

水工学シリーズ 12-B-7

DEM による漂砂過程および 耐波設計に関する応用計算

京都大学 大学院 工学研究科

原田 英治

土木学会
水工学委員会・海岸工学委員会

2012 年 8 月

DEM による漂砂過程および耐波設計に関する応用計算

Application of DEM to Sediment Transport and to Design of Coastal Block Structure against Wave Action

原 田 英 治

Eiji HARADA

1. はじめに

粒状体モデルである個別要素法あるいは離散要素法 (Distinct Element Method あるいは Discrete Element Method : DEM) ¹⁾は, 理工学の広い分野で各種の現象に応用されている. 海岸工学の分野では, 漂砂過程や海岸構造物の設計の計算に使用されており, 多くの研究事例が確認できる. 本講では, 次章において DEM の概要を述べた後で, 被覆ブロックを対象としたシミュレーションで頻用されるブロックモデルを 3 章にて概説する. 4 章では, 漂砂過程および耐波設計に対する DEM を使用した近年の国内の研究事例について紹介する. ついで, 5 章では著者らが開発を進めている固液混相流モデルを紹介し, そのモデルの妥当性を検証するとともに幾つかの応用計算例を示す.

2. DEM の概説

DEM では隣接要素との接触力を計算しつつ, 個々の要素の並進および回転の運動方程式を数値積分して, 要素群の挙動が追跡される. DEM のコードでは, 要素間接触判定のスクリーニングに大きな計算を負荷が伴うため, 一般には接触判定が容易な円形要素 (2D 計算) や球形要素 (3D 計算) が基本要素の幾何形状として使用される. 本章では, 球形要素を対象とした 3D の DEM の定式化について概説する. なお, 個別要素法を対象とした書籍はこれまでに多く出版されており, 例えば, 「破壊のシミュレーション - 拡張個別要素法で破壊を追う -」²⁾, 「粉体シミュレーション入門 コンピュータで粉体技術を創造する」³⁾, 「数値流砂水理学 - 粒子法による混相流と粒状体の計算力学 -」⁴⁾, 「粒子法シミュレーション 物理ベース CG 入門」⁵⁾がある. なお, 「粉体シミュレーション入門 コンピュータで粉体技術を創造する」³⁾には, 2次元のプログラム: 2次元2成分系 PEM 充填プログラムが掲載されており参考になる.

2.1 基礎式

並進および回転の運動方程式によって個々の要素運動は記述される. 水流中の要素運動を対象とする場合, 流体力を考慮して

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}_{\text{pint}} + \mathbf{F}_{\text{flow}} + \mathbf{F}_g \quad (1)$$

$$\mathbf{I} \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \mathbf{T}_{\text{pint}} + \mathbf{T}_{\text{flow}} \quad (2)$$

と記述できる. ここに, m : 要素の質量, $\mathbf{v}$: 要素の速度, $\mathbf{F}_{\text{pint}}$: 要素間力, $\mathbf{F}_{\text{flow}}$: 流体力, $\mathbf{F}_g$: 体積力, $\mathbf{I}$: 慣性モーメント, $\boldsymbol{\omega}$: 回転角速度, $\mathbf{T}_{\text{pint}}$: 要素間力によるトルク, $\mathbf{T}_{\text{flow}}$: 流体力によるトルクである. 要素周りの流れ場が十分な解像度で計算される場合, 流体力 $\mathbf{F}_{\text{flow}}$ および流体力によるトルク $\mathbf{T}_{\text{flow}}$ は

$$\mathbf{F}_{\text{flow}} = \iint_s \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} \, ds \quad (3)$$

$$\mathbf{T}_{\text{flow}} = \iint_s \mathbf{r}_s \times (\boldsymbol{\tau} \times \mathbf{n}) \, ds \quad (4)$$

によって計算できる．ここに， $\mathbf{n}$ ：要素表面での外向きの法線ベクトル， $\boldsymbol{\tau}$ ：流体応力， s ：要素表面積， $\mathbf{r}_s$ ：要素中心から要素表面に向かう相対位置を示す．しかしながら，この種の方法で流体力を計算するには，要素径と比較して十分に細かい流体計算格子幅を設定する必要があることから計算負荷は非常に高くなる．そのため要素周りの流れ場は要素スケール程度の解像度で解き，抗力型表示：

$$\mathbf{F}_{\text{flow}} = \frac{1}{2} C_D \rho A_2 d^2 |\mathbf{u} - \mathbf{v}| (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \quad (5)$$

あるいは抗力と慣性力の和（モリソン式）で流体力 $\mathbf{F}_{\text{flow}}$ を評価する場合が多い．ここに， ρ ：流体密度， A_2 ：要素の二次元形状係数， d ：要素径， $\mathbf{u}$ ：要素の周囲流速である．また，流体力 $\mathbf{F}_{\text{flow}}$ に起因したトルク $\mathbf{T}_{\text{flow}}$ については考慮しない場合が多いようである．

2.2 要素間力とモデル定数

2.2.1 要素間力による挙動

要素間力 $\mathbf{F}_{\text{pint}}$ は，要素 i, j の径および位置をそれぞれ d_i, d_j および $\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j$ とすると，要素中心間距離 D が，

$$|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| < D ; \quad D = \frac{d_i + d_j}{2} \quad (6)$$

の条件の時に発現し，要素間の相対接触量に応じて，要素間中心を結ぶ法線方向（ ξ 軸方向）およびそれに垂直な平面（ $\eta \zeta$ 平面）上に配置された力学模型から計算される．グローバル座標系（ O -xyz 系）での相対接触量 $\Delta \mathbf{x}$ は

$$\Delta \mathbf{x} = [\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}]_{ij} \cdot \Delta t = \Delta \mathbf{x}_t + \Delta \mathbf{x}_r \quad (7)$$

であり，ローカル座標系（ O - $\xi\eta\zeta$ 系）では

$$\Delta \xi = \mathbf{M}_t^{-1} \cdot \Delta \mathbf{x}_t + \mathbf{M}_r^{-1} \cdot \Delta \mathbf{x}_r \quad (8)$$

と記述できる．ここに， $\mathbf{r}$ ：要素中心から接触点に向かう大きさが $d/2$ の相対位置ベクトル， $[\]_{ij}$ ：要素 i, j 間の相対速度を示す記号， Δt ：計算時間刻み， $\Delta \mathbf{x}_t$ ：並進変位， $\Delta \mathbf{x}_r$ ：回転変位， $\mathbf{M}_t$ ：並進量に関する変換行列， $\mathbf{M}_r$ ：回転量に関する変換行列である．力学模型は，図 1 に示すようにバネとダッシュポットを並列連結した Voigt モデルを基礎に構成され，要素間力 $\mathbf{F}_{\text{pint}}$ は

$$\mathbf{F}_{\text{pint}}^L = \mathbf{s}^{\text{pre}} + k \Delta \xi + c \dot{\Delta \xi} ; \quad \mathbf{s} = \mathbf{s}^{\text{pre}} + k \Delta \xi ; \quad \mathbf{d} = c \dot{\Delta \xi} \quad (9)$$

