

水工学シリーズ 12-B-4

高精度粒子法

－ 数値波動水槽のための粒子法の高度化－

京都大学 大学院 工学研究科

後藤 仁志

土木学会
水工学委員会・海岸工学委員会

2012 年 8 月

高精度粒子法 —数値波動水槽のための粒子法の高度化—

Accurate Particle Method - Improved Particle Method for Numerical Wave Flume -

後 藤 仁 志

Hitoshi GOTOH

1. はじめに

数値波動水槽では、砕波・越波といった自由表面(気液界面)の大変形を伴う violent flow の再現が鍵となるため、水塊の分裂・合体の記述に robustness を有する手法の適用が必須である。この観点からすると、粒子法は数値波動水槽の計算エンジンとして極めて有力である。格子法と比較した場合の粒子法の有利性に関しては、よく知られるとおり、1) 時間微分項が移流項を含まないので数値拡散が生じないこと、2) 壁面等の固定境界条件の設定が粒子を配列するだけで行えるので、格子生成のような熟練を要さないこと、が挙げられる(例えば、越塚, 2005, 2008)。

粒子法としては、SPH(Smoothed Particle Hydrodynamics)法(Lucy, 1977)とMPS(Moving Particle Semi-implicit)法(Koshizuka・Oka, 1996)が広く知られている。SPH法は圧縮性流体を陽解法型アルゴリズムで計算する手法として提案されたが、1990年代に入って非圧縮性流体への適用が可能のように改良が施され(弱圧縮性を前提とする陽解法型のWCSPH法、非圧縮性を前提とする半陰解法型のISPH法)、波浪場への適用も活発化している。一方、MPS法は、非圧縮性流体を半陰解法型アルゴリズムで計算する手法として提案された。SPH法より後発であるが、非圧縮性流体を安定して計算できる手法であるため、提案当初から波浪場解析が可能であった(後藤, 2007; Gotoh・Sakai, 2006)。

粒子法は、移動計算点を用いるため、計算点の空間密度に何らかの揺らぎが生じることとなり、これが計算結果に誤差をもたらす。例えば半陰解法型の粒子法では、圧力の瞬間値が非物理的な擾乱を伴うこととなり(MPS法による静水状態の計算例については、本稿の図-2を参照)、このことが格子法と比較した場合の最大の弱点であった。しかし、圧力擾乱の低減は計算精度を確保する上で必須の事項であることから、粒子法の計算理論の分野で研究が活発に実施され、近年、著しい改善が実現されている(Gotoh, 2009)。その結果、圧力擾乱はオリジナルのMPS法と比較して2オーダー程度縮小されるようになった。

粒子法の計算原理の基礎的な部分やこれまでの数値波動水槽への適用例に関しては、書籍「数値波動水槽」(数値波動水槽研究小委員会編, 2012)に詳細に記載したので、本稿では、粒子法型数値波動水槽の基礎技術としての高精度粒子法に関して、最新の研究成果を交えつつ紹介する。

2. 高精度粒子法

SPH法、MPS法などの粒子法は、violent flow に対しても robustness に優れ、広範囲の適用性を有しているが、運動量保存の不完全性、非物理的な圧力擾乱の存在、数値的不安定性など、幾つかの大きな弱点もある。これらの粒子法の弱点は主として、移動計算点を対象としたコンパクトなkernelによる補間を行う粒子法の特性に起因し、粒子の非物理的な振る舞い(例えば非物理的な断片化、凝集、擾乱など)の形で顕在化し、条件次第では計算の完全な破綻に直結しかねない。ここでは、粒子法の弱点の改善法に関する最新の計算技術を解説する。

2.1 運動量保存性の改善 (CMPS法・CISPH法)

粒子法も連続体近似に基づく流体の計算手法の1つであるから、質量保存則と運動量保存則に基づいてい

ることは格子法と同様である。しかし、粒子(移動計算点)を用いた離散化が行われるため、粒子間力の取り扱いに特別な注意を払わない限り、局所的(また global な)運動量保存性は保証されない。

運動量保存性の確保は、SPH 法の重要な研究テーマである。Monaghan (1992, 2005) は、粒子間相互作用を運動量保存型で与えることができる修正 SPH 法を提案した。Bonet・Lok (1999) は、剛体運動に関するポテンシャルエネルギーの不変性に基づき、運動量と角運動量の保存を保証する SPH 法の補正法を提案した。また、Khayyerら(2008) は、ISPH 法(非圧縮性流体を扱う半陰解法型の SPH 法；Shao・Lo, 2003)において角運動量を保存するため、Bonet・Lok と同様の手法を適用した。

粒子法によるシミュレーションにおける運動量保存の鍵は、粒子系内部の粒子間力が anti-symmetric(大きさが等しく、作用方向が逆向き)の関係を満たすことである(Bonet・Lok, 1999; Khayyerら, 2008; Khayyer・Gotoh, 2008)。また、角運動量保存には、粒子間力は anti-symmetric であることに加え、radial(対象とする 2 つの粒子の相対位置ベクトルと同一作用線上)でなければならない。Shao・Lo (2003) の ISPH 法では、圧力勾配力と粘性応力はともに anti-symmetric であり、運動量は厳密に保存されるが、粘性応力は異方性のため radial ではなく、角運動量は保存されない。一方、MPS 法では、圧力勾配力が anti-symmetric ではないので、運動量・角運動量はどちらも保存されない。

Khayyer・Gotoh (2008) は、粒子 i とその近傍の粒子 j の中間に、補助計算点 k を導入し、MPS 法のフレームワークで anti-symmetric でかつ radial である圧勾配モデルを導出した。この手法が CMPS(Corrected MPS) 法である。

$$\nabla p|_i = \frac{D_s}{n_0} \sum_{j \neq i} \frac{(p_i + p_j) - (\hat{p}_i + \hat{p}_j)}{|x_j - x_i|^2} (x_j - x_i) w(|x_j - x_i|) \quad (1)$$

ここに、 p : 圧力、 p_i : 粒子 i における圧力、 $\hat{p}_i$: 粒子 i 周囲の影響域内の粒子における圧力の最小値、 x_i : 粒子 i の位置ベクトル、 D_s : 次元数(2次元場では $D_s=2$, 3次元場では $D_s=3$)、 w : カーネル(kernel) 関数、 n_0 : 基準粒子数密度(n : 粒子数密度)である。

CMPS 法は、楕円形の水塊の引張問題(Monaghan, 1994)や巻き波形砕波と splash-up の水理実験(Li・Raichlen, 2003)との比較を通じて、その妥当性が実証されている。また、Khayyer・Gotoh (2008) は、標準 MPS 法の粘性項モデル(Laplacian モデル)に代えて歪速度テンソル型の粘性項モデル(Strain-Based Viscosity; SBV)を導入することで、実験の再現性が更に向上することを示した(CMPS-SBV 法)。

図-1 は、標準 MPS 法、CMPS 法および CMPS-SBV 法の計算結果と Li・Raichlen (2003) の巻き波形砕波の実験との比較を示しているが、CMPS 法が標準 MPS 法と比べて高い再現性を有することが分かる。標準 MPS 法では、非物理的な粒子の散乱により jet の再現性が低下するが、CMPS 法では運動量保存性が保証されたことにより、plunging jet(巻き波 jet)とそれに伴う air chamber(空気室)の形成が明瞭に再現されており、両手法の差は明瞭である。また、CMPS 法では jet の着水後に生じる 2 次 jet の立ち上がりが再現されているが、その後の jet の挙動については、再現性は不十分である。これに対して、CMPS-SBV 法では、2 次 jet の垂直方向への立ち上がりや弧を描きつつ前方へ飛散する飛沫の出現、さらには 2 次 jet の飛距離に関しても、実験との良好な一致を示している。

Khayyerら(2008) は、ISPH 法において角運動量保存性を保証するために、Bonet・Lok (1999) と同様の方法によって、粘性応力項の補正行列を誘導した。この補正行列は角運動量保存を対象に導出されたものであるが、補正行列を用いると、角運動量だけでなく運動量の保存性も向上する。この方法は、Bonet・Lok の CSPH(修正された SPH)法に因んで、CISPH(非圧縮性修正 SPH)法と呼ばれる。

2.2 圧力擾乱の制御

粒子法の最も深刻な弱点は、圧力場の非物理的な擾乱の存在である(Colagrossi・Landrini, 2003; Gotohら, 2005)。この問題は、移動計算点を用いる粒子法の本質的な構造に起因する不可避の問題であるが、特段の改善を施さない限り解の精度への影響が深刻である。Colagrossi・Landrini (2003) は、初期的な改善の試みと

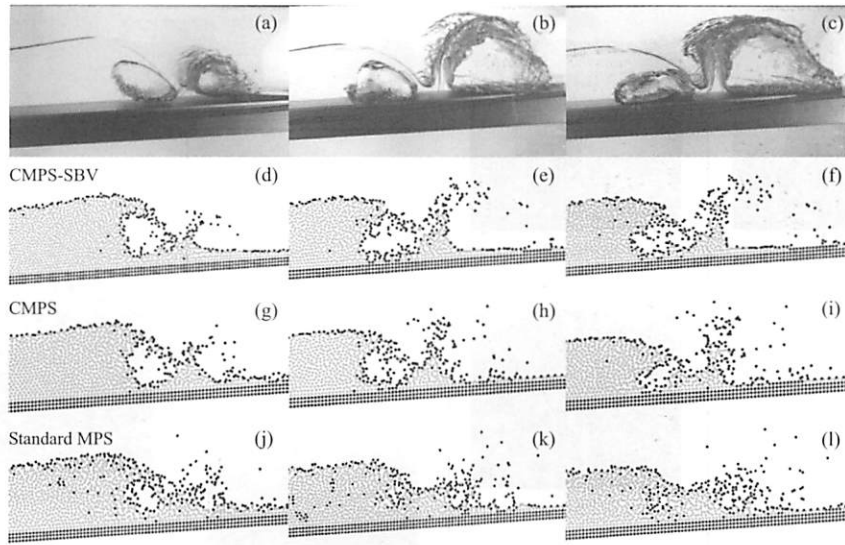


図-1 標準MPS法, CMPS法, CMPS-SBV法による巻き波形砕波の計算

して、弱圧縮性 (Weakly Compressible) SPH(WCSPH) 法における圧力計算の修正を提案したが、それ以降も改善法に関する研究例は少なくない(Khayyer・Gotoh, 2009; Molteni・Colagrossi, 2009; Antuonoら, 2010; Kondo・Koshizuka, 2011; Khayyer・Gotoh, 2011)。

