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right] + \left[\begin{smallmatrix} n \\ k-1 \end{smallmatrix} \right], \quad \left\{ \begin{smallmatrix} n+1 \\ k \end{smallmatrix} \right\} = k \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} + \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k-1 \end{smallmatrix} \right\} \quad (57)$$

紙面の関係で本稿では扱うことができないが, 第1種スターリング数を用いれば, 見通しよく新記録の統計を論じることができる. ただし, スターリング数を使わずとも, 新記録における注目すべき重要な統計的特性を誘導することも可能であり, そのストーリーを北野 (2010) に記したので参照されたい (その入手は困難かもしれないので, 必要な方は, 「夏期研修 2013 名古屋」を合言葉に, envstat@gmail.com にメールで問い合わせただけければ, 折り返しお送りする準備がある). また, 上述のファン投票では, 壺の数 n に対し, 玉の数 m が, 多い場合 ($m > n$) を扱っているが, 逆に, 少ない場合 ($m < n$) は, 誕生日問題 (Birthday problem) とよばれる, 多くの人によく知られた問題に変わる. クラスメートに同じ誕生日のペア (トリオ, あるいはそれ以上でもかまわない) がいる確率を求める問題である. 特に, その確率が 0.5 を超えるクラスの最小サイズが 23 人と少なく, 我々の直感が裏切られることが話のポイントとなる (図-12, 13 参照). 1 年の日数 $d (= 365)$ の壺に, クラスメートの数 m の玉をランダムに投げ込んで, 1 つの壺に複数の玉が入らない (衝突しない) 確率 $B_m(0)$ (これまでの P_n や $Q_{(n,m)}$ にならって B_m と記すべきかもしれないが, この分野で重要な役割を果たすベルヌーイ数との混乱を避けるために, B_m の使用を控える) を求めれば, 少なくとも 1 組のペアのいる (衝突する) 確率を $1 - B_m(0)$ として求めることができる. また, 衝突数 (玉の総数から衝突していない玉の数を引いた数) i の分布 $B_m(i)$ を求めるのも簡単である. 以下に結果のみを記す. なお, 全ての壺に玉が埋まる (少なくとも 1 つ入る) まで玉を投げ続ける時間を対象にする場合は, Coupon collector's problem となる. 北野 (2004) に, 誕生日問題にまつわるコラムがあることを付記する.

$$B_m(0) = \frac{d^m}{d^m}, \quad B_m(i) = R_{(d,m)}(m-i) \quad (58)$$

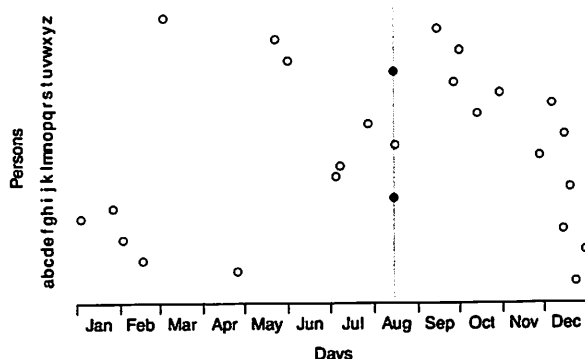


図-12 ある集団の誕生日の例示

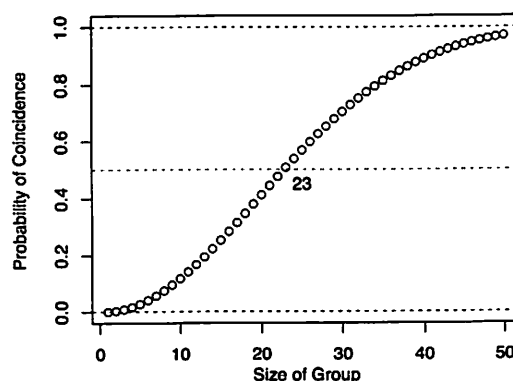


図-13 誕生日問題における偶然の確率

以上のように、離散数学を応用した離散分布は、古くから研究されている。これらは、確率という抽象量に対して、我々の直感や想像力を養うために不可欠な知識であると考える。すなわち、2項分布だけの知識で極値理論に立ち向かえるほど、極値理論から得られる結果を使うことは簡単ではないのである。

