

水工学シリーズ 12-B-3

セミラグランジュ的移流計算法

－ CIP 法などセミラグランジュ計算の基礎，今後の展開－

広島大学 大学院 工学研究院

陸田 秀実

土木学会
水工学委員会・海岸工学委員会

2012 年 8 月

セミラグランジュ的移流計算法
～CIP 法などセミラグランジュ計算の基礎、今後の展開～

Numerical Technique for Advection Term Using Semi-Lagrange Method
～ Basic of Semi-Lagrange Method and its Application to Fluid Structure Interaction ～

陸 田 秀 実
Hidemi MUTSUDA

1. はじめに

複雑な固気液相互作用問題では、物性値（例えば、密度や粘性係数）の異なる物体が混在し、かつ、それらが各々の構成方程式にしたがって、運動・変形している。例えば、海岸工学では、波と構造物の相互作用問題が考えられる。構造物が周りの波浪場から流体力を受け、変形し、またその反作用によって、波の変形が繰り返行われるため、計算力学分野において最も取り扱いが困難な課題と言えよう。これまでに、流体と構造物（弾性体など）の相互作用を取り扱う方法として、1977年にPeskinら開発したIB法[1]、FDMとFEMとのハイブリッド計算法等[2]が種々提案され、海岸工学分野においても数多く適用されている。

一方、砕波などの自由表面の大変形問題を取り扱える手法として、固定メッシュにおける界面追跡法（オーラー表現に基づく移流計算スキーム）は、90年代前後に積極的に研究され、例えば、Front-Tracking法、VOF法、Level-Set法、CIP法などの計算法が開発されてきた。これらの計算法では、固定したメッシュ上に識別変数（＝判別変数）を導入することが多い。例えば、Front-Tracking法の場合は粒子、VOF法の場合はVOF関数、Level-Set法の場合は距離関数と呼ばれる識別変数がそれぞれ定義されている。このことは、メッシュを移動させることなく、自由表面などの移動境界面を識別変数の情報から逐次計算で求めるため、計算効率とロバスト性の両者に対して優位である必要があることを意味している。しかしながら、数値的な拡散や散逸誤差によって、自由表面が拡散・変形（時間発展とともに界面がぼやける現象）するため、実際には様々な工夫を施す必要がある。例えば、VOF法では移流計算後に境界面の再構築、Level-Set法では距離関数の再初期化など、いわゆる、移流計算後の修正プロセスが必要となり、現在においても数多くの研究が行われている。また、界面境界層付近の計算精度を向上させる研究も未だ発展途上の段階にある。

以上示したように、海岸工学に関連する自由表面問題および固気液相互作用問題を数値流体力学的アプローチによって解く計算法は、膨大な既往研究の積み重ねによって発展してきたものである。したがって、種々の計算法の利点・欠点を十分理解した上で、それらを使用・活用することが極めて重要となる。また、このことなくして、当該分野に適合した計算法の今後の発展はあり得ないため、基本に立ち返る機会や時間を意識的に作ることを常に心がける必要があろう。

本稿では、まず始めにオイラー法とラグランジュ法の混合法であるセミラグランジュ法による移流計算法について基礎的な解説を行う。次いで、セミラグランジュ法の代表的な計算法である CIP 法[3,4]の基礎を解説するとともに、ここから派生した高精度な CIP 法を紹介する。さらに、格子法と粒子法のメリットを融合させたオイラー・ラグランジュ型の自由表面追跡法を紹介する。現在では、オイラー型解法である界面追跡法とラグランジュ型解法である粒子法を組み合わせた新しいタイプのオイラー・ラグランジュ型スキームが数多く提案されるようになってきている。ここでは、筆者が開発してきた Lagrange 粒子付 Euler 型スキームを解説するとともに、種々の固気液相互作用問題への適用例について紹介する。