Shibata・Koshizuka (2007) は、3次元標準MPS法を用いて船舶の甲板打ち込み(船舶への波の打ち上げ)のシミュレーションを行い、水面形に関して実験と計算の良好な一致が得られることを示した。しかし、標準MPS法では圧力の移動平均処理によりノイズを除去する必要があったため、衝撃波圧に関してはピーク値で50%程度の過小評価となり、圧力の時系列に関しては十分な再現性が得られなかった。このように、標準MPS法(一般には、陰解法型粒子法)は、適切な修正が成されない限り、衝撃波圧のような violent flow の計算法としては十分に信頼に足るツールとは言えない。

MPS法における圧力擾乱低減のための初期的な試みとして、Koshizukaら(1999)は、Poisson圧力方程式(PPE)の生成項を以下のように変更し、弱圧縮性を導入した。

$$\nabla^2 p_{k+1} = \frac{\rho_0}{\Delta t^2} \left(\frac{n_k^* - n_0}{n_0} - \frac{1}{\rho_0 C_s^2} p_{k+1} \right) \quad (2)$$

ここに、 ρ_0 : 基準密度、 Δt : 計算時間間隔、 n_k^* : 時間ステップ k における第1段階計算後の仮粒子数密度、 C_s : モデル定数であり、右辺第2項が圧縮性の影響を示す項である。実際の計算では、僅かな圧縮性の導入が、非物理的な圧力擾乱の低減に有効であることが知られている。しかし、僅かでも圧縮性が許容されると、長時間計算ではその影響が累積し、非物理的なエネルギー減衰をもたらす、体積保存性を傷つける。したがって、安易に弱圧縮型のMPS法を導入するのではなく、圧力擾乱の発生理由に関して、数値スキームや微分演算子のモデル化における精度の面から再考することが重要となる。

2.3 高精度生成項 (-HS)

ところで、projection法に基づく陰解法型粒子法の非物理的な圧力擾乱の主要な原因は、Poisson圧力方程式の生成項にある(Khayyer・Gotoh, 2009; Khayyerら, 2009; Kondo・Koshizuka, 2011; Khayyer・Gotoh, 2011)。その他にも、低次のLaplacianモデルの存在(Khayyer・Gotoh, 2010)、低次の圧力勾配モデルの存在(Khayyer・Gotoh, 2008, 2010)、自由表面判定法の精度の不足(Khayyerら, 2009)などがあるが、ここではPoisson圧力方程式の生成項の問題に関して説明する。

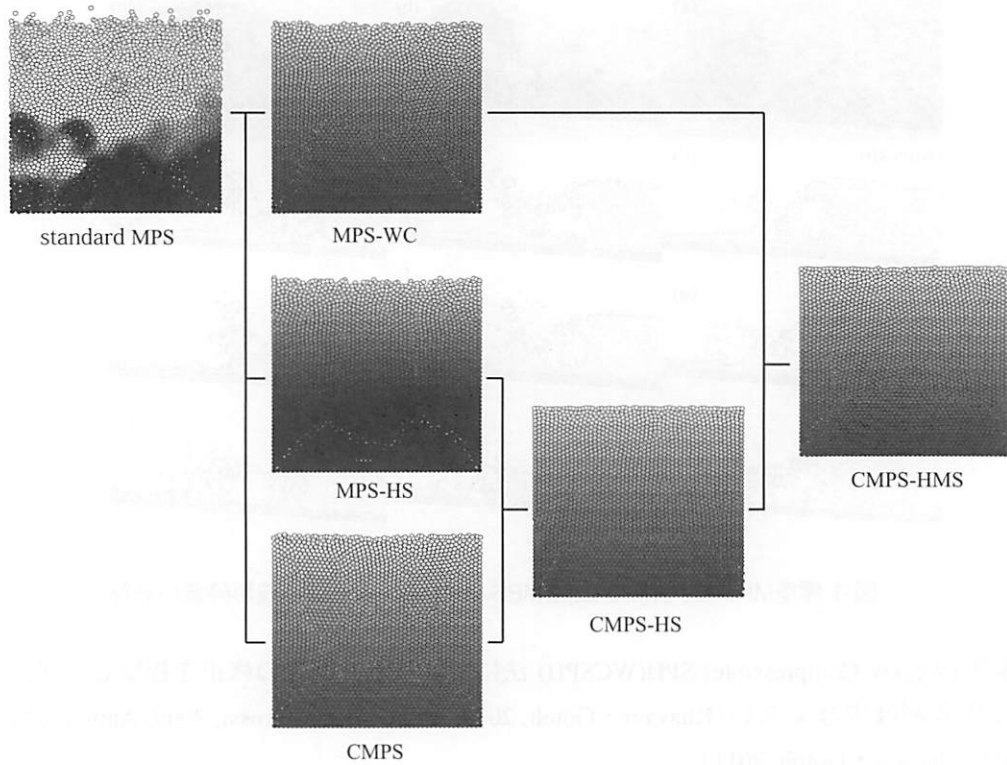


図-2 高精度粒子法の導入による静水圧計算の段階的改善

先にも述べたように、Colagrossi・Landrini (2003) は、完全陽解法型の WCSPH 法において圧力擾乱を低減するために、各時刻の密度場の補間精度の向上させる方法を提案した。しかし、陽解法型の粒子法とは異なり、MPS 法、ISPH 法などの半陰解法型の粒子法では、圧力は(密度そのものよりはむしろ)密度の時間変動に支配されるので、Colagrossi・Landrini の方法は有効ではない。そこで、Khayyer・Gotoh (2009), Khayyerら(2009) は、粒子数密度の高次微分演算に基づく Poisson 圧力方程式の高精度生成項 (Higher order Source terms; -HS) を提案した。この方法は、MPS 法、ISPH 法の両方に有効であり、MPS 法に用いる場合の Poisson 方程式は、

$$\nabla^2 p_{i+1}|_i = -\frac{\rho_0}{n_0 \Delta t} \sum_{i \neq j} \frac{r_c}{r_{ij}^3} (x_{ij} u_{ij} + y_{ij} v_{ij})^* \quad (3)$$

ISPH 法については、

$$\nabla^2 p_{i+1}|_i = \frac{\rho^*}{\rho_0 \Delta t} \sum_{i \neq j} (m_j \nabla_i w_{ij} \cdot \mathbf{u}_{ij})^* \quad (4)$$

となる。式 (3),(4) 中で、 r_c : 粒子周囲の影響域の半径、 r_{ij} : 粒子 i, j 間の距離、 $\mathbf{x}_{ij}(x_{ij}, y_{ij})$: 粒子 j の粒子 i に対する相対位置ベクトル、 $\mathbf{u}_{ij}(u_{ij}, v_{ij})$: 粒子 j の粒子 i に対する相対速度ベクトル、 w_{ij} : カーネル関数、 m_j : 粒子 j の質量であり、式中の上付き添字 $*$ は、生成項のすべての物理量が第 1 段階の更新後の仮の物理量であることを意味している。なお、この方法をそれぞれの運動量(角運動量)保存モデルである CMPS 法や CISP 法と併用したのが、CMPS-HS 法、CISP-HS 法である。

図-2 は、弱圧縮性(WC)、高精度生成項(HS)、運動量保存型圧力勾配モデル(CMPS 法、CISP 法)の導入による静水圧の計算の段階的な改善を示している。また、図-3 には、(顕著な空気混入を伴わない砕波面の壁面との衝突により衝撃圧が発生する)flip-through 型衝突を対象に、同様の比較を示した。図中には、Hattoriら(1994)の水理実験写真から読み取った水面形を併示している。静水圧計算と同様に flip-through 型衝突の計算

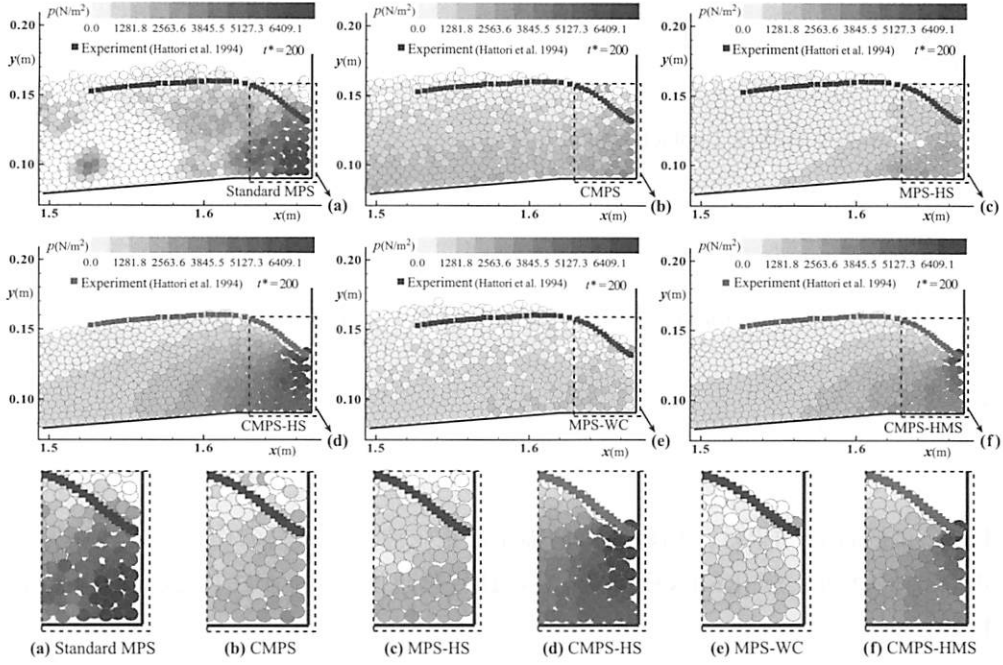


図-3 Flip-through 型砕波の壁面衝突における比較

においても、すべての高精度粒子法が、標準 MPS 法に見られる圧力の非物理的擾乱を効果的に抑制している。運動量保存型の圧力勾配項を用いる CMPS 法では、標準 MPS 法よりも粒子の相対座標が正確に計算されるので、粒子数密度の変動幅も小さくなり、結果として非物理的な圧力擾乱も減少する。MPS-HS 法による圧力場は、CMPS 法より全体としては滑らかな分布を呈するが、MPS-HS 法の瞬間像中には僅かながら圧力がゼロとなる水中粒子が存在する。次に、CMPS 法と MPS-HS 法を併用すると、圧力分布、水面形の両者に関して実験との一致は更に向上する。CMPS-HS 法の圧力分布は、Cooker・Peregrine (1992) が示した圧力等値線と良好に一致する。微弱な圧縮性を許容する MPS-WC 法の結果は、標準 MPS 法より優れている。また、CMPS-HS 法に微弱な圧縮性を導入した CMPS-HMS 法は、水面形の再現性では CMPS-HS 法と同程度であるが、圧力場に関しては、静水面付近の壁面近傍に圧力のピークが存在する Cooker・Peregrine の解の分布との一致が最もよい。なお、微弱な圧縮性の導入は、圧力擾乱の低減には効果的ではあるが、体積保存性が不完全となり、本来の非圧縮性流体解法としての陰解法型の粒子法の長所が損なわれるので、必ずしも良い選択肢とは言えない。