(5) 確率 0.35 の心理学

確率の大小についての人間の感じ方を考慮に入れば、上記に得られたポアソン確率についての解釈に説得力が増すかもしれない。2002 年のノーベル経済学賞を受賞した Kahneman 教授によれば、確率 0.35 が額面どおりに認識されやすい値で、これより小さな確率は過大評価され、これより大きな確率は過小評価されやすいそうである（雑誌 Newton, 2013 年 6 月号）。プレゼント交換においても、ファン投票（式 (53) において $\lambda \approx 1$ を満足するようにファンとアイドルの数を調整済）においても、悲劇（自らが持参したプレゼントに当たる人がいる／誰からも投票されないアイドルがいる）が生じない確率より、悲劇が生じる確率は大きい。しかしながら、我々の直感は、むしろ、半々程度に感じているのではなかろうか？ すなわち、悲劇の生じない確率 0.368 はそれなりに的確に把握し、その一方で、悲劇の生じる確率 0.632 を過小評価して、それぞれが同程度とみなして、悲劇が生じる場合と生じない場合が半々であると見誤ってはいないだろうか？ 同様に、3. (1) で取り上げた遭遇確率も過小評価されやすいのである。なお、遭遇確率が過小評価されることは、生起数の期待値が本来の 1 からそれ未満の値に低下することを意味する。この点でも問題である。

(6) Rule of Three

3. (1) での rule of thirds は、薬学におけるリスクに対する注意喚起に用いられる rule of three をもじったつもりである。両者は共にポアソン分布の重要な特性であるが、内容は似て非なるものである。rule of three の概略は次のとおり。生起数がゼロとなる確率は、式 (5) にて生起率 λ とすると、 $f(0) = \exp(-\lambda)$ となる。したがって、この確率が 0.05 となる生起率は $\lambda = -\log(0.05) = 2.9957$ である。それゆえに、あるイベントの生起数がゼロと観測されても、そのイベントの生起数の期待値（生起率）は、3.0 程度となる可能性が十分にあることをいう（Hanley & Lippman-Hand, 1983; Javanovic & Levy, 1997）。観測されなかったからといって、生起の可能性が無いわけでない。図 -14 は、生起率が $\lambda = 0.02, 1, 2, 3, 4$ および 5 である場合のポアソン分布を描いたものである。生起数がゼロとなるビンを着色してある。生起率の増大とともに、生起数がゼロとなるビンの確率は小さくなるが、 $\lambda = 3.0$ 程度では無視できないことが視覚的にもわかる。

4. 経緯度をはじめとする極値統計解析に導入されるべき新しい概念

(1) Rule of Thirds 再び

ポアソン確率における rule of thirds を具体的に視覚化すると、我々の未来は、図 -15a に示されるモザイク模様の 1 片となる。我々の未来は、本来は無数の可能性があるが、ここでは $15 \times 25 = 375$ 片のモザイク模様