と記述される．ここに， $\mathbf{s}$ ：バネによる接触力， $\mathbf{d}$ ：ダッシュポットによる接触力， k ：バネ定数， c ：ダッシュポット定数， pre ：1 ステップ前の値を示す添字， L ：ローカル座標系（ O - $\xi\eta\zeta$ 系）での諸量を示す添字である．ただし，法線方向（ ξ （ $\perp$ ）軸方向）には引張りに抵抗しないジョイントを，接線方向（ $\parallel$ 方向）には要素間摩擦の効果を示すスライダーを配置して(9)式で得た結果を

$$\mathbf{s} \cdot \mathbf{e}_\xi < 0 \quad \text{then} \quad \mathbf{F}_{\text{pint}}^L = \mathbf{0} \quad (10)$$

$$|\mathbf{s} \cdot \mathbf{e}_\parallel| > \mu \mathbf{s} \cdot \mathbf{e}_\xi \quad \text{then} \quad \mathbf{F}_{\text{pint}}^L \cdot \mathbf{e}_\parallel = \mu \cdot \text{Sign}[\mathbf{s} \cdot \mathbf{e}_\xi, \mathbf{s} \cdot \mathbf{e}_\parallel] \quad (11)$$

$$\mathbf{e}_\parallel = \frac{(\mathbf{F}_{\text{pint}}^L \cdot \mathbf{e}_\eta) \mathbf{e}_\eta + (\mathbf{F}_{\text{pint}}^L \cdot \mathbf{e}_\zeta) \mathbf{e}_\zeta}{\sqrt{(\mathbf{F}_{\text{pint}}^L \cdot \mathbf{e}_\eta)^2 + (\mathbf{F}_{\text{pint}}^L \cdot \mathbf{e}_\zeta)^2}} \quad (12)$$

を用いて補正する（図 2 参照）．ここに， μ ：要素間の摩擦係数， $\mathbf{e}_\bullet$ ：*方向の単位ベクトル， $\text{Sign}[A, B] : A$

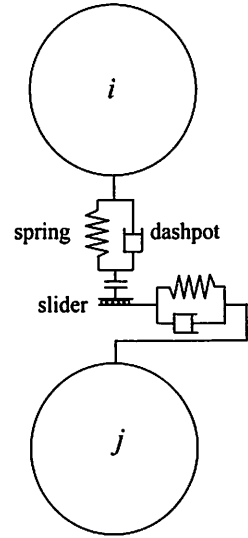


図 1 バネ-ダッシュポット系

の絶対値に B の符号を与える操作を意味する記号である。

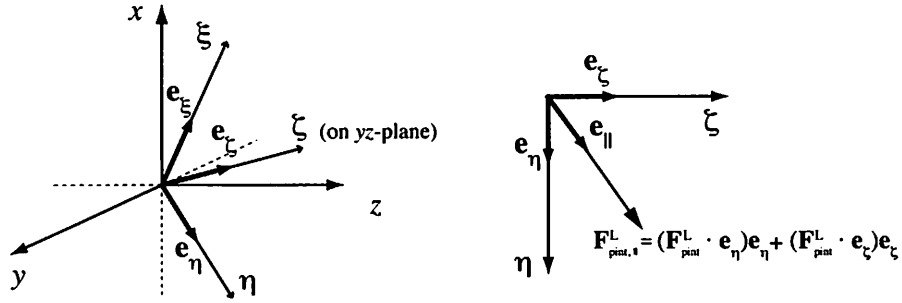


図2 グローバル座標系 (O - xyz 系) とローカル座標系 (O - $\xi\eta\zeta$ 系)

以上よりグローバル座標系 (O - xyz 系) における要素 i に作用する要素間力 $\mathbf{F}_{pint}$ は、

$$\mathbf{F}_{pint} = \sum_j \mathbf{M}_i \mathbf{F}_{pint}^L \quad (13)$$

であり、要素間力によるトルク $\mathbf{T}_{pint}$ は

$$\mathbf{T}_{pint} = \frac{d_i}{2} \sum_j \mathbf{M}_i \mathbf{F}_{pint}^L \quad (14)$$

で与えられる。ただし、(14)式においてねじりモーメントは省略した。

2.2.2 モデル定数の設定

球形要素に対する Hertz の接触理論では、接触要素間の接近量 δ と法線方向 (ξ ($\perp$) 軸方向) の反発力 $s_\perp$ ($= \mathbf{s} \cdot \mathbf{e}_\xi$) の関係は、要素の縦弾性係数 E と Poisson 比 ν を用いて

$$\delta^3 = \frac{9}{4} \frac{r_i + r_j}{r_i r_j} \left(\frac{1 - \nu^2}{E} \right)^2 s_\perp^2 \quad (15)$$

で与えられる (図3 参照)。ここに、 r_i, r_j : 要素 i, j の半径である。よって、接近量 δ と反発力 $s_\perp$ は次式のように

$$s_\perp = k_\perp \cdot \delta^{3/2} \quad (16)$$

$$k_\perp = \frac{2}{3} \frac{E}{1 - \nu^2} \sqrt{\frac{r_i r_j}{r_i + r_j}} \quad (17)$$

非線形関係となる。ここに、 $k_\perp$: 法線方向のスプリング定数である。

なお、

$$s_\perp = k_\perp \cdot \delta \quad (18)$$

$$k_\perp = \frac{s_\perp}{\delta} = \left\{ \frac{4}{9} \frac{r_i r_j}{r_i + r_j} \left(\frac{E}{1 - \nu^2} \right) s_\perp \right\}^{1/3} \quad (19)$$

と変形して、見かけ上の線形関係として扱われる場合もある。

接線方向のスプリング定数 $k_\parallel$ は Poisson 比 ν と関連付けた

$$\frac{k_\parallel}{k_\perp} = \frac{G}{E} = \frac{1}{2(1 + \nu)} \quad (20)$$

から得られる。ここに、 G : 横弾性係数である。

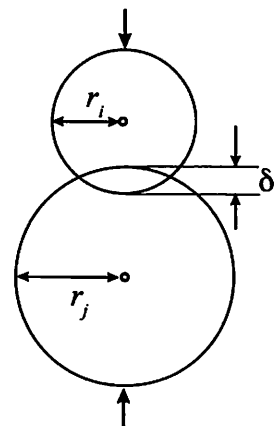


図3 接触要素間の接近量 δ

ダッシュポット定数は、Voigt モデル 1 自由度振動系の臨海減衰条件を用いると、

$$c_{\perp} = 2\sqrt{mk_{\perp}} \quad ; \quad c_{\parallel} = 2\sqrt{mk_{\parallel}} \quad (21)$$

と記述できる。

計算時間ステップ Δt は、バネ-マス系の振動周期 T と関連付けた

$$\Delta t = \frac{T}{\alpha} \quad ; \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_{\perp}}} \quad (22)$$

の条件が目安として使用できる。なお、 α は 10~20 程度のものである。

2.3 座標変換行列

第 2.2.1 項で示した式群中には、変換行列が存在する。DEM ではローカル座標系 ($O-\xi\eta\zeta$ 系) で計算した諸量をグローバル座標系 ($O-xyz$ 系) に変換する手続きが必要であり、本節では変換行列の導出について記述する。なお、この節では要素 i, j の直径は共通の値 d とした。

接触要素 i, j の中心間距離 D :

$$D = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2} \quad (23)$$

およびそれを yz 平面に射影した距離 λ :

$$\lambda = \sqrt{(y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2} \quad (24)$$

(図 4 参照) を使用すると以下の関係式が得られる。

$$\cos\theta = \frac{x_j - x_i}{D} \quad ; \quad \sin\theta = \frac{\lambda}{D} \quad (25)$$

$$\cos\phi = \frac{y_j - y_i}{\lambda} \quad ; \quad \sin\phi = \frac{z_j - z_i}{\lambda} \quad (26)$$

また、 $\lambda=0$ の時、次式が成立する。

$$x_j - x_i \begin{cases} > 0 \\ < 0 \end{cases} \text{ then } \theta = \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases} \quad (27)$$

z 軸周りに θ 回転後、 x 軸周りに ϕ 回転させる座標変換行列 $\mathbf{M}_i(\phi, \theta)$ は、

$$\mathbf{M}_i(\phi, \theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta\cos\phi & \cos\theta\cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & \sin\theta\cos\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \quad (28)$$