2.4 高精度 Laplacian モデル

Projection 法に基づく半陰解法型粒子法では、圧力の Poisson 方程式の求解に Laplacian の離散化が必要であるから、高精度 Laplacian モデルを導出は圧力解の高精度化に直結している。Khayyer・Gotoh (2010) は、Laplacian の数学的定義に忠実な (mathematically consistent) Laplacian モデルを導出し、高精度 Laplacian (Higher order Laplacian) モデルと名付けた。

SPH 法における勾配の定義 (Monaghan, 1992)

$$\langle \nabla \phi \rangle_i = \frac{1}{n_0} \sum_{i \neq j} (\phi_j - \phi_i) \nabla w_{ij} = \frac{1}{n_0} \sum_{i \neq j} \phi_{ij} \nabla w_{ij} \quad (5)$$

にしたがい、半陰解法型粒子法では、粒子数密度の影響円内の積分値が標準値 n_0 に常に保たれることを考慮すると、Laplacian は、

$$\nabla \cdot \langle \nabla \varphi \rangle_i = \frac{1}{n_0} \sum_{i \neq j} \left(\nabla \varphi_{ij} \cdot \nabla w_{ij} + \varphi_{ij} \nabla^2 w_{ij} \right) \quad (6)$$

と書ける．2次元場における高精度 Laplacian は，

$$\nabla \cdot \langle \nabla \varphi \rangle_i = \frac{1}{n_0} \sum_{i \neq j} \left(\varphi_{ij} \frac{\partial^2 w_{ij}}{\partial r_{ij}^2} - \frac{\varphi_{ij}}{r_{ij}} \frac{\partial^2 w_{ij}}{\partial r_{ij}^2} \right) \quad (7)$$

と書けて，これに MPS 法の標準 kernel 関数を用いると，高精度 Laplacian の表式

$$\nabla \cdot \langle \nabla \varphi \rangle_i = \frac{1}{n_0} \sum_{i \neq j} \left(\frac{3\varphi_{ij} r_{ij}}{r_{ij}^3} \right) \quad (8)$$

が得られる．

式 (8) の高精度 Laplacian の効果は，指数的に増幅する正弦波圧力振動の作用下での圧力解の時系列計算および violent sloshing の水理実験 (Kishevら, 2006) との比較を通じて，検証されている (Khayyer・Gotoh, 2010; Khayyer・Gotoh, 2011)．

2.5 PPE の誤差補正生成項

MPS 法の圧力擾乱を抑制するためには，粒子数密度を一定値 n_0 に保つ(質量保存則を満足する)ための陰的修正計算を実施する過程で，粒子数密度の時間的な変動をなるべく抑制することが肝要であり，それには，PPE の生成項の評価が鍵となる．ここでは，Kondo・Koshizuka (2011) により提案された PPE の生成項に付加する補正項の考え方と Khayyer・Gotoh (2011) による改良型の補正項に関して説明する．

MPS 法は，第 1 段階の陽的計算が終了した時点の中間の流速場 $\mathbf{u}^*$ が，ソレノイダル流速場 (solenoidal or divergence free velocity field) とスカラー(すなわち圧力)場の勾配 (gradient of a scalar field) に分解できるという Helmholtz-Hodge 分解

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{u}_{k+1} + \frac{\Delta t}{\rho} \nabla p \quad (9)$$

に基づいている．このようなベクトル分解を具体化したのが，半陰解法型粒子法の 2 段階法である．第 1 段階(予測過程)では，粘性項と重力項を考慮して陽的な更新計算を実行し，仮流速場 $\mathbf{u}^*$ を得る．この過程では流体の非圧縮性は満足されないで， $\mathbf{u}^*$ の発散はゼロとはならない(仮流速場はソレノイダル場ではない)．それゆえに，最終的な流速場 $\mathbf{u}_{k+1}$ の発散がゼロとなるように第 2 段階の修正流速 $\mathbf{u}^{**}$ が導入される．換言すると，修正流速 $\mathbf{u}^{**}$ は中間の流速場 $\mathbf{u}^*$ をソレノイダル流速場に射影する(戻す)役割を果たしている．

修正流速 $\mathbf{u}^{**}$ は，粒子数密度を用いた連続式

$$\frac{1}{n_0} \left(\frac{Dn}{Dt} \right)^* + \nabla \cdot \mathbf{u}^{**} = 0 \quad (10)$$

を満たす．式 (9), (10) から，

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^{**} = \nabla \cdot (\mathbf{u}_{k+1} - \mathbf{u}^*) = \nabla \cdot \left(-\frac{\Delta t}{\rho} \nabla p \right) = -\frac{1}{n_0} \left(\frac{Dn}{Dt} \right)^* \quad (11)$$

となり，圧力の PPE

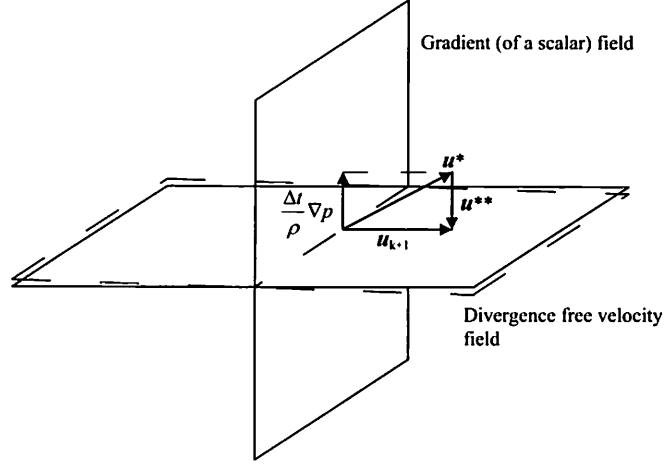


図-4 Projection 法の概念

$$\frac{\Delta t}{\rho} (\nabla^2 p_{k+1})_i = \frac{1}{n_0} \left(\frac{Dn}{Dt} \right)_i^* \quad (12)$$

が得られる．修正流速 u^{**} は，この圧力の PPE を解くことにより算出される．

以上から明らかなように，数値解の正確性を支配する要因として，(i)PPE の生成項(予測段階の体積(粒子数密度)の時間微分すなわち， $(1/n_0)(Dn/Dt)^*$)の計算精度；(ii) 微分演算子モデル(勾配，Laplacian 等)の計算精度；(iii) 時間積分スキームの精度；(iv) 連立線形方程式のソルバーの精度が挙げられる．

現実の計算スキームは精度の面で必ずしも完全ではないため，流速場 u_{k+1} はソレノイダル場と完全には一致せず，それゆえに(時間ステップ $k+1$ における)流体の非圧縮性は完全には満足されない．言い換えると，各々の時間ステップで計算された流速場 u_{k+1} は，わずかにソレノイダル場から偏倚しており(図-4 中の破線で示されるように)，時間の進行に伴って，この偏倚が累積し，粒子数密度の誤差が顕在化する．

各瞬間の流速場 u_k のソレノイダル場からの偏倚を安定して小さくできれば，場全体の体積保存性が向上し，流速場と圧力場の解も安定する．そのために，Hu・Adams (2009) および Kondo・Koshizuka (2011) は PPE の生成項に誤差補正項 (Error-Compensating terms in the Source term, 略称 ECS) を追加する改良を行った．ECS 項は，体積保存性の欠陥を瞬間的な面と累積的な面の両方で補正する必要がある，ECS 項を導入した PPE は，一般的には以下ようになる．

$$\begin{aligned} \frac{\Delta t}{\rho} (\nabla^2 p_{k+1})_i &= \frac{1}{n_0} \left(\frac{Dn}{Dt} \right)_i^* + \text{ECS} \\ &= \frac{1}{n_0} \left(\frac{Dn}{Dt} \right)_i^* + \text{func} \left[\frac{1}{n_0} \left(\frac{Dn}{Dt} \right)_i^k, \frac{1}{\Delta t} \frac{n^k - n_0}{n_0} \right] \end{aligned} \quad (13)$$

式 (13) の誤差補正項の第 1 パラメータは，時間ステップ k における粒子数密度の時間微分(あるいは，この時間ステップの流速の発散)であり，理想的にはゼロとなる量である．誤差補正項の第 2 パラメータは，時間ステップ k における粒子数密度の標準値 n_0 からの偏差であり，粒子数密度の累積計算誤差の大きさと関係している．

Kondo・Koshizuka (2011) は，以下の ECS 項を提案した．

$$\text{ECS} = \alpha \left[\frac{1}{n_0} \frac{n^k - n^{k-1}}{\Delta t} \right] + \beta \left[\frac{1}{\Delta t} \frac{n^k - n_0}{n_0} \right] \quad (14)$$