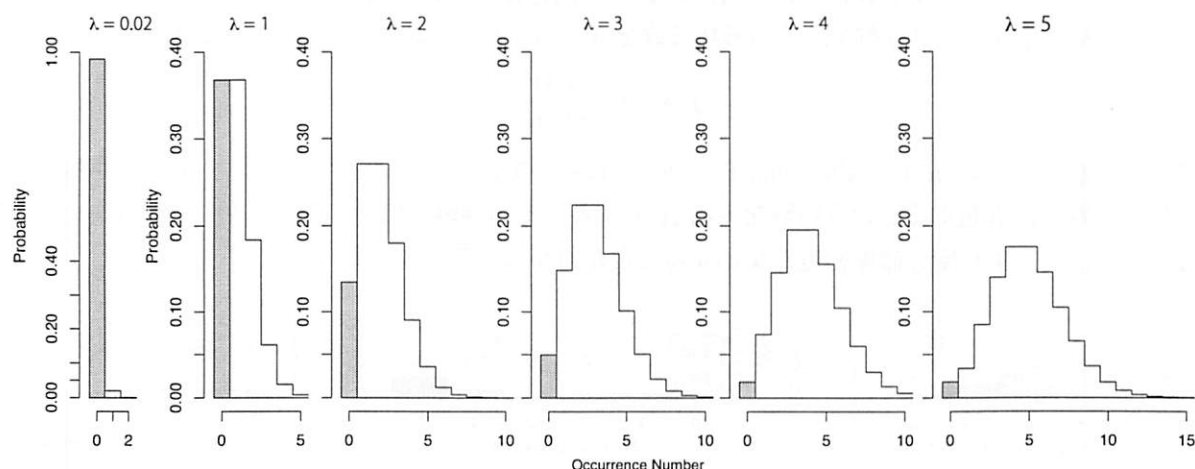


図 -14 生起率がゼロでなくても生起数が観測されない場合もある

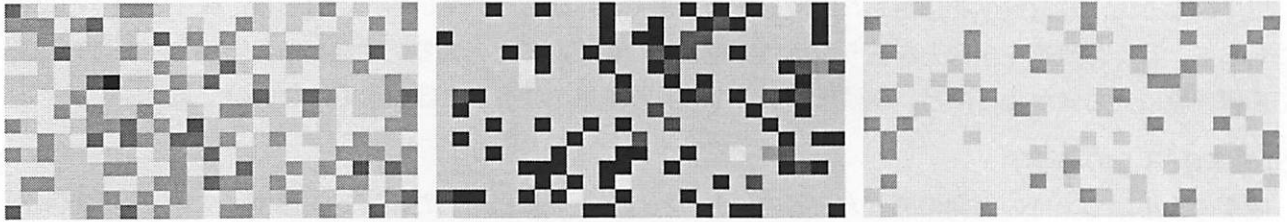


図-15 将来に実現する世界はモザイクの1片（左から, a, b, c と名付ける）

として、その可能性の一部が垣間みれる。想定する確率外力を超過する外力が来襲する数を1片のモザイクの色が表している。淡緑で来襲数がゼロを表し、淡黄で来襲数が1回、淡赤から濃赤にかけて来襲数が2回以上を示している（テキストは白黒印刷となるので、図-16のヒストグラムに着色した濃淡と対応させていただければさいわいである）。平均生起数（生起率）を1としているので、rule of thirds のとおり、図-15aは、青、黄、赤で約1/3ずつの割合で散乱している。それは、図-16aを見ればわかる。これに対して、図-15bのイメージは、図-16bを見るとおり、生起数ゼロに大半の頻度が集中している。ただし、生起率が1であるため、この場合には、生起数が多いところに無視できない頻度が現れている（濃い赤が数多く現れている）。このような未来は非常に不安定である。めったに生起しないが、生起する場合には、数多く重複して生起する（もちろん、rule of thirds は成立しない）。「希少発生・甚大被害なイベント」と表現されるメガリスクとは、まさに、このような場合を指していると思っている人もいるのかもしれない。しかし、これは、我々が極値解析で扱える対象ではないのである。また、図-15cのイメージは、図-16cを見るとおり、期待値である生起数1に大半の頻度が集中している。このような未来は扱い易い。土木技術者が防災施設を建設し、避難対策を講じるための前提には、このような未来のイメージがあるはずだ。もちろん、現実の未来は、図-15aに示すものでしかない。しかし、見る対象を少し変えることで、図-15cのようなイメージを扱うことができるのである。そのためには、経験度を導入する必要がある。

図-15aで扱う未来の一片は、生起率が1となる生起数の実現値の1つである。観測の期間を長くともれば、その期間内に生起する数は増える。その実現値（生起数）を観測期間で除した標本生起率を描けば、図-16cに類似したものとなる。例えば、再現期間の20倍の長さで観測して、その生起数を20で除した標本生起率は、図-17aとなる。これが、図-16cに類似していることは視覚的に納得できるであろう。同様に、再現期間の2倍の長さで観測した場合を図-17bに示す。再現期間の $\tilde{K}$ 倍の長さで観測した場合の生起数 j に対して、ポアソン分布の期待値と分散はともに生起率に等しい（ $E(j) = V(j) = \tilde{K}$ ）。ゆえに、標本生起率 $j/\tilde{K}$ の期待値と分散は次式のようなになるため、観測期間が長ければ長い（ $\tilde{K}$ が大きい）ほど、標本生起率は、母生起率（この場合は1）に集中することがわかる。

$$E(j/\tilde{K}) = E(j)/\tilde{K} = 1, \quad V(j/\tilde{K}) = V(j)/\tilde{K}^2 = 1/\tilde{K} \quad (59)$$

また、次式で表されるガンマ分布を、その形状母数を $K = 0.5, 1, 2, 5, 20$ としたものを図-17に示す。

$$f(\lambda) = \frac{(L\lambda)^K}{\lambda \Gamma(K)} e^{-L\lambda} \quad (60)$$

ここで、再現期間 λ_1^{-1} の K 倍の観測期間 $L = K/\lambda_1$ において、当然のことであるが、再現期間 λ_1^{-1} の確率外力を超える外力に遭遇するという経験を平均 K 回する。その経験の度合いを表す形状母数 K の値が大きければ大きいほど、生起率の確率密度が集中することがわかる（図-18参照）。