であるから (図 5 参照)、グローバル座標系 ($O-xyz$ 系) とローカル座標系 ($O-\xi\eta\zeta$ 系) の間で並進変位の成分は

$$\begin{pmatrix} \Delta\xi_i \\ \Delta\eta_i \\ \Delta\zeta_i \end{pmatrix} = \mathbf{M}_i^{-1}(\phi, \theta) \begin{pmatrix} \Delta x_i \\ \Delta y_i \\ \Delta z_i \end{pmatrix} \quad (29)$$

の関係が成立する。

また、接触点での要素 i の回転速度ベクトルおよび要素 i に作用するトルクについては、グローバル座標系 ($O-xyz$ 系) とローカル座標系 ($O-\xi\eta\zeta$ 系) の間にそれぞれ、

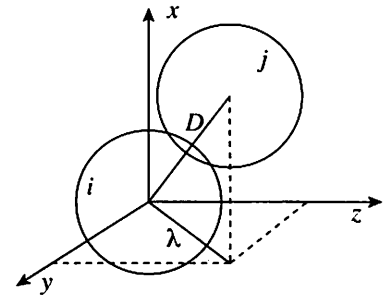


図 4 接触要素間の近接量

$$\begin{pmatrix} v_\xi \\ v_\eta \\ v_\zeta \end{pmatrix} = \frac{d}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_\zeta \\ -\omega_\eta \end{pmatrix} = \frac{d}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin\phi & \cos\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta\cos\phi & -\cos\theta\sin\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \frac{d}{2} \mathbf{M}_r^{-1} \boldsymbol{\omega} \quad (30)$$

$$\begin{pmatrix} T_{\text{pint}, x} \\ T_{\text{pint}, y} \\ T_{\text{pint}, z} \end{pmatrix} = \frac{d}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sin\theta \\ 0 & -\sin\phi & -\cos\theta\cos\phi \\ 0 & \cos\theta & -\cos\theta\sin\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{\text{pint}, \xi} \\ F_{\text{pint}, \eta} \\ F_{\text{pint}, \zeta} \end{pmatrix} = \frac{d}{2} \mathbf{M}_r \mathbf{F}_{\text{pint}}^L \quad (31)$$

の関係が得られる。

以上より，接触要素 i, j 間の計算刻み Δt あたりの相対変位は

$$\begin{pmatrix} \Delta\xi \\ \Delta\eta \\ \Delta\zeta \end{pmatrix} = \mathbf{M}_t^{-1} \begin{pmatrix} \Delta x_t \\ \Delta y_t \\ \Delta z_t \end{pmatrix} + \frac{d}{2} \mathbf{M}_r^{-1} \begin{pmatrix} \Delta\omega_x \\ \Delta\omega_y \\ \Delta\omega_z \end{pmatrix} \Delta t \quad (32)$$

となる．また，グローバル座標系 (O - xyz 系) とローカル座標系 (O - $\xi\eta\zeta$ 系) の間の要素間力は

$$\begin{pmatrix} F_{\text{pint}, \xi} \\ F_{\text{pint}, \eta} \\ F_{\text{pint}, \zeta} \end{pmatrix} = \mathbf{M}_t^{-1} \begin{pmatrix} F_{\text{pint}, x} \\ F_{\text{pint}, y} \\ F_{\text{pint}, z} \end{pmatrix} \quad (33)$$

の関係が成立する。

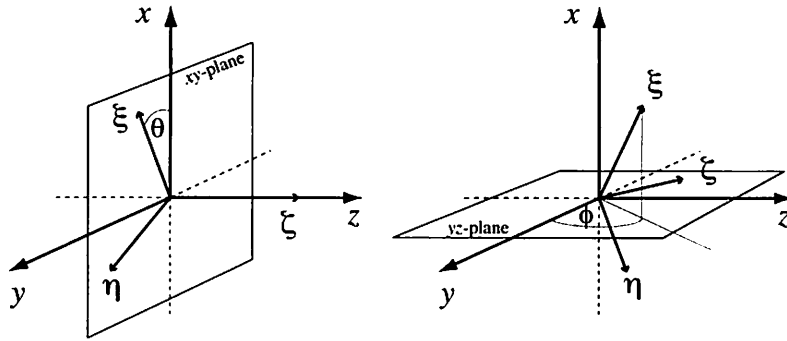


図 5 回転操作

3. 剛体モデル

本章では，被覆ブロックの挙動を追跡する手法の一つとして Koshizuka ら⁶⁾の Passively moving solid model による剛体連結モデルについて述べる．また，クォータニオンを用いた回転表現について言及する．

3.1 Passively moving solid model

特徴のある被覆ブロックの幾何形状は，複数の球形要素の剛体連結によって近似表現できる．DEM に Passively moving solid model を導入した計算では，まず剛体構成要素間に特別な連結が無いものとして，前章で述べた一連の DEM の手続きに沿って，個々の要素の運動の時間発展が計算される．その結果，剛体構成要素間の相対位置が崩れるが，Passively moving solid model を使用して剛体要素重心周りの並進および回転の運動量保存を考慮した座標修正が剛体構成要素に施され，次の計算ステップへと進行する（図 6 参照）．具体的な座標修正の計算手順を以下に示す．

剛体構成要素 i の座標修正前の仮速度 $\mathbf{v}_i$ および位置 $\mathbf{x}_i$ を用いて，座標修正計算に必要な剛体構成要素の重心座標 $\mathbf{x}_g$ と並進速度 $\mathbf{v}_g$ および角速度 $\boldsymbol{\omega}_g$ ：

$$\mathbf{x}_g = \frac{1}{num.} \sum_{i=1}^{num.} \mathbf{x}_i ; \quad \mathbf{v}_g = \frac{1}{num.} \sum_{i=1}^{num.} \mathbf{v}_i \quad (34)$$

$$\boldsymbol{\omega}_g = \mathbf{I}_g^{-1} \sum_{i=1}^{num.} (\mathbf{q}_i \times \mathbf{v}_i) ; \quad \mathbf{q}_i = \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_g \quad (35)$$

を求める．ここに， $\mathbf{I}_g$ ：慣性テンソル， $num.$ ：剛体構成要素数である．以上より時刻 t における剛体構成要素 i の位置ベクトル $\mathbf{x}_i'$ は

$$\mathbf{x}_i' = \mathbf{x}_i^{t-\Delta t} + (\mathbf{v}_g + \boldsymbol{\omega}_g \times \mathbf{q}_i^{t-\Delta t}) \Delta t \quad (36)$$

と修正される．なお，剛体連結モデルは書籍「数値流体力学」⁷⁾ で解説されている．

角速度が大きい場合，数値積分後に剛体構成要素間に歪みが発生する．剛体構成要素間の歪み抑制のための手段として，回転移動に対して次節で述べるクォータニオンの使用が考えられる．

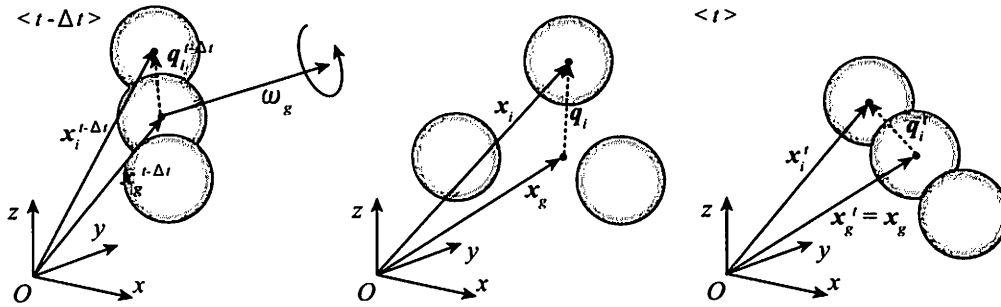


図 6 修正計算プロセス

3.2 クォータニオンと回転表現

3.2.1 クォータニオンについて

クォータニオンは次式：

$$\boldsymbol{\Theta} = s + iu + jv + kw = (s, u, v, w) = (s, \mathbf{u}) \quad (37)$$