2. セミラグランジュ法の基礎

2.1 セミラグランジュ法とは

オイラー法(Eulerian) は、時刻 t_n と t_{n+1} の 2 時刻の空間座標をともに同じ格子点に固定する方法である (図-1(a))。空間に固定した格子点を用いるため、流れ場全体において均一な空間解像度で解が得られるため、安定な計算が可能である。その一方で、有限な格子サイズに関係した局所的な数値拡散 (誤差) が発生することや時間刻みの制約 (CFL 条件) があることが問題として挙げられる。

ラグランジュ法(Lagrangian)は、座標系が流れとともに移動する粒子にしたがって変化する (図-1(b))。この粒子の移動は流速によって定められるため、粒子の出発点と終着点は一意的に決定できる。そのため、オイラー法で問題となる数値拡散の問題はない。その一方で、粒子配置が流れ場によって不均一になることや粒子の再配置操作が必要になることが問題として挙げられる。

セミラグランジュ (Semi-Lagrange) 法は、オイラー法とラグランジュ法が混合した方法である (図-1(c))。この方法は、粒子追跡の終着点 が常に格子点になるように考える。例えば、粒子の出発点 x_1 と終着点 x_2 と定義すると、

$$x_1 = x_2 - \int_{t_n}^{t_{n+1}} u(x, t) dt \quad (2.1)$$

となる。すなわち、 x_1 は以下の初期値問題の解として求めることになる。

$$\begin{cases} x(t=0) = x_2 \\ \frac{dx}{dt} = -u(x, t) \end{cases} \quad (2.2)$$

このように、セミラグランジュ法は、流れ場の軌跡に基づく解法である。ここで重要なことは、終着点 x_2 は必ず格子点上に存在するが、出発点 x_1 は流れ場によって格子点上にあるとは限らないということである。したがって、何らかの方法 (具体的には空間補間) によって、出発点 x_1 を求める必要がある。

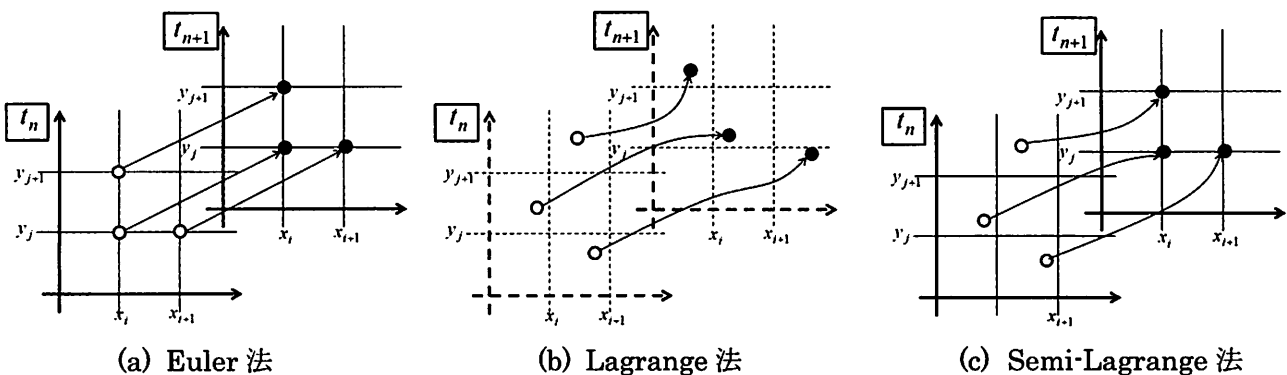


図-1 時空間座標における各手法のイメージ図

一例として、以下のような 1 次元移流方程式を考える。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad (2.3)$$

ここで、 ϕ は物理量とする。格子点 x_i における n 時刻目の物理量の値 ϕ_i^n を既知とする。セミラグランジュ的な解を用いると、 $n+1$ 時刻目の物理量の値 ϕ_i^{n+1} を求めるために、まず格子点 x_i の Δt 時間遡った時の上流点の場所 $x_i + \xi$ を求めることになる。そもそも ξ は、 $\Delta t = t^{n+1} - t^n$ (計算刻み) 間の流速 u による移動量であり、以下の初期値問題によって求めることができる。

$$\begin{cases} \xi(t=0)=0 \\ \frac{d\xi}{dt}=-u(x_i+\xi,t) \end{cases} \quad (2.4)$$