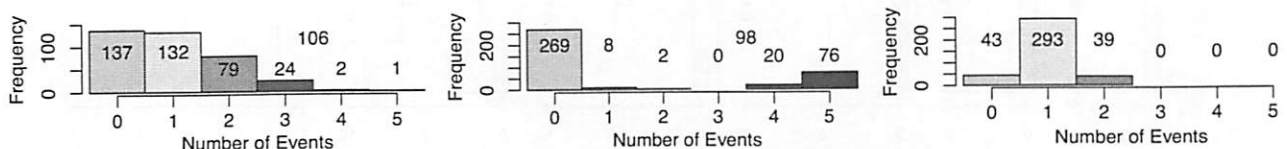


図-16 将来に実現する生起数のヒストグラム表示（図-15に対応して、左から順に, a, b, c となる）

(2) 経験度 (Degree of experience)

北野ら (2008) は、次式で表される量を経験度と名付け、極値統計解析による推定結果を受け入れて良いかの判断を表す指標として導入した (最右辺への変形は、対数の変化量 $\delta \log x = \delta x/x$ であることによる)。

$$K = 1 / V \left\{ \log \lambda(y; \hat{\theta}) \right\} = 1 / \left. \frac{V(\lambda)}{E^2(\lambda)} \right|_{\lambda = \lambda(y; \hat{\theta})} \quad (61)$$

「推定結果を受け入れて良いかの判断」が必要となることに、何か矛盾を感じる人もいるかもしれない。なぜなら、極値統計解析を行うにあたり、当初から得られる結果を受け入れる準備をして臨んでいるはずであるので、そもそも極値統計解析を行うことに対して、自己矛盾ではないか？と思うからである。しかし、そうではないのである。本来、極値統計解析は、もし観測資料が年最大値であるなら、再現期間が1年程度の確率外力 μ_1 (およびその特性を示す定数 σ_1 および ξ) を推定しているに過ぎない。この推定結果については、当然、受け入れる準備がある。あえて、何か判断を待つものではない。しかし、より長い再現期間となる確率外力 μ_n に対しては、「生起率の比例関係」を仮定して、推定結果から外挿することにより推定しているのである。そのような外挿された推定結果については、あらためて「受け入れて良いかの判断」が必要であり、受け入れられない場合には、「判断を保留」しなければならないと考える。なお、式 (13) の比例関係が成立することから、以下に示すとおり、生起率の対数は、生起率を求める期間長に依存しない。そのため、経験度に係る本節およびそれ以降では、 θ および λ に添字の 1 や n をあえて付けないことに注意する。

$$V \left\{ \log \lambda(y; \hat{\theta}_n) \right\} = V \left\{ \log n \lambda(y; \hat{\theta}_1) \right\} = V \left\{ \log \lambda(y; \hat{\theta}_1) + \log n \right\} = V \left\{ \log \lambda(y; \hat{\theta}_1) \right\} \quad (62)$$

式 (60) に表されるガンマ分布の期待値および分散は、

$$E(\lambda) = \frac{K}{L}; \quad V(\lambda) = \frac{K}{L^2} \quad \rightarrow \quad \frac{V(\lambda)}{E^2(\lambda)} = \frac{K/L^2}{(K/L)^2} = \frac{1}{K} \quad (63)$$

であるので、推定される生起率 $\lambda = \lambda(y; \hat{\theta})$ が、式 (60) に表されるガンマ分布に従うとすれば、式 (62) に見るとおり、経験度 K はガンマ分布の形状母数に一致し、図 -17 に示されるとおり、経験度の増大とともに、生起率の推定分布における確率密度が集中する。ベイズ統計学の立場から、推定結果に対する確信の度合い (degree of belief) が集中しているとも言える。また、その度合いが、後に示すように、データの個数として表されており、経験度 (degree of experience) の名称は、正規標本に対する独立なデータの個数を示す自由度 (degree of freedom) にちなむものでもある。

観測データから得られる情報は、一般に、観測情報行列 I として得られる。

$$I = - \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \theta'} \sum_i \log f(y_i; \hat{\theta}), \quad I_E = -E \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \theta'} \sum_i \log f(y_i; \theta) \right\} = V \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} \sum_i \log f(y_i; \theta) \right\} \quad (64)$$