で示される 4 成分から構成される数である．ここに， s, u, v, w は実数であり， i, j, k は以下の規則に従う．

$$\begin{aligned} ii = jj = kk &= -1 \\ ij = k, \quad jk = i, \quad ki = j \\ ji = -k, \quad kj = -i, \quad ik = -j \end{aligned} \quad (38)$$

また，クォータニオン $\boldsymbol{\Theta}$ の共役クォータニオン $\boldsymbol{\Theta}^*$ は次式：

$$\boldsymbol{\Theta}^* = s - iu - jv - kw = (s, -u, -v, -w) = (s, -\mathbf{u}) \quad (39)$$

で定義され，それらの積は

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{\Theta}^* &= (s + iu + jv + kw)(s - iu - jv - kw) \\ &= s^2 - isu - jsv - ksw + u^2 + isu + juw - kuv + v^2 - ivw + jsv + kuv + w^2 + ivw - juw + ksw \\ &= s^2 + u^2 + v^2 + w^2 \end{aligned} \quad (40)$$

と書ける．

3.2.2 クォータニオンの積による回転移動

剛体構成要素の重心座標 $\mathbf{x}_g$ を原点とする回転軸 $\boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{\omega}_g / |\boldsymbol{\omega}_g|$ (単位ベクトル) 周りに回転角 $\theta = |\boldsymbol{\omega}_g| \Delta t$ の回転操作を表すクォータニオン $\mathbf{Q}$ は

$$\mathbf{Q} = (q_0, \mathbf{q}) = (q_0, q_x, q_y, q_z) = \left(\cos \frac{\theta}{2}, \Psi_x \sin \frac{\theta}{2}, \Psi_y \sin \frac{\theta}{2}, \Psi_z \sin \frac{\theta}{2} \right) \quad (41)$$

であり、その共役クォータニオン $\mathbf{Q}^*$ は

$$\mathbf{Q}^* = (q_0, -\mathbf{q}) = (q_0, -q_x, -q_y, -q_z) = \left(\cos \frac{\theta}{2}, -\Psi_x \sin \frac{\theta}{2}, -\Psi_y \sin \frac{\theta}{2}, -\Psi_z \sin \frac{\theta}{2} \right) \quad (42)$$

と表現される。次ステップ (時刻 t) の相対位置ベクトル $\mathbf{q}_i'$ のクォータニオン $\mathbf{Q}_i'$:

$$\mathbf{Q}_i' = (0, \mathbf{q}_i') \quad (43)$$

は、1 ステップ前 (時刻 $t - \Delta t$) の相対位置ベクトル $\mathbf{q}_i'^{-\Delta t}$ のクォータニオン $\mathbf{Q}_i'^{-\Delta t}$:

$$\mathbf{Q}_i'^{-\Delta t} = (0, \mathbf{q}_i'^{-\Delta t}) \quad (44)$$

を用いて、

$$\mathbf{Q}_i' = \mathbf{Q} \mathbf{Q}_i'^{-\Delta t} \mathbf{Q}^* = \mathbf{Q} (0, \mathbf{q}_i'^{-\Delta t}) \mathbf{Q}^* \quad (45)$$

と記述できる。以上から、剛体構成要素 i の時刻 t における位置ベクトル $\mathbf{x}_i'$ は

$$\mathbf{x}_i' = \mathbf{x}_g + \mathbf{q}_i' \quad (46)$$

となる。なお、回転行列 $\mathbf{R}$:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 - 2q_y^2 - 2q_z^2 & 2q_xq_y - 2q_0q_z & 2q_xq_z + 2q_0q_y \\ 2q_xq_y + 2q_0q_z & 1 - 2q_x^2 - 2q_z^2 & 2q_yq_z - 2q_0q_x \\ 2q_xq_z - 2q_0q_y & 2q_yq_z + 2q_0q_x & 1 - 2q_x^2 - 2q_y^2 \end{bmatrix} \quad (47)$$

を用いて、

$$\mathbf{x}_i' = \mathbf{x}_g + \mathbf{R} (\mathbf{q}_i'^{-\Delta t})^T \quad (48)$$

と計算することも可能である。なお、(35)式で角速度を求める際に必要な慣性テンソルについては

$$\mathbf{I}_g^{t+\Delta t} = \mathbf{R} \mathbf{I}_{g0} \mathbf{R}^T \quad (49)$$

を用いて計算すると効率的である。ここに、 $\mathbf{I}_{g0}$: 初期状態での慣性テンソルである。なお、クォータニオンと回転行列については「粒子法シミュレーション 物理ベース CG 入門」⁵⁾に説明が詳しい。

4. 漂砂過程および耐波設計への適用例

本章では、DEM を用いた既往の研究について概観する。なお、ここでは 2008 年から 2009 年の海岸工学論文集と 2010 年から 2011 年の土木学会論文集 B2 (海岸工学) に掲載されている最近 5 年の研究をレビューした。2007 年以前の研究レビューについては他の書籍、例えば、数値波動水槽⁸⁾を参照されたい。本章では、漂砂過程や耐波設計に関連した研究に焦点を当てて紹介する。なお、ここで紹介する以外にも上記の海岸工学論文集と土木学会論文集 B2 (海岸工学) の中には DEM の手法を応用した研究が複数存在する。

4.1 DEMを用いた漂砂過程に関する研究例

砂粒子スケールからの漂砂機構の検討には、個々の砂粒子運動追跡が可能なDEMの選択は合理的である。西嶋ら⁹⁾は、振動流下における粒径比の大きな混合砂礫床の輸送過程の実験結果から、既往の混合砂の漂砂量算定式(Dibajnia・Watanabe¹⁰⁾；佐藤ら¹¹⁾)では、砂礫混合率が40～60%を境に上手く再現できないことを示している。また、この理由を3D-DEMによる数値移動床を用いて、礫粒子のネットワーク径の観点から考察している。

原田ら^{12),13)}は、砂粒子運動の計算にDEMを適用したEuler-Lagrangeカップリングによる固液混相流のLESより、混合粒径シートフロー漂砂の鉛直分級過程を検討している。狭小領域を対象としたシミュレーションであるが、粒子径よりも細かい計算格子を使用して粒子周りの流れ場を計算し、実験では計測し難いシートフロー層の内部構造を検討している。計算領域の大規模化を図り、組織乱流構造と粒子運動の相互作用を考慮したシミュレーションの実施が今後の課題であろう。なお、同種のモデルを用いて鶴田ら¹⁴⁾は、粒子群の水中沈降過程を対象とした数値シミュレーションを実施し、モデルの再現性を実験との比較から示すとともに、沈降中の乱流構造について検討している。

4.2 DEMを用いた耐波設計に関する研究例

後藤ら¹⁵⁾は、時化の際のマウンド表面の被覆ブロックの移動・剥離過程を予測するため、DEM-MPSハイブリッドモデルを開発している。ここでは、個々の被覆ブロック挙動は複数個の固相粒子を剛体連結モデル⁶⁾を用いて表現している。また、被覆ブロック構成粒子の挙動はDEMより追跡している。なお、被覆ブロック構成粒子に作用する流体力は、被覆ブロック構成粒子周りの圧力の積分から計算している。

マウンド表面に配置された被覆ブロックの移動を抑制するための対策として、隣接するブロック同士をワイヤーで連結する方法がある。後藤ら¹⁶⁾は、剛体連結モデル⁶⁾を用いて被覆ブロックを追跡するが、隣接ブロック間にはワイヤー連結を模擬したジョイントを配置して、ワイヤー連結による被覆ブロックの移動抑制効果を検討している。なお、BoussinesqモデルとCMPS法のカップリングより波浪場を計算し、得られた流速場に基づいてブロックに作用する流体力を算定している。ブロック挙動のシミュレーション結果が現地観測を良好に再現することから、この種のワイヤーモデルの耐波設計に対する利用の可能性を示唆している。