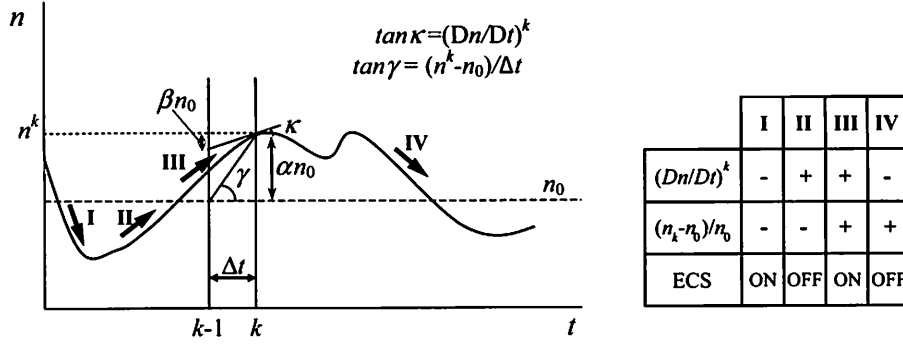


図-5 粒子数密度変動とECS 項

しかし、この誤差補正項は幾つかの点において必ずしも十分とは言えない。はじめに、式 (14) の誤差補正項にはモデル定数 α, β が導入されている。Kondo・Koshizuka は、静水状態の計算によってこれらのモデル定数の検定を行っているが、提案された推奨値は普遍性を有するものではなく、特に violent flow については試行錯誤的なチューニングが不可避となる。PPE の生成項に生じる誤差が瞬間の流れ場の解(粒子の座標の時空間変動)に起因することを考えると、各瞬間の粒子(流れ場)の状態に依存しない普遍定数としてモデル定数を決定することには無理があるのも当然だろう。次に、粒子数密度の時間微分が 1 次精度であり、特に violent flow において計算誤差の増大が懸念される。また、式 (14) では自由表面の影響が考慮されていない。

Khayyer・Gotoh (2011) は、Kondo・Koshizuka (2011) と同様の線形和で誤差補正項を以下のように与えたが、モデル定数 α, β に関しては、粒子数密度の瞬間的挙動に応じて変化する動的な定式化を導入した。

$$ECS = \alpha \left[\frac{1}{n_0} \left(\frac{Dn}{Dt} \right)_i \right] + \beta \left[\frac{1}{\Delta t} \frac{n^k - n_0}{n_0} \right] \quad (15)$$

$$\alpha = \left| \frac{n^k - n_0}{n_0} \right| ; \beta = \left| \frac{\Delta t}{n_0} \left(\frac{Dn}{Dt} \right)_i \right|$$

式 (15) は、粒子数密度の瞬間的挙動により分類して表示すると、以下のようになる。

$$\frac{\Delta t}{\rho} (\nabla^2 p_{k+1})_i = \begin{cases} \frac{1}{n_0} \left(\frac{Dn}{Dt} \right)_i \pm \frac{n^k - n_0}{n_0} \left[\frac{2}{n_0} \left(\frac{Dn}{Dt} \right)_i \right] & \left(\frac{Dn}{Dt} \right)_i \cdot \frac{n^k - n_0}{n_0} > 0 \\ \frac{1}{n_0} \left(\frac{Dn}{Dt} \right)_i & \left(\frac{Dn}{Dt} \right)_i \cdot \frac{n^k - n_0}{n_0} < 0 \end{cases} \quad (16)$$

粒子数密度の瞬間的挙動を示す指標は 2 つある。粒子数密度の瞬間的変動(すなわち、時間微分) $(Dn/Dt)_k$ と粒子数密度の標準値 n_0 からの偏倚量 $(n_k - n_0)/n_0$ である。この 2 つの指標が同符号のときに ECS 項が機能し、2 つの指標が異符号のときには ECS 項はゼロとなる。図-5 は、式 (16) の ECS 項の働きを示す模式図である。(i) $(n_k - n_0)/n_0 < 0$ かつ $(Dn/Dt)_k < 0$ のとき、粒子数密度の瞬間値は標準値より小さく、かつこの瞬間には減少傾向にあるので、補正を行わなければ粒子数密度はさらに小さくなり、瞬間値と標準値の偏差は増大する。 $(n_k - n_0)/n_0 > 0$ かつ $(Dn/Dt)_k > 0$ のとき、粒子数密度の瞬間値は標準値より大きく、かつこの瞬間には増加傾向にあるので、やはり補正が必要となる。(ii) 一方、 $(n_k - n_0)/n_0 > 0$ かつ $(Dn/Dt)_k < 0$ のときは、粒子数密度の瞬間値は標準値より大きい、この瞬間には減少傾向にあるので、補正を行わなくても粒子数密度は標準値に近づく。 $(n_k - n_0)/n_0 < 0$ かつ $(Dn/Dt)_k > 0$ のときも同様で、補正を行わなくても粒子数密度は標準値に近づく。なお、式 (16) の右

辺は、計算時間ステップ Δt と無関係であるので、 Δt の変化に依存せず、計算の安定化の上でも好都合である。自由表面の取り扱いに関しては、Khayyer・Gotoh (2011) が以下の表式を提案している。

$$\frac{\Delta t}{\rho} (\nabla^2 p_{k+1})_i = \frac{1}{n_0} \left(\frac{Dn}{Dt} \right)_i + ECS$$

$$ECS = \begin{cases} \left| \frac{n^k - n_0}{n_0} \right| \left[\frac{1}{n_0} \left(\frac{Dn}{Dt} \right)_i \right] + \left| \frac{\Delta t}{n_0} \left(\frac{Dn}{Dt} \right)_i \right| \left[\frac{1}{\Delta t} \frac{n^k - n_0}{n_0} \right] & n^k > \gamma n_0 \\ \left| \frac{n^k - (n_i)_s}{(n_i)_s} \right| \left[\frac{1}{n_0} \left(\frac{Dn}{Dt} \right)_i \right] + \left| \frac{\Delta t}{n_0} \left(\frac{Dn}{Dt} \right)_i \right| \left[\frac{1}{\Delta t} \frac{n^k - (n_i)_s}{(n_i)_s} \right] & n^k \leq \gamma n_0 \end{cases} \quad (17)$$

ここに、 $\gamma (= 0.90)$ はモデル定数であるが、自由表面の判定基準より小さく設定される。式中の $(n_i)_s$ は、計算の初期段階で自由表面付近に位置していた粒子 i の粒子数密度である。まず、計算開始時に n_i を全ての粒子について計算する。このとき自由表面近傍に位置する粒子の n_i は粒子数密度の標準値 n_0 (この値は水中の粒子を対象に算定される) より十分に小さな値となる。なお、violent flow では、自由表面近傍粒子が頻繁に入れ替わるので、 $(n_i)_s$ の値も短いサイクル (20 ステップ程度に 1 度) で更新する必要が生じる。なお、Khayyer・Gotoh が述べているように、この ECS 項は、MPS 法に限らず、ISPH 法等の半陰解法型の粒子法にも適用が可能である。

3. 高精度勾配モデル

粒子法には、各粒子 (計算点) が相互に作用する斥力によって均質な数密度を維持する機構が組み込まれている。そのため、標準型の粒子法 (標準 MPS 法、WCSPH 法など) も圧縮に対しては十分に安定である。その一方、引張に対しては、圧縮に対して機能した粒子間斥力が有効ではなく、計算が不安定となり易い。このような引張不安定問題は粒子法の弱点の 1 つであり、粒子法計算理論の分野で注目を集める課題の 1 つである。ここでは、引張不安定問題を概観し、その解決法として、高精度勾配モデルについて紹介する。加えて、発散モデルの高精度化と PPE への速度発散型生成項の導入についても述べる。

3.1 引張不安定問題

上述のように、粒子法は引張応力の作用下で不安定になり易い。この問題は SPH 法では引張不安定 (tensile instability) の問題として知られており、SPH 法に関しては既往の研究も多い。Monaghan (2000) および Gray ら (2001) は、人工反発力 (artificial repulsive forces) の導入による安定化を提案した。Kondo ら (2010) は、Hamiltonian 粒子法に同様の項を導入することにより、弾性体のシミュレーションの安定性の改善に成功した。Dilts (1999) は、微分係数の推定精度の向上が引張不安定の抑制には不可欠であることを指摘した。Belytschko・Xiao (2002) は、Euler 型の kernel が Lagrange 運動方程式と伴に用いられる場合に引張不安定が顕在化すること、Lagrange 型の kernel が引張不安定の抑制には効果的であることを示した。

弾性体計算における引張不安定の抑制には、流速・圧力以外の状態量 (応力等) の定義点 (stress points) の導入が有効であるが、stress points の適用は複雑な定式化を必要とするにもかかわらず、計算の安定性と収束性は計算点の配列に依存し、流体では不可避となる不規則配列では有効に機能しない (Fries・Belytschko, 2008)。また、Lagrange 型の kernel は大変形問題には適用できない (Belytschko・Xiao, 2002)。

3.2 高精度勾配モデル

Khayyer・Gotoh (2011) は、MPS 法をはじめとする陰解法型粒子法では、圧力および圧力勾配の計算精度が確保されれば、引張不安定が効果的に抑制できることを示した。つまり、引張不安定の抑制には圧力擾乱の低減が不可欠で、これには前述の PPE の高精度生成項 (HS)、高精度 Laplacian (HL)、ECS 項の導入が有効である。

引張不安定の抑制の第2ステップは、圧力勾配モデルの高精度化である。圧力勾配の高精度化によって、各粒子の運動の計算精度が向上し、結果として粒子配列の過剰な乱れが抑制される。Khayyer・Gotoh (2011) は、圧力勾配が近傍粒子 j における圧力の対象粒子 i についての Taylor 級数展開から導かれる (Chenら, 1999; Ogerら, 2007) ことから、高精度の圧力勾配を得るための修正行列を導出した。

$$C_{ij} = \begin{pmatrix} \sum V_{ij} \frac{w_{ij} x_{ij}^2}{r_{ij}^2} & \sum V_{ij} \frac{w_{ij} x_{ij} y_{ij}}{r_{ij}^2} \\ \sum V_{ij} \frac{w_{ij} x_{ij} y_{ij}}{r_{ij}^2} & \sum V_{ij} \frac{w_{ij} y_{ij}^2}{r_{ij}^2} \end{pmatrix}^{-1} \quad (18)$$