ここで、関数 $\log \lambda(y, \theta)$ は、データ y_i に対する対数尤度である。これに対応する理論的な量として、Fisher 情報量とよばれる期待情報行列 I_E が知られる。なお、情報の逆行列が分散共分散行列 (正確には、推定誤差の漸近分散) となっており ($V(\hat{\theta}) = I^{-1}$)、これを利用して経験度の値を求めることができる。すなわち、

$$\frac{1}{K} = \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta'} \log \lambda(y, \theta) \right\} I^{-1} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} \log \lambda(y, \theta) \right\} \quad (65)$$

で算出される。対数尤度の微係数 (スコア) の分散である情報と、対数生起率の分散の逆数である経験度は、

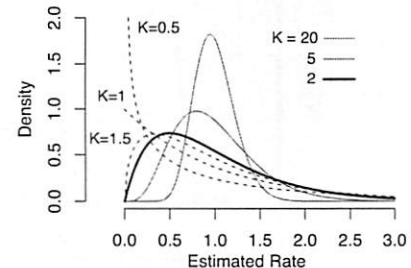
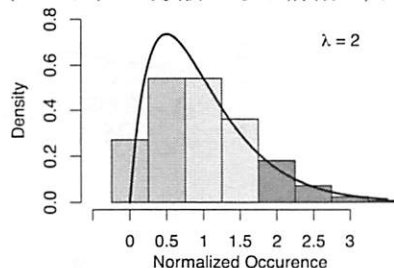
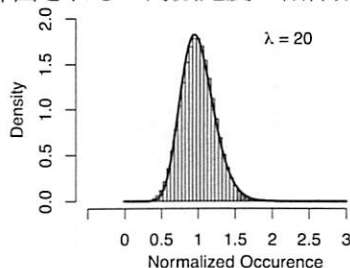


図 -17 生起率のヒストグラム (左から, a, b とする)

図 -18 生起率の密度関数

式 (63) と (61) を対比すればわかるように類似しているが、経験度がスカラー量である点が決定的に異なる。一般に行列量となる情報は、情報の量という「大きさ」の議論をしようという時に、1つの数値でないという点で取扱いに困る（多成分であるという点で、情報には情報の質まで含まれているとも言える）。その一方、極値分布の位置、尺度、形状母数に加え、それらにトレンドの大きさを表す母数加わるような場合でも、経験度は、常にスカラー量である。むしろ、経験度は、情報を内包したものとして、 $\log \lambda(y, \theta)$ の微係数で、情報を規格化およびスカラー化したものと解釈できることもできる。

前節での考え方に沿って言えば、推定対象となる確率外力よりも相対的に小さな規模の外力の観測を用いることにより、実際の観測期間の数倍の長さの期間だけ観測できたと仮想して、その仮想される観測期間に推定対象となる確率外力を超える外力に「遭遇するであろう経験の数」が、経験度 K となっている。言い換えれば、対象とする確率外力を推定するために用いたデータ（例えば、年最大値データ）は、推定対象となる確率外力を超えるデータに換算した有効なデータ数である、と言える。「推定に用いたデータの有効な個数」という考え方は、ロバスト推定を論じた Huber (1970) に既に導入されている（例えば、線形回帰モデル $y = a + bx + \varepsilon$ における説明変数 x の平均 $\bar{x}$ に対する被説明変数の回帰値 $\bar{y}$ の推定には、母数推定に用いた全データ＝標本サイズそのものを有効数として用いているのに対し、極端な外れ値 x_i に対する回帰値 $\hat{y}_i$ の推定には、およそ、その外れ値そのもの y_i しか用いてない。すなわち、実質の個数＝およそ1となる。これにより、外れ値に回帰直線が引っ張られるという現象が説明できるのである）。なお、回帰モデルでは、一般に、「推定に用いた有効な個数」という概念の代わりに、レバレッジ（てこ比）という概念が導入される（有効な個数とは逆数の関係にあることに注意。すなわち、外れ値に対しては、レバレッジが大きい）。

外力の年最大値がガンベル分布に従い（式 (15) にて、 $\xi = 0$ ）、年最大 r 位までの観測データ（ N 年間分）を利用できるという比較的に簡単な状況の場合には、式 (64) の I に式 (63) の I_E を代入することにより、

$$\frac{rN}{K} = 1 + \frac{\{\log \lambda_1 - \psi(r+1)\}^2}{1 + \psi'(r+1)} \quad (66)$$