衝撃砕波圧が構造物に作用する場合は、空気の巻き込みを考慮した衝撃力の評価が重要である。有川ら¹⁷⁾は、気液二相モデルへ拡張したCADMAS-SURFを基礎とした二相流体計算手法とDEMを連成した固気液3相計算システムの開発を実施し、単相モデルと比較して精度良く衝撃砕波圧の計算ができることを確認している。また、“ボンド”と表現した要素間バネを用いて、多数要素間を拘束した壁面を作成し、段波による壁面破壊変形計算を実施している。

4.3 DEMを用いたその他の研究例

4.3.1 津波によるコンテナの挙動

熊谷ら¹⁸⁾は、港湾規模の領域における数時間程度のコンテナの漂流および沈降過程の数値シミュレーションを実施している。海域から遡上域までの津波計算は、水深方向に積分した非線形長波方程式により推定し、コンテナ挙動は、拡張個別要素法²⁾を用いて計算している。コンテナへの外力は、モリソン式による流体力、底面摩擦力および構造物とコンテナとの接触による衝突力から構成している。なお、シミュレーションより、水没によるコンテナ重量の変化が漂流軌跡に大きく影響することを示している。

後藤ら¹⁹⁾は、津波によるコンテナ挙動および壁面への衝突力を詳細に検討するため、3D-MPSによる流体解析と3D-DEMおよび剛体連結モデル⁶⁾によるコンテナ挙動追跡を融合した数値シミュレーションを実施している。なお、3D-MPSによって計算領域全域を計算すると計算負荷が高くなるため、海域は2D-MPSで計

算し、その結果をエブロン端部の 3D-MPS による計算の流入境界の速度条件として与える計算負荷軽減のための工夫をしている。

さらに、後藤ら²⁰⁾は、数値シミュレーションによって陸上に配置されたコンテナ群が遡上津波によって海域へ落下し、沿岸域（数 km×数 km 規模）を漂流し沈没するまでを追跡している。津波は、水深積分型の非線形長波理論式から計算し、コンテナ挙動は 3D-DEM を基礎に計算している。コンテナは複数の要素の集合体として表現し、コンテナへの作用力はモリソン式による流体力、バネ-ダッシュポット系より推定される接触力、浮力や摩擦力等で記述している。なお、漂流コンテナへの浸水をモデル化するため、コンテナ重量が漂流経過時間に応じて増加するモデルとなっている。空コンテナが浸水して水没するまでの漂流限界時間を変えた幾つかのシミュレーションから、コンテナの水没範囲の違いを明瞭に示している。

4.3.2 山体崩壊津波の発生過程

後藤ら²¹⁾は、山体崩壊土砂を模擬した粒子群の水面への突入による津波の発生過程の数値シミュレーションを実施している。ここでは、高精度粒子法的一种である CMPS-HS 法によって流体運動を計算し、崩壊土砂挙動には DEM を適用した固液二相流モデルを開発している。なお、固液相間相互作用力は流体抗力を用いて考慮している。シミュレーション結果は実験結果を良好に再現しているが、津波発生の再現性を高めるには空気層の扱いが重要になると指摘している。

5. Euler-Lagrange カップリングによる固液混相流モデル

本章では、著者らが開発を進めている Euler-Lagrange カップリングによる固液混相流モデルについて述べる。また、このモデルを用いた漂砂過程の数値シミュレーション例や耐波設計への適用に向けた試験計算例を示す。

5.1 数値モデルの概要

5.1.1 流体の基礎式

基礎式には密度の重みを考慮して平均した密度加重平均に基づいた非圧縮性流体の連続式と運動方程式：

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (50)$$

$$\frac{\partial \bar{\rho} \tilde{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial \tilde{\sigma}_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}^{\text{SGS}}}{\partial x_j} + (\bar{\rho} - \rho_w)g\delta_{i2} + F_i \quad (51)$$

である。ここに、 t ：時間、 x_i ：カーテシアン座標系（ $i=1, 2, 3$ ）、 u ：流速、 p ：圧力、 ρ ：流体密度、 ρ_w ：水の密度、 σ ：粘性応力、 τ^{SGS} ：サブグリッドスケール応力、 g ：重力加速度、 δ ：クロネッカーのデルタ、 F ：固液間相互作用力である。なお、密度加重平均量は“ $\sim$ ”を付けて、

$$\bar{\rho} \tilde{f}(x_i, t) = \int_D \rho f(x', t) G(x_i - x') dx' \quad (52)$$

と定義する。ここに、 f ：変数、 D ：計算領域、 G ：フィルター関数である。また、密度は

$$\bar{\rho} = \rho(1 - \phi) + \rho_p \phi \quad (53)$$

で与える。ここに、 ϕ ：各計算セル中の固相要素の占有率、 ρ_p ：物体の密度である。

5.1.2 固相要素の運動

個々の固相要素の並進および回転運動は、

$$\frac{d(m_p u_{pi})}{dt} = \int_V \left(\bar{\rho} \frac{D \tilde{u}_i}{Dt} - F_i \right) dV + F_{p \text{ int } i} \quad (54)$$

$$\frac{d(I_{pik}\omega_{pk})}{dt} = \int_V \varepsilon_{ijk} r_j \left(\bar{\rho} \frac{D\tilde{u}_k}{Dt} - F_k \right) dV + T_{p \text{ int } i} \quad (55)$$

である．ここに， m_p ：要素の質量， u_p ：移動速度， ω_p ：角速度， I_p ：慣性モーメント， V ：要素体積， ε ：エディントンのイプシロン， r ：要素重心に対する要素表面の位置ベクトル， $F_{p \text{ int } i}$ ：要素間相互作用力， $T_{p \text{ int } i}$ ：要素間相互作用力によるトルクである．要素間相互作用力は第 2 章で述べた DEM におけるバネ-ダッシュポット系から計算される．

5.1.3 SGS モデル

流体の基礎式を閉じるために，サブグリッドスケール応力 τ^{SGS} に Smagorinsky モデル²²⁾を使用する．

$$\tau_{ij}^{\text{SGS}} - \frac{1}{3} \tau_{kk}^{\text{SGS}} \delta_{ij} = -2\mu^{\text{SGS}} \tilde{S}_{ij} \quad (56)$$

$$\mu^{\text{SGS}} = \bar{\rho} (C_s \Delta F_w)^2 |\tilde{S}| ; |\tilde{S}| = \sqrt{2\tilde{S}_{ij}\tilde{S}_{ij}} \quad (57)$$

$$F_w = 1 - \exp(-y^+ / 25) ; y^+ = \frac{\bar{\rho} u_* y}{\mu} ; \tau_w = \bar{\rho} u_*^2 \quad (58)$$

ここに， S ：歪み速度テンソル， C_s ：Smagorinsky 定数 ($C_s=0.1$)， Δ ：計算格子幅， τ_w ：壁面摩擦， y ：壁面からの距離， F_w ：ダンピング関数である．

5.1.4 数値解法

流れ場の時間発展は，連続式：式(50)および運動方程式：式(51)をスタッガード格子上で有限差分法を用いて離散化し，時間積分に対して Adams-Bashforth 法を用いたフラクショナルステップ法に基づいて求解する．この段階で得られた仮の流れ場（時刻 $n+1^*$ ）の情報を用いて，固相要素に作用する要素間力以外の外力は，要素を含む計算格子に対して

$$F_{ex \ i} = \varphi \Delta^3 \left(-\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial \tilde{\sigma}_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}^{\text{SGS}}}{\partial x_j} + (\bar{\rho} - \rho_w) g \delta_{i2} \right)^{n+1^*} \quad (59)$$