ここに、

$$V_{ij} = \frac{1}{\sum_{i \neq j} w_{ij}} \quad (19)$$

高精度の圧力勾配モデルは、MPS 法では、標準型の圧力勾配モデルに上記の修正行列を導入して、

$$\langle \nabla p \rangle_i = \frac{D_s}{n_0} \sum_{j \neq i} \frac{p_j - p_i}{|r_j - r_i|^2} (r_j - r_i) C_{ij} w(|r_j - r_i|) \quad (20)$$

となる。この修正は、Gradient Correction (GC) と呼ばれる。この操作は、対象粒子周囲の粒子分布の不均質性の影響を考慮した補正を kernel 関数に施すことに相当する。なお、この表式の欠点は、運動量保存性が保証されない(粒子間作用力が anti-symmetric ではない)こと (Khayyer・Gotoh, 2008) であるが、Ogerら(2007) が述べているように、運動量保存の不完全性の影響は、圧力勾配の計算精度の不足と比較すると小さく、特に負圧(引張)状態に対しては、圧力勾配の計算精度の確保が決定的に重要である。

図-6 は、剛体回転場に置かれた正方形流体片の変形問題を高精度化された MPS 法で計算した結果である。図-6(a) は MPS 法の結果であるが、 $t=0.064s$ で流体片の角の部分が裂けて粒子が飛び散っている(計算は $t=0.084s$ で発散する)。図-6(b) に示すように、HS の適用は計算の安定化に寄与するが、 $t=0.146s$ で計算は発散する。図-6(c) に、MPS-HS-ECS 法の結果を示すが、ECS 項の導入はさらに計算を安定化させて、 $t=0.20s$ までの計算が可能となるが、不安定化は回避できない。MPS-HS-HL-ECS 法(図-6(e))でも同様である。一方、GC の導入は状況を劇的に改善する。MPS-HS-GC 法の結果(図-6(d))を図-6(c) および図-6(e) と比べれば、GC の効果は明白である。しかし、MPS-HS-GC 法の結果(図-6(d))では圧力分布が非対称となっているが、さらに高精度オプシオン-HL-ECS を追加した図-6(f) ではこの点の改善も顕著である。以上より、引張不安定の問題には、MPS-HS-HL-ECS-GC 法が最適であると言える。

図-7 は、jet の平板との衝突問題 (Molteni・Colagrossi, 2009) を高精度化された MPS 法で計算した結果である。図-7(a), (b) は、平板との衝突直後の無次元時間 $tU/L = 0.9504$ における瞬間像と圧力分布を示しているが、MPS-HS-HL 法が衝撃圧分布(jet の中央軸と平板の交点である淀み点を中心とした同心円状の圧力等値面)を再現できない。一方、MPS-HS-HL-ECS-GC 法は、少なくとも定性的には、衝撃圧分布の特性を良好に再現している。衝突後に水脈が左右に分岐する $tU/L = 1.3464$ には、MPS-HS-HL 法が不安定化し、体積保存性が崩れて水脈の端部付近で粒子が飛び散る様子が分かる。これに対して、MPS-HS-HL-ECS-GC 法は一貫して安定な計算結果を与えており、優位性は明瞭である。なお、場が定常となった状態では淀み点圧力の解析解が得られるが、MPS-HS-HL-ECS-GC 法の数値解との一致は良好であることが確認されている。

図-8 は、sway タイプのスロッシング (Kishevら, 2006) の計算例であるが、MPS-HS-HL 法では自由表面近傍で圧力場の擾乱と粒子の非物理的な分散が見られるのに対して、MPS-HS-HL-ECS-GC 法では自由表面近傍での粒子の非物理的な分散は除去されて、自由表面は滑らかとなり、圧力分布の擾乱も低減している。

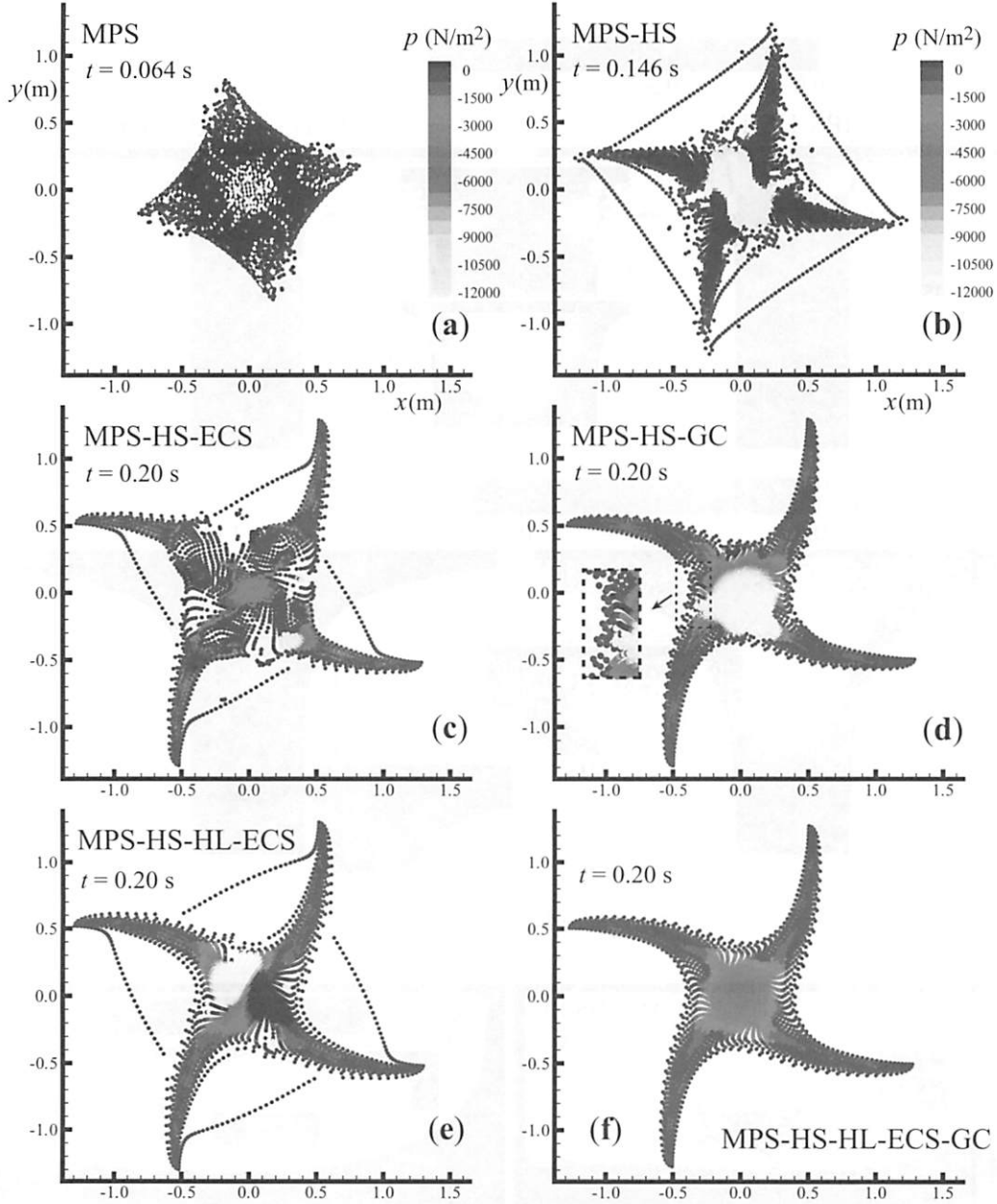


図-6 剛体回転場に置かれた正方形流体片の変形問題

3.3 高精度発散モデル

発散 (divergence) と勾配の数学的定義から明らかなように、発散モデルは勾配モデルから容易に導出できる。すなわち、勾配モデルにおいてスカラー ϕ をベクトル ϕ と読み替え、勾配演算におけるスカラーの相対値 $(\phi_j - \phi_i)$ と相対ベクトル $(x_j - x_i)$ の積を $(\phi_j - \phi_i)$ と $(x_j - x_i)$ の内積に変更すれば、発散モデルが得られる。

したがって、式 (20) の高精度勾配モデルと同様に高精度発散モデルが導出できる。

$$\langle \nabla \cdot \phi \rangle_i = \frac{D_s}{n_0} \sum_{j \neq i} \frac{(\phi_j - \phi_i) \cdot (r_j - r_i)}{|r_j - r_i|^2} C_{ij} w(|r_j - r_i|) \quad (21)$$