という簡潔な形式で経験度が得られる。 λ_1 は対象となる外力の生起率（その逆数が再現期間）であり、 ψ および ψ' はディオおよびトリ・ガンマ関数である。図-19 は、式 (66) で得られる K/N を図示したものであり、例えば、年最大 $r = 3$ 位までの $N = 20$ 年間分の記録をもとに、再現期間 $T = 100$ 年の確率外力に対して、経験度は $K = 0.108 \times 20 = 2.2$ となる。また、経験度が最大値をとる確率外力に対して、 $K = rN$ すなわち、経験度は総データ数に一致することがわかる。なお、経験度が最大値をとる確率外力は、データ抽出の閾値の役目をするものであり、これより再現期間の短い外力については、経験度は算出されるものの、検討の対象外と考えればよい（それゆえに、図中では斜線を入れており、境界線上の黒丸で $K/N = r$ ）。

(3) Rule of Two

確率外力を推定するために用いた有効なデータ数を経験度 K の値が示すなら、その限界値を定めておく必要がある。 $K = 2$ を目安に、 $K < 2$ では、推定された結果を保留すべきであると考え、それはなぜか？

幾つかの理由がある。その1つは、「2度あることは3度ある（What happened two times will happens three times.）」という諺による。むしろ、「2度あることは3回ある」と言い表したいのである。度と回は似てい

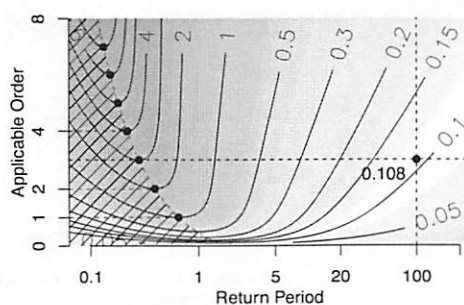


図-19 経験度の値

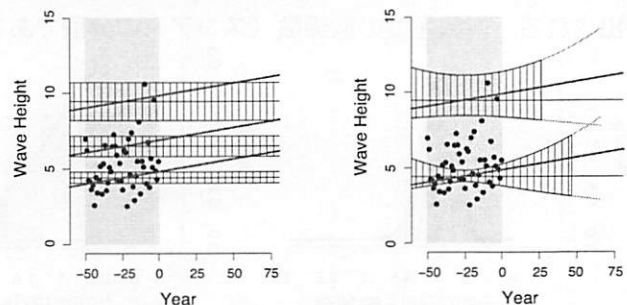


図-20 定常モデルの破綻（左から、a, b とする）

るが、回には「繰り返し」という概念が含まれる点が、度とは異なる。「仏の顔も3回」とは言えないのは、そのような理由がある（飯田・町田，2004）。あえて、「2度あることは3回ある」と言いたいのは、「あるイベントが2度も観測されれば、そのイベントは繰り返すことを前提に推測しよう。2度なければ、繰り返して生じるイベントであるかどうかの判断は保留しよう」という主張である。類似した諺として、Non c'è due senza tre. (Italiano), Non hay dos sin tres. (Español), Jamais deux sans trois. (Français) などがある。また、Bad things happen in three's. というのも、引き続いて起こる3度に先立って2度目に備えよと忠告しているようにもきこえる。もう1つの説明は、「繰り返し」の量を表す周波数(frequency; 式(4)を参照)による。FFT (Cooley & Tukey, 1965) を用いたスペクトル解析では、観測できる高周波数の限界として、

$$f_N = \frac{1}{2\Delta t} \quad (65)$$

で表されるナイキスト周波数を設けている。 Δt は信号のサンプリング間隔であり、上式の右辺には2という数字が含まれている。信号を三角関数の波成分に分解する際に、波を識別するのには、最低限、山点と谷点の2つが必要であることが、周波数解析における限界の理由である。同様に、再現期間に対しては、起点と終点の2つが必要である言えるのではなかろうか。