と計算される．よって，個々の要素の並進と回転の運動は，

$$\frac{d(m_p u_{pi})}{dt} = \sum F_{ex \ i} + F_{p \text{ int } i} \quad (60)$$

$$\frac{d(I_{pik}\omega_{pk})}{dt} = \sum \varepsilon_{ijk} r_j F_{ex \ k} + T_{p \text{ int } i} \quad (61)$$

と記述でき，これらを数値積分することによって時刻 $n+1$ の要素の速度や位置情報が得られる．この要素運動に伴って，各計算格子における要素占有率に変化が生じるが，流体密度は式(53)を用いて修正し，流体速度は，

$$\tilde{u}_i^{n+1} = \tilde{u}_i^{n+1^*} (1 - \varphi) + (u_{pi} + \varepsilon_{ijk} \omega_{pj} r_k) \varphi \quad (62)$$

によって修正する．また，要素運動に伴う固液間相互作用力は，各計算格子の運動量収支を考慮して

$$F_i^{n+1} = \frac{\bar{\rho}^{n+1} \tilde{u}_i^{n+1} - \bar{\rho}^n \tilde{u}_i^n}{\Delta t} + \frac{\bar{\rho}^{n+1} \tilde{u}_i^{n+1} \tilde{u}_j^{n+1} - \bar{\rho}^n \tilde{u}_i^n \tilde{u}_j^n}{\Delta x_j} \quad (63)$$

等を用いて与える（図 7 参照）．

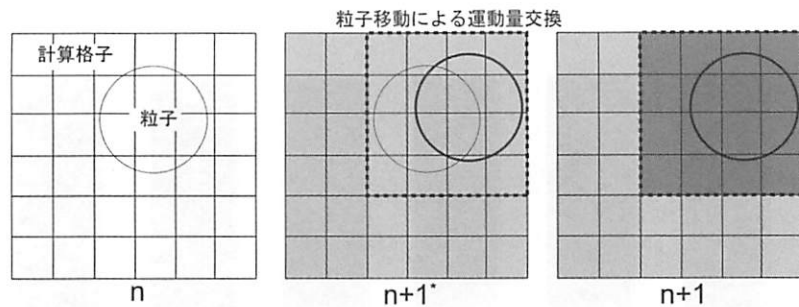


図7 固液間相互作用力の影響範囲

5.2 数値モデルの再現性の確認

5.2.1 抗力係数およびストローハル数

一様流中に固定された球形要素周り流れから、抗力係数を算定し既往の実験結果と比較したのが図8である。数値シミュレーション結果は、実験結果を概ね良好に再現している。また、一様流中に固定した円柱周りの流れのストローハル数を図9に示す。数値シミュレーション結果には、粒子レイノルズ数が増加するにしたがってストローハル数が増加する傾向が実験と同様に確認される。

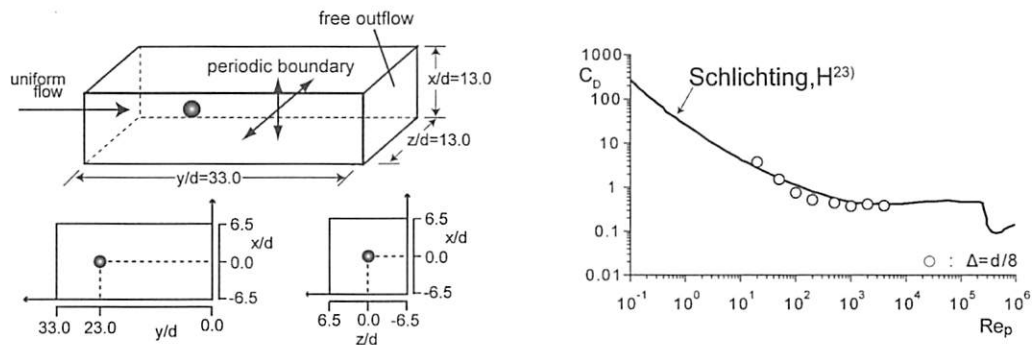


図8 抗力係数と粒子レイノルズ数

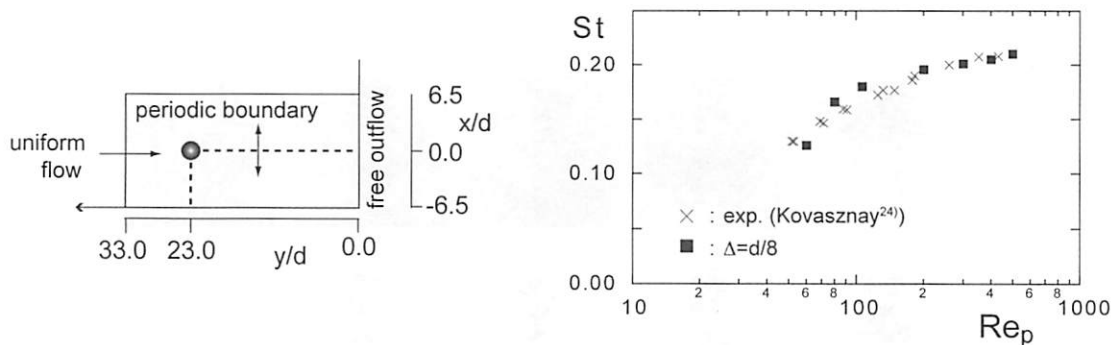


図9 ストローハル数と粒子レイノルズ数

5.2.2 単一ブロックおよび多数粒子群の水中沈降過程

単一ブロックの水中沈降過程のシミュレーション²⁵⁾を紹介する。直径 $d=2.0\text{cm}$ 、比重 $\sigma=2.23$ のガラス球3個を、それぞれの球の重心を結ぶ線分が直線になるように接着して形成した単一ブロックの水中沈降過程を対象に、室内実験および数値シミュレーションを実施した結果を示す。図10に実験で撮影された沈降過程の瞬間画像とそれと同時刻の数値シミュレーション結果を重ねて示す。数値シミュレーション結果は実験と比較してブロック姿勢に僅かな違いは確認されるが、良好な一致が見て取れる。なお、計算格子幅は $\Delta=d/8$ の条件である。