なお、式中の修正行列も勾配モデルと共通であり、式 (18) が適用できる。

ところで、圧力の PPE の生成項は、速度発散型で記述することもできる。粒子数密度を用いた連続式 (10) より、

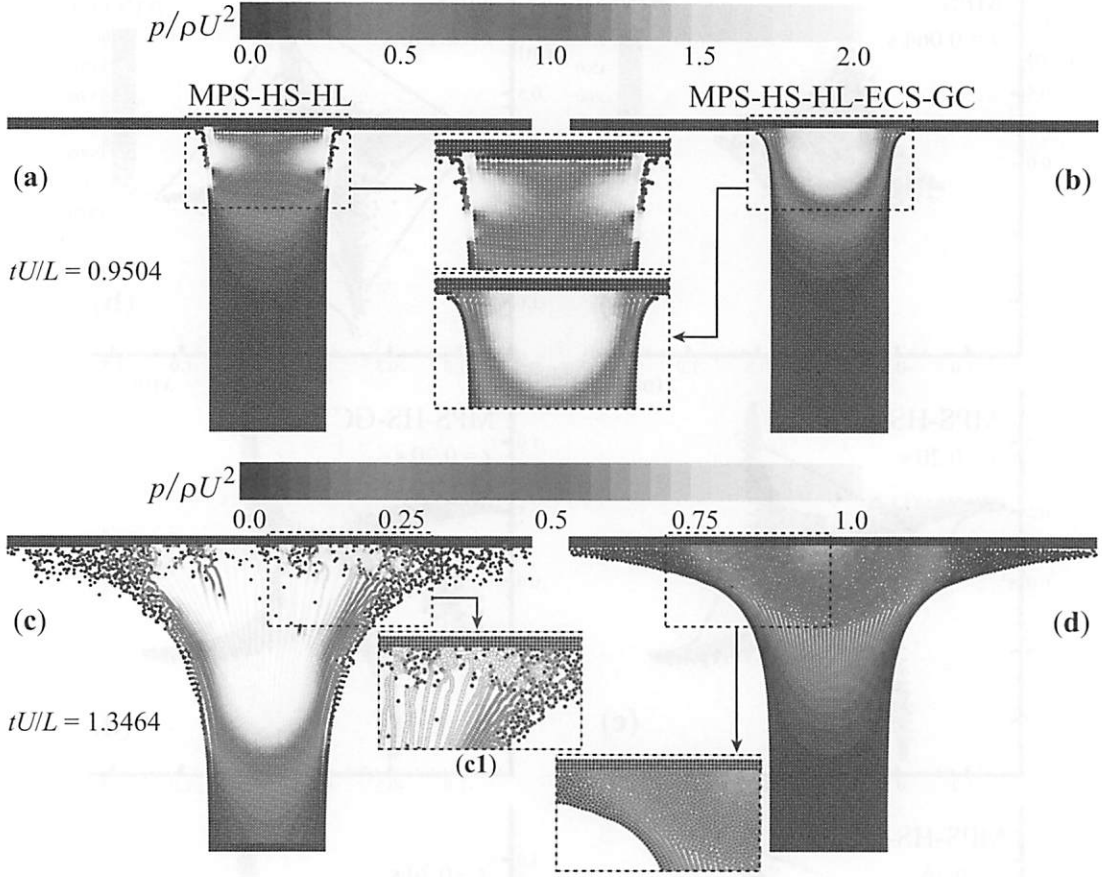


図-7 jet の平板との衝突問題

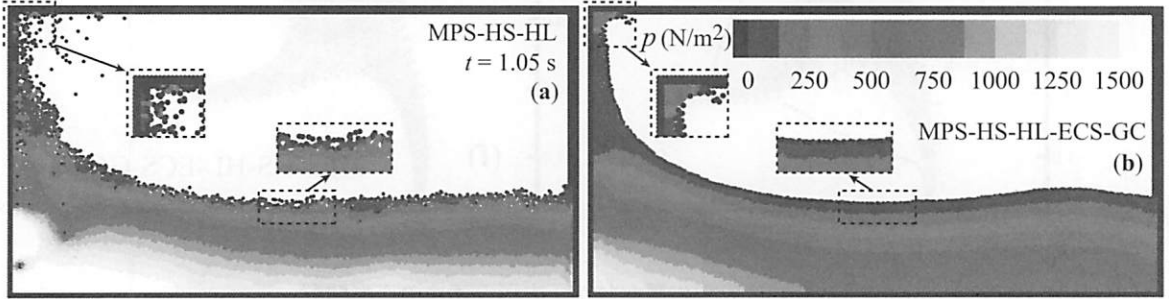


図-8 sway タイプのスロッシング

$$\frac{1}{n_0} \left(\frac{Dn}{Dt} \right)_i = -\nabla \cdot (\mathbf{u}_k^{**}) = -\nabla \cdot (\mathbf{u}_{k+1} - \mathbf{u}^*) \quad (22)$$

と書ける。速度場 $\mathbf{u}_{k+1}$ はソレノイダル場であるから、その発散はゼロとなるので、

$$-\nabla \cdot (\mathbf{u}_{k+1} - \mathbf{u}^*) = \nabla \cdot \mathbf{u}^* \quad (23)$$

したがって、圧力の PPE は、

$$\frac{\Delta t}{\rho} (\nabla^2 p_{k+1})_i = \nabla \cdot \mathbf{u}^* \quad (24)$$

と書ける。式 (24) の生成項は、速度発散型で記述されている。この種の生成項は圧力擾乱の低減に効果的

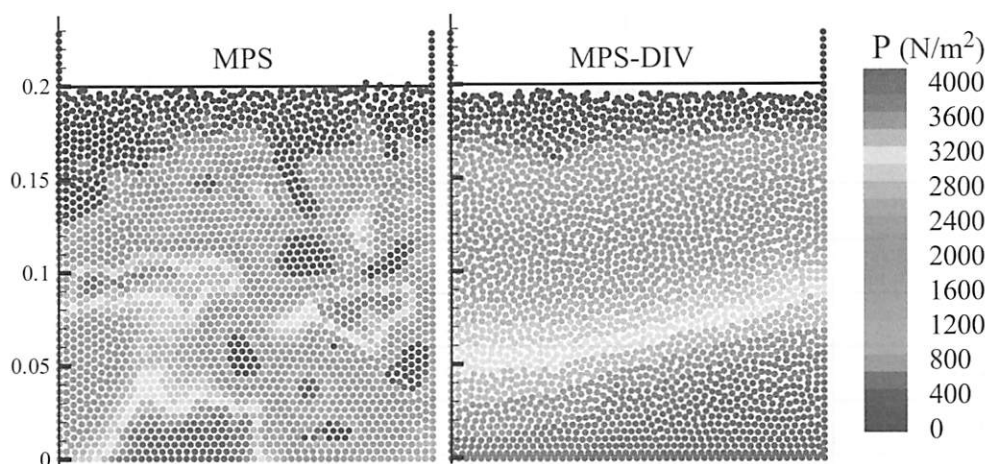


図-9 速度発散型生成項を用いたMPS法による静水状態の計算

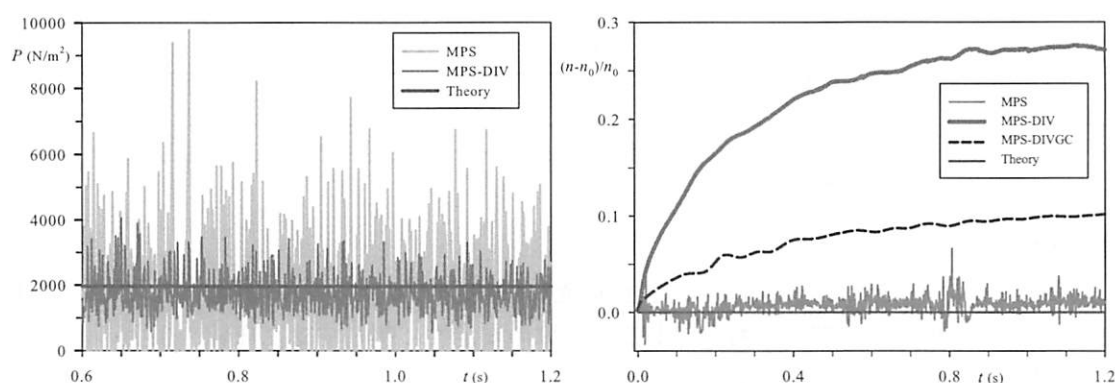


図-10 水底の固定点における圧力および粒子数密度の時系列

ではあるが、体積保存性に大きな欠陥がある。静水状態の計算に関して、速度発散型生成項を用いた MPS 法(図中の MPS-DIV；式 (20) で修正行列を考慮しない場合)と標準 MPS 法の瞬間像(計算開始から約 1.2 秒後)の比較を図-9 に示す。MPS-DIV 法では圧力の擾乱は顕著に低減しているが、初期水位(図中の実線)と比較すると水位低下が明瞭である。図-10 には、タンク中央の水底の固定点における圧力と粒子数密度の時系列を示した。MPS-DIV 法では MPS 法と比較して圧力のスパイクノイズが大幅に低減されているが、僅か 1.2 秒間で水底では 30% に近い圧縮が生じており、体積保存性に重大な欠陥があることは明らかである。一方、標準 MPS 法では圧力のスパイクノイズが大きいですが、粒子数密度は小刻みな変動を呈しつつも標準値からの累積的偏倚はなく、体積保存性は良好と言える。なお、粒子数密度の時系列に関しては、式 (20) で修正行列を考慮した高精度の発散モデルを用いた場合の結果 (MPS-DIVGC) も併示したが、計算開始 1.2 秒後には水底では 10% 程度の圧縮が生じてしまう。以上のように、PPE への速度発散型生成項の導入は、圧力擾乱の低減には効果的ではあるが、半陰解法の長所の 1 つである体積保存性を損なうという代償を払うこととなり、適切な選択肢とは言えない。

4. 高精度粒子法に基づく数値波動水槽

以上述べてきたように、粒子法の高精度化および圧力擾乱の低減に関する様々な改良法が提案されてきたが、これらの改良法は単独ではなく、組み合わせて用いることにより効果は増大する。

表-1 高精度粒子法の性能評価

Method	付加機能・高精度オプション							圧力 擾乱	体積 保存性	安定性		
	弱圧 縮性	運動量 保存性	発散型 生成項	HS	HL	ECS	GC			圧 縮	引 張	
MPS								VH	○ [1%]	○	×	
MPS-WC	○							H	△ [2%]	○	×	
MPS-DIV			○					M	×	[20%]	○	×
MPS-HS				○				M	○ [1%]	○	×	
CMPS		○						M	○ [1%]	○	×	
CMPS-HS		○		○				L	○ [1%]	○	×	
CMPS-HS-HL		○		○	○			VL	○ [1%]	○	×	
CMPS-HS-HL-ECS		○		○	○	○		VL	◎ [0.5%]	○	×	
MPS-HS-HL-ECS-GC				○	○	○	○	VL	◎ [0.5%]	○	○	
MPS-DIVGC			○				○	L	△ [5%]	○	×	

(圧力擾乱 : VH: Very High; H: High; M: Moderate; L: Low; VL: Very low)

4.1 高精度粒子法の最適形

表-1 は、ここで説明してきた手法(表中の「付加機能・高精度オプション」)の効果を実圧擾乱、体積保存性、計算の安定性の3つの観点で整理したものである。計算の安定性に関しては、圧縮、引張の区別も示している。また、体積保存性の欄の[]内の数値は概略の圧縮性のレベルである。この表はMPS法について示しているが、半陰解法型SPH法を対象にするなら、MPSをISPHに読み替えればよい。