(4) もう1つの外挿、あるいは、経過時間に伴う誤差の回折効果

観測期間長はトレンドを検出できる程に十分であるとは限らない。したがって、定常性を疑いつつも、定常モデルを使うしかないのが現実的であると考える。図-19aには、再現期間が1, 5, 50年の確率外力を区間推定したものを帯状に未来に延伸させている。もしトレンドがあるなら、それぞれの確率外力のトレンドは帯を突き抜け、定常モデルが破綻する。これでよいのか？という疑問に対して、図-19bには、確率外力の区間推定の帯が時間の経過に伴い拡大し、将来のある時点で、その延伸を打ち切っている。この場合には、トレンドが帯を突き抜けることは（ほとんど）無い（むしろ、突き抜けるような強いトレンドがあるなら、観測時間が短くても、そのようなトレンドは検出できるはずで、その場合にはもはや定常モデルを使う必然性は無い）。以下では、定常モデルを使いながら、推定誤差が経過時間に伴って増大する考え方の要点を記す。

式(61)の経験度に見れる分散 $V(\log \lambda)$ は、次のように分解される量の2次の期待値 $E(\delta \log \lambda)^2$ である。

$$\delta \log \lambda = \log \lambda(y, \theta + \delta \theta) - \log \lambda(y, \theta) = \frac{\partial \lambda}{\partial \mu} \delta \mu + \frac{\partial \lambda}{\partial \sigma} \delta \sigma + \frac{\partial \lambda}{\partial \xi} \delta \xi$$

このような分解は、測量学では、誤差伝播の法則と知られるものである。いま仮に、位置母数 μ を経過時間 t に依存するとして、 $\mu = \mu_0 + \beta t$ と表せば、次式に分解されて、時間に依存する項が誤差伝播に加わる。

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \mu} \delta \mu = \frac{\partial \lambda}{\partial \mu} \delta \mu_0 + t \frac{\partial \lambda}{\partial \mu} \delta \beta$$

この新たに加わる第2項はトレンドの強さ β そのものには依存しない。すなわち、トレンドそのものが無

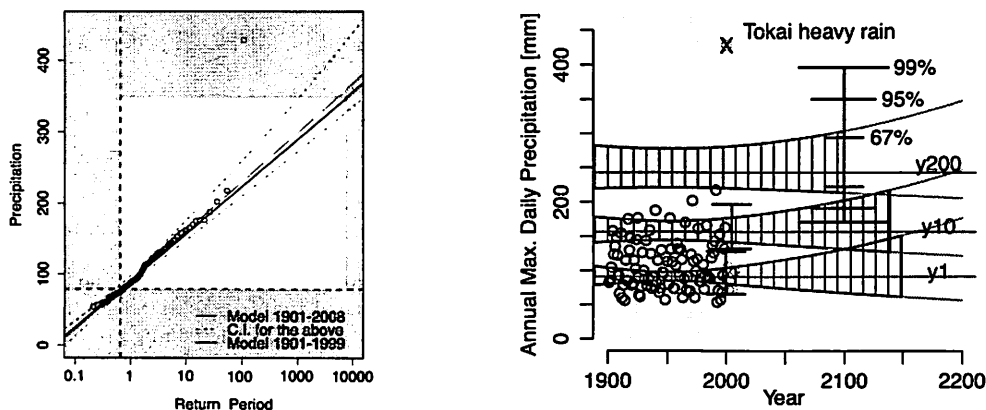


図-21 推定と予測のちがい
(左から、a) 推定される確率外力とその信頼区間、b) 信頼区間の将来期間への延伸と予測区間)

くてもよい ($\beta = 0$) が、トレンドの可能性が無視できない ($\delta\beta \neq 0$) ことが重要である。このような「余地」に伝播していく特性を、エネルギーが密の領域から疎の領域に「漏れる」という回折現象にたとえ、北野ら (2012) は、推定誤差の回折効果と名付けた。また、経過時間に伴って経験度の値が低下することは、定常モデルに対しては耐久性の低下、観測データに対しては鮮度の低下に呼応していると言えるであろう。

(5) 確率外力の信頼区間は、将来に襲う極値がとりうる幅を表すものではないことに注意！

所与の再現期間に対する確率外力は「定数」であり、母数の真値が与えられれば1つの数値に定まる。それを幅で表すのは、母数推定に伴う推定誤差によるものである。それに対して、将来に襲う極値は確率変数であり、たとえ母数の真値が与えられても1つの数値に定まるものではない。母数に推定誤差が含まれていれば、より幅広い範囲に可能性を広げる必要がある。このように考えれば、図-21a に示すような再現期間に対して求められる確率外力の曲線に対して、ずいぶん乖離する既往最大値に対しても、観測期間と同程度の将来区間に襲う最大値の予測区間に含まれるものかどうかを検討できるかもしれない。図-21b では、1999 年までの100年間の観測記録から、将来200年間に起こりうる最大値の予測区間を求め、2000年に襲った東海豪雨と比較している（北野ら、2013bを参照）。