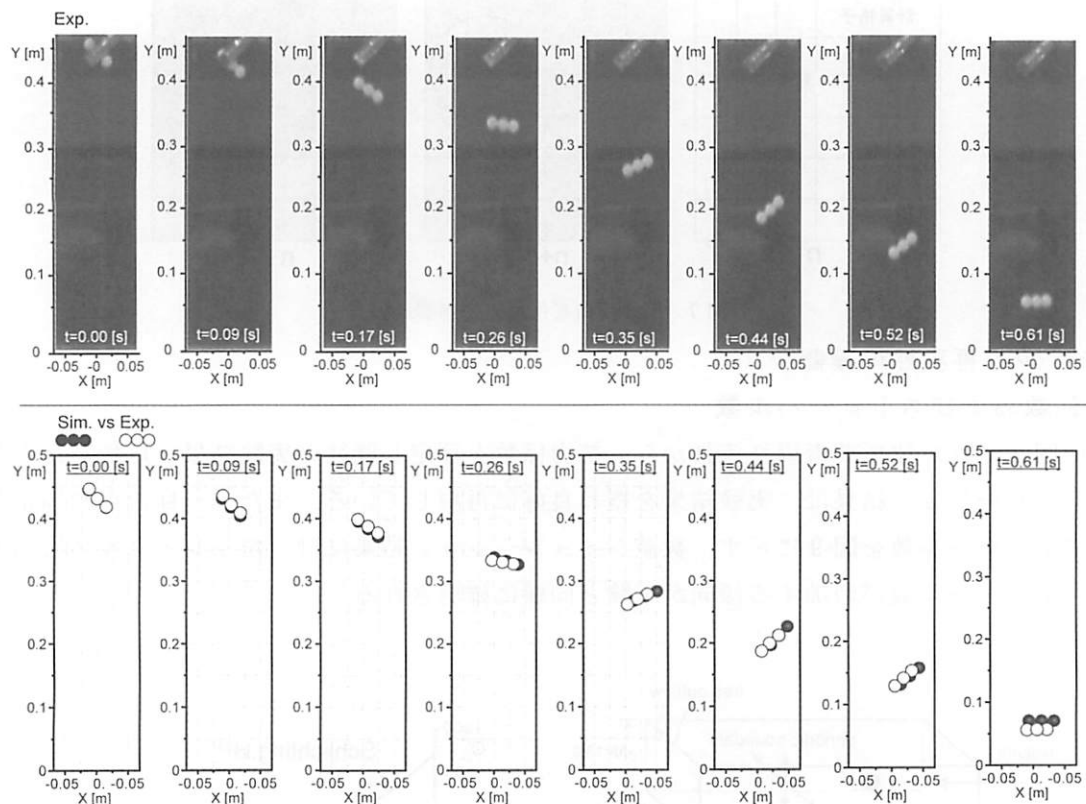


図 10 単一ブロックの水中沈降過程の比較（上：実験；下：実験と数値シミュレーション）

多数粒子群の水中沈降過程のシミュレーション¹⁴⁾を紹介する．水槽水面付近に設置したホッパー開口部から，直径 $d=1.0\text{cm}$ ，比重 $\sigma=1.318$ の球形粒子 1,000 個を連続投入した粒子群沈降挙動の瞬間画像の下に，計算格子幅 $\Delta=d_1/4$ の条件で実施した数値シミュレーション結果を並示する（図 11 参照）．初期に投入された粒子群のフロント部の拡散過程や全粒子群の沈降完了時間の観点から，概ね実験を再現することが分かる．

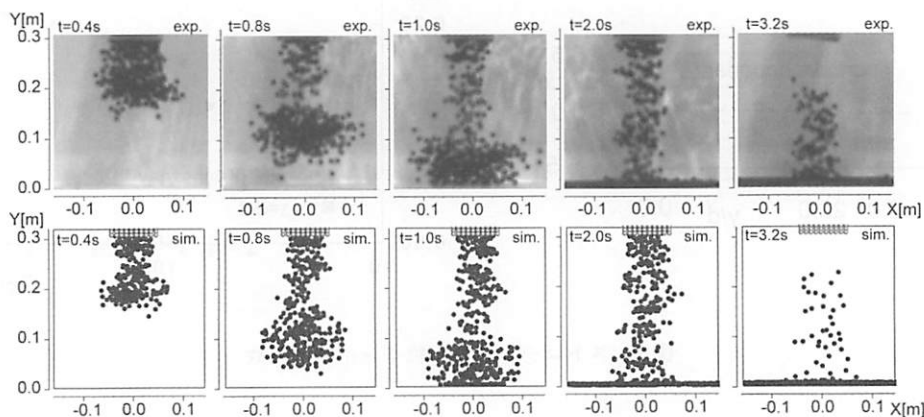


図 11 粒子群の沈降過程の比較（上：実験；下：数値シミュレーション）

5.2.3 混合粒径シートフロー漂砂の鉛直分級過程¹³⁾

比重 $\sigma=1.318$ ，粒径 $d_1=0.515\text{cm}$ （小粒子 770 個）， $d_2=0.988\text{cm}$ （中粒子 103 個）， $d_3=1.56\text{cm}$ （大粒子 27 個）の総計 900 個の球形粒子を十分に混合して形成した 3 粒径混合の数値移動床に，振動周期 $T=5.0\text{s}$ ，計算領域上面での最大流速振幅 $U_{\max}=85.0\text{cm}$ （平均粒径 $d_m=1.02\text{cm}$ に対する Shields 数 $\Psi=0.27$ ）の正弦波型の振動流

を作用させる．鉛直分級過程のシミュレーション結果（シミュレーションでの計算格子幅は $\Delta=d_1/4$ の条件）を図 12 に示すが，鉛直分級の発達状況は実験結果を良好に再現することが確認される．また，図 13 に示す初期から半周期間の分級の発達過程での粒径別濃度重心時系列では，位相 $\phi=(2/8)\pi \sim (5/8)\pi$ において小粒子の濃度重心の急減（小粒子の潜り込み）が確認され，鉛直分級が急速に発達している状況が理解される．また，その後の位相では小粒子の濃度重心は横這い状態を呈しており，際立った鉛直分級の進行は確認されない．この時系列から読み取れる鉛直分級過程の発達状況は，図 14 に示す $z=2.3\text{cm}$ の xy 平面（計算領域中央部付近の xy 平面）における乱れエネルギーの生成分布からも考察される．すなわち，位相 $\phi=(2/8)\pi \sim (5/8)\pi$ の移動床表層に発現する顕著な乱れエネルギーの生成分布は，活発な固液相間の運動量交換をもたらす鉛直分級を促進させるが，その後の減速位相では，乱れエネルギーの生成分布が次第に移動床の表層から清水流領域へ向かって離脱するため，移動床表層の粒子運動の不活性化に繋がると考えられる．なお，図中の濃い着色領域は，乱れエネルギーの高い生成率を示している．ここでは結果を示していないが，DEM を用いると粒子間の相互作用力を考慮した砂粒子運動が追跡されるので，粒子流動層中での粒子間接触力の数値情報も得られる．現在，粒子間衝突応力とシア率との関係等，粒子流のレオロジーについて数値流砂・漂砂力学的な観点から検討を進めている．