はじめにMPS法は、体積保存性には大きな問題はないが、圧力擾乱は極めて大きく、圧力の時系列には後処理としての移動平均処理が不可欠となり、衝撃圧等の動的解析には適用すべきではない。まず、何らかの改善法を単独で使用する場合について述べる。弱圧縮性(-WC)の導入は、圧力擾乱の影響を緩和するが、体積保存性を悪化させる。PPEへの速度発散型生成項(-DIV)の導入は、圧力擾乱の低減には効果があるが、体積保存性を決定的に悪化させるので、不適切と言わざるを得ない。次に、PPEへの高精度生成項(-HS)の導入は圧力擾乱の低減には速度発散型生成項と同程度に効果的であり、さらに体積保存性も標準粒子法と同レベルに高いので、速度発散型生成項の導入と比較すると格段に優れている。また、運動量保存型の粒子法(CMPS法、CISPH法)についても、単独でもHSと同レベルの改善が可能である。さらに、両者を併用したCMPS-HS法は、体積保存性を同程度に保ったまま、圧力擾乱を更に低減できる。CMPS-HS法に高精度Laplacianモデル(-HL)、さらに誤差修正生成項(-ECS)を加えると体積保存性、圧力擾乱の両者について更なる改善が可能である。以上のことから、運動量保存性を保証するタイプの粒子法としては、CMPS-HS-HL-ECS法が最良の選択であると言える。

ところが、先に述べたように標準型の勾配モデルでは、粒子数密度の不均質性が顕著であり、全粒子が圧縮状態にあるモードでは計算が安定しているが、引張状態(すなわち負圧の作用下)では計算が不安定化する。この改善には高精度勾配モデルGCの導入が有効であるが、GCはanti-symmetricではないので、運動量は厳密には保存されない。MPS-HS-HL-ECS-GC法は、CMPS-HS-HL-ECS法が使えない引張状態の解析において、CMPS-HS-HL-ECS法と同レベルの高精度の解を得ることができる手法である。なお、これらの高精度オプションは全て陽的に記述されているので、計算負荷は極めて小さい。CMPS-HS-HL-ECS法あるいは

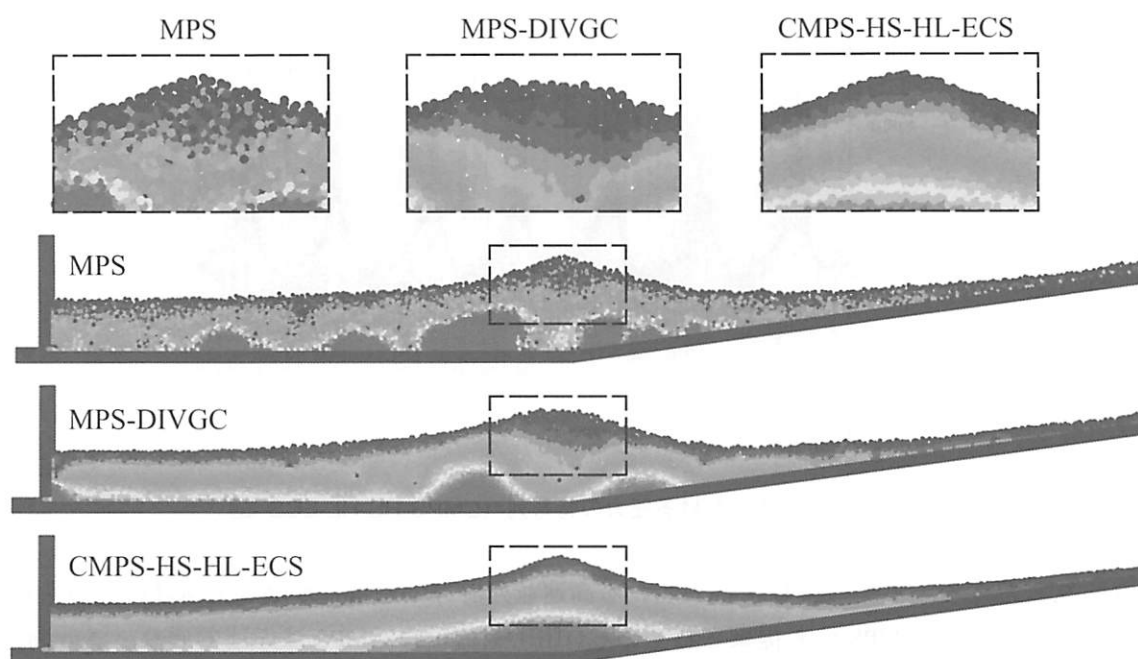


図-11 数値波動水槽への適用（CMPS-HS-HL-ECS 法）

MPS-HS-HL-ECS-GC 法でさえ、標準 MPS 法と比較して 1～2% 程度の計算時間の増加をもたらす程度である。

4.2 数値波動水槽への適用

前節の議論で明らかとなった高精度オプションの最適な組み合わせ CMPS-HS-HL-ECS 法が、標準 MPS 法の解をどの程度改善するのか確認するため、一様斜面上の砕波を対象とした計算例を示したのが、図-11 である。図中には、PPE に高精度の速度発散型生成項を導入した MPS-DIVGC 法も併示している。一見して明らかのように、MPS 法では水中にゼロ圧力粒子（水面粒子）が多数存在し、圧力擾乱の影響は甚大である。一方、CMPS-HS-HL-ECS 法では圧力は明瞭に水深方向に層を成しており、水中のゼロ圧力粒子は全く見られない。MPS-DIVGC 法では、標準 MPS 法と比較すると擾乱の程度は小さくなるが、やはり水中のゼロ圧力粒子が存在し、波の峰の直下の水底付近の圧力が峰の左右より低くなるという非物理的な圧力分布が示されている。

図-12 は、斜面下端付近の水底の固定計測点における圧力の時系列を示している。CMPS-HS-HL-ECS 法のノイズレベルが、標準 MPS 法、MPS-DIVGC 法と比較して格段に小さいことが分かる。

5. 最近の粒子法研究の動向から

本稿では、先端的な研究成果の紹介を交えつつ、高精度粒子法の近年の発展に関して概観した。結びの前に、最近の粒子法の研究動向と今後の展望に関しても少々述べることにしたい。

5.1 SPH 法と MPS 法のボーダレス化

粒子法に興味のある方々はお存じの通り、欧米では SPH 法が主流であるが、非圧縮性流体への本格的展開が SPH 法で始まったのは 1990 年代中頃からであるので、MPS 法が越塚教授によって提案された 1996 年とほぼ同時期である。SPH 法では弱圧縮型の陽解法が使われていたが、その後、2003 年に非圧縮性流体に適用性の高い半陰解法型のアルゴリズムを有する ISPH 法が提案されて、MPS 法と SPH 法のアルゴリズムの

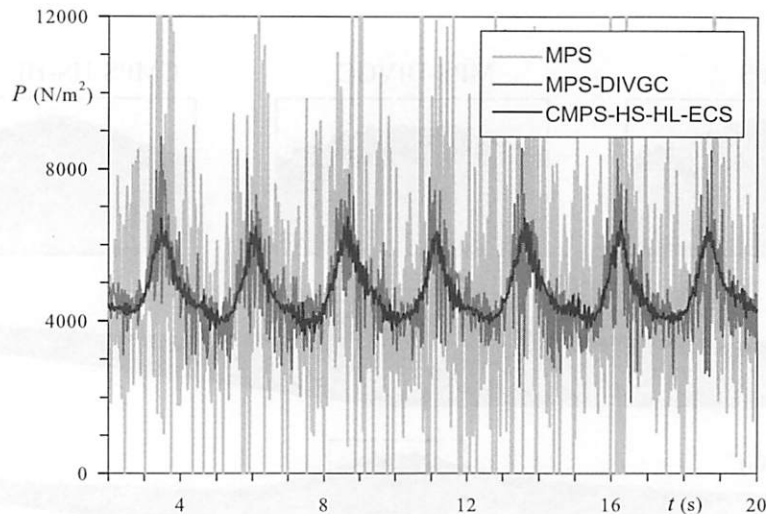


図-12 固定計測点における圧力の時系列 (CMPS-HS-HL-ECS 法)

差はなくなったと言える。また、GPU に代表される高速並列計算に適合性が高い陽解法の利点を積極的に取り込むため、陽解法型の MPS 法も提案されている(山田ら, 2011)。MPS は先述の通り、「Moving Particle Semi-implicit」の省略形であるが、必ずしも半陰解法に限定されなくなった現状から、陽解法も包括することを念頭に、提唱者の越塚教授自身によって「Moving Particle Simulation」と再定義されている。

粒子法の高精度化に関しては、本稿で紹介した通り、MPS 法と SPH 法の区別はほとんどないと言ってよい。高精度生成項 (-HS) は MPS 法と SPH 法の kernel 関数の定義によって形式が異なることはあるが、基本形は両手法に共通している。高精度 Laplacian, 高精度の圧力勾配などはベクトル微分演算の数学的定義を起点として導出されるので、オリジナルの演算子モデルを使う場合を MPS 法あるいは SPH 法と呼ぶなら、もはや何れでもない新しい手法ということになるだろう。つまり、現時点で既に MPS 法か SPH 法かといった区別そのものがあまり意味がないと言える。

5.2 半陰解法の復権

近年の粒子法理論の研究動向で注目すべき点は、半陰解法の復権である。SPHERIC(SPH European Research Interest Community) については、SPH 法のオープンソースコード SPHysics(SPH Free-surface Flow Solver)の開発者グループが主たる活動の場としているので、ご存じの方も少なくないだろう。SPHERIC は 2006 年から毎年、SPH Workshop を開催しており、粒子法の最新研究成果が発表される。今年の Workshop は 5 月に Italy の Prato で開催され、59 編の研究発表が行われた。