5. Rule of Thumb

来襲外力の頻度特性を把握するために行われる極値統計解析の勘所を幾つか書き連ねた。気象指数などを共変量とするモデル化、多元化および平滑化など、より高度な手法の紹介は今回は割愛する。なお、どんな場合にも明快に当てはめることのできる rule of thumb を期待された読者にとっては、不満足かもしれない。結局のところ、「使用上の注意をよく読み、用法と用量を守って、正しくお使いください」ということに尽きる。当てはまりがよい分布を選ぶのではなく、生起率の比例関係が成立つ分布、すなわち、式(15)の生起率関数をポアソン分布の生起率に置換えて得られる分布（極値分布もその1つ）に限るという用法、また、外挿には限界があるという用量を守っていただければ、この分野の発展にたずさわる私にとって幸甚である。

参考文献

- 飯田朝子・町田 健 (2004): 数え方の辞典, 小学館, 397p.
- 北野利一 (2007): 都市社会工学科/社会工学専攻における極値統計解析の導入教育, 統計数理研究所共同リポート 194, 極値理論の工学への応用 (4), pp.116-127.
- 北野利一 (2010): 伊勢湾台風来襲から50年の節目に, 機関誌 ほだ沖, 名古屋港管理組合建設技術協会, 伊勢湾台風から50年記念号, 第42巻, pp.4-9.
- 北野利一・森瀬喬士・喜岡 渉・高橋倫也 (2008): 確率波高に対する推定の可否を決定づける新たな指標の提案, 海岸工学論文集, Vol.55, pp.141-145.
- 北野利一・高橋倫也・田中茂信 (2012): 水文頻度解析における推定誤差の回折効果 ~ 50年確率は50年間有効であり続けるか?, 土木学会論文集 B1 (水工学), Vol.68, No.4, pp.I_1375-I_1380.
- 北野利一・信岡尚道・喜岡 渉 (2013a): 観測期間長の曖昧な伝説的記録を含む水域外力の極値統計解析, 土木学会論文集 B2 (海岸工学), Vol.69, No.2, (印刷中)
- 北野利一・高橋倫也・田中茂信 (2013b): 降水量の極値の予測区間 ~ 確率降水量の信頼区間を誤解していませんか?, 土木学会論文集 B1 (水工学), Vol.69, No.4, pp.I_271-I_276.
- 合田良実 (1988): 極値統計におけるプロット公式ならびに推定値の信頼区間に関する数値的検討, 港湾技術研究所報告, 第27巻, 第1号, pp.31-92.
- 合田良実 (2008): 耐波工学, 港湾・海岸構造物の耐波設計, 鹿島出版会, 430p.
- 宝 馨・高埴琢馬 (1988): 水文頻度解析における確率分布モデルの評価基準, 土木学会論文集, No.393/II-9, pp.151-160.
- Newton 編集部 (2013): 損得勘定の脳科学 - 直感の“癖”に流されていませんか? Newton, 6月号, pp.88-93.
- Borgman, L. E. (1963): Risk criteria, J. Waterway & Harb. Div., Proc. ASCE, Vol.89, WW3, pp.1-35.
- Coles, S. (2001): An introduction to statistical modeling of extreme values, Springer, 208p.
- Cooley, J. W., and J. W. Tukey (1965): An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series, Math. Comput. Vol. 19, pp.297-301.
- Feller, W. (1968): An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Volume 1, 3rd Edition, 528p. (2nd Ed. に邦訳あり)
- de Haan, L. and A. Ferreira (2006): Extreme Value Theory: An Introduction. Springer, 417p.
- Hanley, J. A., and A. Lippman-Hand (1983): If nothing goes wrong, is everything all right? - Interpreting zero numerators, Jour. Amer. Medical Assoc., Vol. 249(13), pp.1743-5.
- Huber, P. J. (1981): Robust Statistics, Wiley, 308p.
- Jovanovic, B. D. and P. S. Levy (1997): A look at the rule of three. The American Statistician, Vol.51, pp.137-139.
- Petruskas, C. and P. M., Aagaard (1971): Extrapolation of historical storm data for estimating design wave heights, Soc. J. Petroleum Eng. Vol 11, pp. 23-37. (2nd Ann. Offshore Tech. Conf., Houston, 1970)