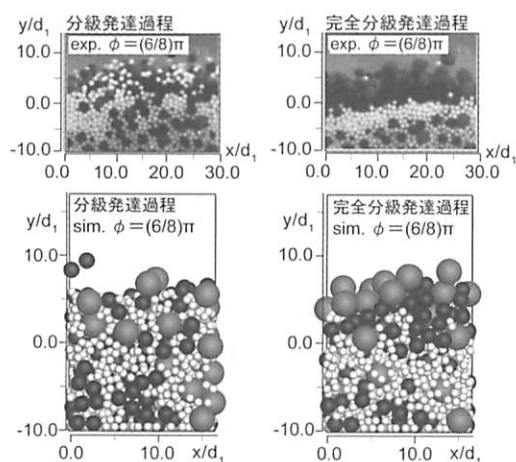


図 12 鉛直分級過程の発達過程

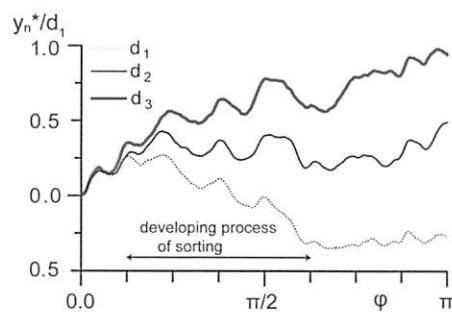


図 13 粒径別濃度重心の時系列

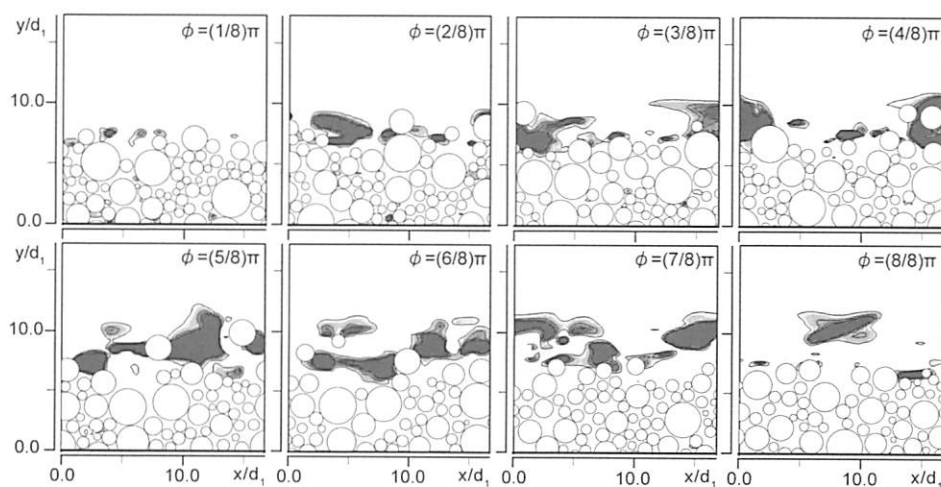


図 14 位相別乱れエネルギーの生成分布

6. おわりに

本講では、DEM および剛体モデルを概説するとともに、DEM を使用した耐波設計への適用例や漂砂過程の適用例を紹介した。DEM の内容はシンプルであり、DEM の数値コードは比較的容易に作成できる。また、多体衝突を含む現象の追跡に役立つ。一方で、モデル定数の与え方によっては、衝突要素の固定境界の透過や要素間衝突による過度の反発挙動といった非現実的なシミュレーション結果となる場合や、計算は安定するが期待通りの結果が得られないといったように扱い難い一面もある。固相のモデルである DEM だけに注目するなら、対象とする現象のエネルギー散逸はバネ-ダッシュポット系で制御される。そのため、モデル定数の設定とその適用範囲の検討は DEM 数値シミュレーションを実施する際に最も重要である。

近年の並列計算技術の発達は、100 万オーダーの要素数の大規模 DEM 計算を可能にしている。また、既存の数値計算手法の改良や新しい数値計算手法の展開によって、砕波を含む激流シミュレーションが可能な数値波動水槽も整備されつつある。今後、これらの技術や手法は高度な耐波設計や砕波帯での漂砂機構の理解に大きく貢献するものと予想される。

本講の第 5 章で紹介した計算例は、近年著者が所属する研究室で実施したものである。研究途上では京都大学教授・後藤仁志 先生から多くの示唆的な御助言を頂戴した。ここに記して深甚なる謝意を表したい。また、日本学術振興会特別研究員・鶴田修己 君からは、シミュレーション実施に多大な協力を得た。最後に、水工学に関する夏期研修会講義集の原稿執筆の機会をお与え頂くとともに編集に際して大変お世話になった北海道大学准教授・渡部靖憲 先生にお礼申し上げたい。

参考文献

- 1) Cundall, P. A. and Strack, O.D.L. (1979) : A discrete numerical model for granular assemblies, *Géotechnique*, Vol.29, pp.47-65.
- 2) 伯野元彦 著 (1997) : 破壊のシミュレーション-拡張個別要素法で破壊を追う-, 森北出版.
- 3) 粉体工学会 編 (1998) : 粉体シミュレーション入門 コンピュータで粉体技術を創造する, 産業図書.
- 4) 後藤仁志 著 (2004) : 数値流砂水理学 -粒子法による混相流と粒状体の計算力学-, 森北出版.
- 5) 越塚誠一 編著 (2008) : 粒子法シミュレーション 物理ベースCG入門, 培風館.
- 6) Koshizuka, S., Nobe, A. and Oka, Y. (1998): Numerical analysis of breaking waves using the moving particle semi-implicit method, *Int. J. Numer. Mech. Fluids*, Vol.26, pp. 751-769.
- 7) 越塚誠一 著 (1997) : インテリジェント・エンジニアリング・シリーズ 数値流体力学, 培風館.
- 8) 数値波動水槽研究小委員会編 (2012) : 数値波動水槽 -砕波帯の計算力学と海岸構造物の耐波設計の革新を目指して-, 土木学会.
- 9) 西嶋宏介・高川智博・佐藤慎司 (2009) : 礫のネットワークに着目した振動流下における砂礫混合土砂輸送課程の解明, 土木学会論文集B2 (海岸工学), Vol.B2-65, No.1, pp.526-530.
- 10) Dibajnia, M. and Watanabe, A. (1992) : Sheet flow under nonlinear waves and currents, *Proc. 23rd Int. Conf. on Coastal Eng.*, pp.2015-2028.
- 11) 佐藤慎司・田中正博・樋川直樹・渡辺 晃・磯辺雅彦 (2000) : 混合砂の移動機構に基づくシートフロー漂砂量算定式の提案, 海岸工学論文集, 第47巻, pp.486-490.
- 12) 原田英治・後藤仁志 (2009) : シートフロー漂砂における鉛直分級過程の高解像度計算, 土木学会論文集B2 (海岸工学), Vol.B2-65, No.1, pp.516-520.
- 13) 原田英治・鶴田修己・後藤仁志 (2011) : 混合粒径シートフロー漂砂の鉛直分級過程の固液混相型LES, 土木学会論文集B2 (海岸工学), Vol. 67, No.2, pp.I_471-I_475.
- 14) 鶴田修己・原田英治・後藤仁志 (2011) : 粒子流LESによる粒子群の非定常沈降過程の解析, 土木学会論文集B2 (海岸工学), Vol. 67, No.2, pp.I_736-I_740.

- 15) 後藤仁志・五十里洋行・安岡恒人・奥 謙介 (2008) : 被覆ブロック移動予測のためのDEM-MPSハイブリッドモデルの提案, 海岸工学論文集, 第55巻, pp.836-840.
- 16) 後藤仁志・原田英治・五十里洋行・安岡恒人・有光 剛・大江一也・鶴田修己 (2010) : 防波堤被覆ブロック群の安定性評価のためのワイヤー連結ブロック群シミュレーションの開発, 土木学会論文集B2 (海岸工学), Vol. 66, No.1, pp.846-850.
- 17) 有川太郎・秋山 実・山崎 昇 (2011) : 数値波動水槽とDEMのカップリングによる固気液3相計算システムの開発, 土木学会論文集B2 (海岸工学), Vol. 67, No.2, pp.I_021-I_025.
- 18) 熊谷兼太郎・小田勝也・藤井直樹 (2008) : コンテナ沈没挙動測定の実地実験と港湾における漂流数値シミュレーション, 海岸工学論文集, 第55巻, pp.271-275.
- 19) 後藤仁志・五十里洋行・殿最浩司・柴田卓詞・原田知弥・溝江敦基 (2009) : 粒子法によるエプロン上のコンテナ漂流挙動追跡のシミュレーション, 土木学会論文集B2 (海岸工学), Vol.B2-65, No.1, pp.261-265.
- 20) 後藤仁志・五十里洋行・柴田卓詞・小倉和己・殿最浩司・志方建仁 (2010) : 津波来襲時のコンテナ群漂流・水没シミュレーション, 土木学会論文集B2 (海岸工学), Vol. 66, No.1, pp.806-810.
- 21) 後藤仁志・五十里洋行・松原隆之・伊藤 孝 (2011) : 高精度粒子法に基づく固液二相流モデルによる山体崩壊津波の発生過程解析, 土木学会論文集B2 (海岸工学), Vol. 67, No.2, pp.I_196-I_200.
- 22) Smagorinsky, J. (1963) : General circulation experiments with the primitive equations, *Mon. Weath. Rev.*, Vol.91, No.3, pp.99-164.
- 23) Schlichting, H. (1968) : Boundary Layer Theory, 6th ed., McGraw-Hill, p.17.
- 24) Kovasznay, L.S.G. (1949) : Hot-wire investigation of the wake behind cylinders at low Reynolds numbers, *Proceedings of Royal Society of London A*, 198, pp.174-190.
- 25) Harada, E., Gotoh, H. and Tsuruta, N. (2011) : Large eddy simulation for settling block using Euler-Lagrange coupling approach, Tentative Proc. 6th Int. Conf. on Coastal Structures 2011, CD-ROM, A7-022.