研究発表は計算理論から応用まで多岐にわたっているが、14 編の論文で陽解法・半陰解法の適用性に関連する議論が行われている。陽解法に関するものは 8 編であるが、内 3 編が Riemann Solver を用いる Godunov 型 SPH 法(Inutsuka, 2002)に関するもの、残りの 5 編は、SPH 法への Diffusive term(拡散項)の導入に関するものである。陽解法では、非物理的な人工粘性の導入を回避するために種々の方法が試みられているが、「必要最低限度の非物理粘性を導入する」との説明が成される Godunov 型 SPH 法を含めて、全ての方法が何らかの非物理的ダンピング要素を導入して計算を安定化している。

一方、半陰解法 (ISPH 法, MPS 法)に関する論文は 6 編であり、陽解法と数の上では拮抗している。半陰解法では、非物理的な人工粘性やその他のダンピング要素を一切導入することなく、安定した解が得られる。以前には圧力擾乱の存在故に計算理論の研究者にはあまり注目されなかったが、高精度粒子法の研究が急速に進展し、状況は大きく変化しつつある。特に、先述の CMPS-HS-HL-ECS 法, MPS-HS-HL-ECS-GC 法では、高精度オプションの導入に伴うモデル定数の増加は一切なく、パラメータのチューニングに煩わされること

もない。半陰解法は並列化には不向きと言われるが、陽解法と比較すると計算時間間隔は 100 倍粗く設定できる。行列解法の負荷を考慮しても、単一 CPU を使った計算では半陰解法は陽解法より 10 倍程度は速い。さらに半陰解法でも GPU 並列化の研究(例えば, Horiら, 2011)も進んでおり、高速化率は陽解法には及ばないものの、並列化前のアドバンテージを含めて考えれば、両手法の並列化後の速度はほぼ互角だろう。少々雑駁な申しようではあるが、半陰解法には十分な将来性があると言える。

6. おわりに

著者の研究グループで粒子法に取り組むようになって 15 年が経過した。著者は 2007 年に水工学に関する夏期研修会講義集に執筆の機会を頂いて、約 10 年間の研究軌跡を振り返りつつ、その当時の研究現況をまとめた。研究開始当初には、MPS 法の提唱者である東京大学の越塚誠一先生に多くの貴重なご示唆を頂いた。東大で開催される粒子法研究会では著者の研究グループからも毎年、研究成果を報告しており、研究交流を継続させて頂いている。また、著者の研究グループ内の粒子法研究では、Abbas Khayyer 博士(京都大学講師)、五十里洋行博士(京都大学助教)、Shao Songdong 博士(Univ. of Bradford 上級講師)が大きな役割を担っている。ここに記して謝意を表したい。

2007 年以降の 5 年間には、高精度粒子法という新たな研究の柱を得て、粒子法研究のテーマがそれ以前よりも基礎的な方向にも拡大した。高精度粒子法に関しては、Khayyer 博士の熱意溢れる取り組みに依るところが極めて大きい。また末筆ながら、本稿の執筆の機会をお与え頂いた北海道大学准教授・渡部靖憲先生、第 2・3 期数値波動水槽研究小委員長として数値波動力学のレビュー活動を主導頂いた東京海洋大学教授・岡安章夫先生にお礼を申し上げる。

参考文献

- 越塚誠一 (2005): 粒子法, 丸善, p.144.
- 越塚誠一 (2008): 粒子法シミュレーション, 培風館, p.179.
- 後藤仁志 (2007): 粒子法による数値波動水槽の構築, 水工学に関する夏期研修会講義集, 07-B-3, 土木学会, B-3-1-20.
- 山田祥徳・酒井幹夫・水谷 慎・越塚誠一・大地雅俊・室園浩司 (2011): Explicit-MPS 法による三次元自由液面流れの数値解析, 日本原子力学会和文論文誌, Vol.10, No.3, pp.185-193.
- 数値波動水槽研究小委員会編 (2012): 数値波動水槽-砕波波浪計算の深化と耐波設計の革新を目指して-, 土木学会, p.228.
- Antuono M., Colagrossi A., Marrone S. and Molteni D. (2010): Free-surface flows solved by means of SPH schemes with numerical diffusive terms, *Computer Physics Communications*, 181(3), pp. 532-549.
- Belytschko T. and Xiao S.P. (2002): Stability analysis of particle methods with corrective derivatives, *Computers and Mathematics with Applications*, 43, 329-350.
- Bonet, J. and Lok, T. S. (1999): Variational and momentum preservation aspects of smooth particle hydrodynamic formulation. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 180, pp.97-115.
- Chen J.K., Beraun J.E. and Jih C.J. (1999): An improvement for tensile instability in smoothed particle hydrodynamics, *Comput. Mech.*, 23, pp.279-287.
- Colagrossi A., and Landrini, M. (2003): Numerical simulation of interfacial flows by smoothed particle hydrodynamics, *Journal of Computational Physics*, 191(2), pp.448-475.
- Cooker, M.J., Peregrine, D.H.(1992): Wave impact pressures and its effect upon bodies lying on the sea bed. *Coastal Engineering* 18 (3-4), pp.205-229.
- Dilts G.A.(1999): Moving least squares hydrodynamics: Consistency and stability, *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 44, pp.1115-1155.
- Fries T.P. and Belytschko T. (2008): Convergence and stabilization of stress-point integration in mesh-free and particle methods, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 74, pp.1067-1087.
- Gotoh H. (2009): Lagrangian Particle Method as Advanced Technology for Numerical Wave Flume, *International Journal of Offshore and Polar Engineering*, 19(3), pp.161-167.

- Gotoh H., Ikari H., Memita T. and Sakai T. (2005): Lagrangian particle method for simulation of wave overtopping on a vertical seawall, *Coast. Eng. J.*, 47, pp.157-181.
- Gotoh H. and Sakai T. (2006): Key issues in the particle method for computation of wave breaking, *Coastal Engineering*, 53, pp.171-179.
- Gray, J.P., Monaghan J.J. and Swift R.P. (2001): SPH elastic dynamics, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 190, pp.6641-6662.
- Hattori M., Arami A. and Yui, T. (1994): Wave impact pressure on vertical walls under breaking waves of various types. *Coastal Engineering* 22 (1-2), pp.79-114.
- Hori, C., Gotoh, H., Ikari, H. and Khayyer, A. (2011): GPU-acceleration for Moving Particle Semi-Implicit Method, *Computers and Fluids*, Vol. 51, Issue 1, pp. 174-183.
- Hu X.Y. and Adams, N.A. (2009): A constant-density approach for incompressible multi-phase SPH, *Journal of Computational Physics*, 228(6), pp.2082-2091.
- Inutsuka S. (2002): Reformulation of Smoothed Particle Hydrodynamics with Riemann Solver, *Journal of Computational Physics*, 179, pp. 238-267.
- Khayyer A. and Gotoh H. (2008): Development of CMPS method for accurate water-surface tracking in breaking waves, *Coast. Eng. J.*, 50(2), pp.179-207.
- Khayyer A. and Gotoh H. (2009): Modified Moving Particle Semi-implicit methods for the prediction of 2D wave impact pressure, *Coastal Engineering*, 56, pp.419-440.
- Khayyer A. and Gotoh H. (2010): A Higher Order Laplacian Model for Enhancement and Stabilization of Pressure Calculation by the MPS Method, *Applied Ocean Research*, 32(1), pp.124-131.
- Khayyer A. and Gotoh H. (2011): Enhancement of Stability and Accuracy of the Moving Particle Semi-implicit Method, *Journal of Computational Physics*, 230, pp.3093-3118.
- Khayyer A., Gotoh H. and Shao S.D. (2008): Corrected Incompressible SPH method for accurate water-surface tracking in breaking waves, *Coastal Engineering*, 55(3), pp.236-250.
- Khayyer A., Gotoh H. and Shao S.D. (2009): Enhanced predictions of wave impact pressure by improved incompressible SPH methods, *Applied Ocean Research*, 31(2), pp.111-131.
- Kishev Z.R., Hu C. and Kashiwagi M. (2006): Numerical simulation of violent sloshing by a CIP-based method, *Journal of Marine Science and Technology*, 11(2), pp.111-122.
- Kondo M. and Koshizuka S. (2011): Improvement of Stability in Moving Particle Semi-implicit method, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 65, pp.638-654.
- Kondo M., Suzuki Y. and Koshizuka S. (2010): Suppressing local particle oscillations in the Hamiltonian particle method for elasticity, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 81(12), pp.1514-1528.
- Koshizuka S. and Oka Y. (1996): Moving particle semi-implicit method for fragmentation of incompressible fluid, *Nuclear Science and Engineering*, 123, pp.421-434.
- Koshizuka S., Ikeda H. and Oka, Y. (1999): Numerical analysis of fragmentation mechanisms in vapor explosions, *Nuclear Engineering and Design*, 189, pp.423-433.
- Li, Y. and Raichlen, F. (2003): Energy balance model for breaking solitary wave runup. *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering*, 129(2), pp.47-59.
- Lucy L. B. (1977): A numerical approach to the testing of the fission hypothesis. *Astron. J.*, 82, pp.1013-1024.
- Molteni D. and Colagrossi A. (2009): A simple procedure to improve the pressure evaluation in hydrodynamic context using the SPH, *Computer Physics Communications*, 180(6), pp.861-872.
- Monaghan, J. J. (1992): Smoothed particle hydrodynamics. *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* 30, pp.543-574.
- Monaghan, J. J. (1994): Simulating free surface flows with SPH. *Journal of Computational Physics*, 110, pp.399-406.
- Monaghan, J.J. (2000): SPH without a tensile instability, *Journal of Computational Physics*, 159(2), pp.290-311.
- Monaghan, J. J. (2005): Smoothed particle hydrodynamics, *Reports on Progress in Physics*, 68, pp.1703-1759.
- Oger G., Doring M., Alessandrini B. and Ferrant P. (2007): An improved SPH method: Towards higher order convergence, *Journal of Computational Physics*, 225(2), pp.1472-1492.
- Shao, S. D. and Lo, E. Y. M. (2003): Incompressible SPH method for simulating Newtonian and non-Newtonian flows with a free surface. *Advanced Water Resources*, 26 (7), pp.787-800.
- Shibata, K., Koshizuka, S. (2007): Numerical analysis of shipping water impact on a deck using a particle method. *Ocean Engineering* 34, pp.585-593.