これを解くための計算法として、様々な時間積分法（例えば、Euler の前進差分、ルンゲクッタ、フラクショナルステップ等）があるが、その際に、流速 u についての補間が必要になる。例えば、1 次精度の場合、 $\xi=-u(x_i,t)\Delta t$ となる。したがって、 $x_i+\xi$ が格子点 x_{i-1} と x_i の区間にあるとすると、 ϕ_i^{n+1} は以下ようになる。

$$\phi_i^{n+1}=F_i(x_i+\xi) \quad (2.5)$$

ここで、 F_i は 2 つの格子点間における物理量 ϕ_i^n の情報（プロファイル＝物理量やその変化量など）を保持した補間関数である。このことから、この補間関数 F の選定によって計算精度が決まってしまうことが分かる。

例えば、線形補間（＝直線近似）を用いれば 1 次風上差分となり、数値拡散が顕著に現れる。この線形補間の代わりに 2 次関数を用いれば Leith 法、Lax-Wendroff 法となり、数値拡散を抑制することが出来る。そこで、高次精度の補間関数を用いれば精度は向上するが、計算負荷が増してしまうことを考慮して、以下の 3 次多項式が用いられることが多い。

$$F(x)=c_0+c_1(x-x_i)+c_2(x-x_i)^2+c_3(x-x_i)^3 \quad (2.6)$$

なお、係数 c の決定に際してはラグランジュ補間やエルミート補間が用いられる。ラグランジュ補間を用いる場合は物理量のみを用いた補間関数になる。また、エルミート補間を用いる場合は物理量と微分値を用いた補間方法となる。一般的には、2 次以上の多項式を用いた場合、数値解の不連続な領域において数値振動が発生する。そのため、1 次線形補間と高精度補間を組み合わせた方法なども開発されている。なお、従来のセミラグランジュ法では、補間関数を決定する際に、既知の物理量 ϕ_i^n のみを用いる場合が多い。このように補間区間（流速の向きに依存）が分かれば、オイラー型陽解法で課される CFL 条件に制約されることなく、格子幅を超えた移動量 ξ を安定に計算することが可能となる。なお、セミラグランジュ法による分散誤差は少ないと言えるが、補間方法の選択によっては、数値拡散が生じることがあるし、物理量の保存は保証されないことが既に分かっている[5]。

後節で紹介する CIP 法は、エルミート補間を用いるが、物理量の 1 階微分値 $\partial\phi_i^n/\partial x$ の求め方において、従来法とは大きく異なっている。具体的には、CIP 法では 1 階微分値 $\partial\phi_i^n/\partial x$ も変数として取扱い、時間発展計算を行う。このことが、数値拡散＝物理情報の欠落＝プロファイルの損失・なまりを大幅に改善することにつながっている。詳しくは、次節で紹介する。

2.2 セミラグランジュ法と界面追跡法

a) CIP 法

状態量の空間 1 階微分を変数として持たせることで、2 つの離散点の情報のみから、3 次精度差分スキームを構築することが出来るのが CIP 法である。CIP 法は Yabe ら[3,4] によって開発された方法で、Cubic Interpolated Pseudo Particle もしくは Constrained Interpolation Profile の略称である。

この方法の最大の特徴は、離散点間を移流する状態量 ϕ の形状のみならず、その変化量さえも方程式を満足するように離散式を構成している点である（図-2 参照）。

例えば、以下に示す 1 次元移流方程式

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}+u\frac{\partial\phi}{\partial x}=0 \quad (2.7)$$

を x について微分すると、

$$\frac{\partial\phi'}{\partial t}+u\frac{\partial\phi'}{\partial x}=-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\phi' \quad (2.8)$$

となる。ここで ϕ' は微分値 $\frac{\partial\phi}{\partial x}$ を表す。移流速度 u が一定の場合は、 $\frac{\partial u}{\partial x}=0$ となり、

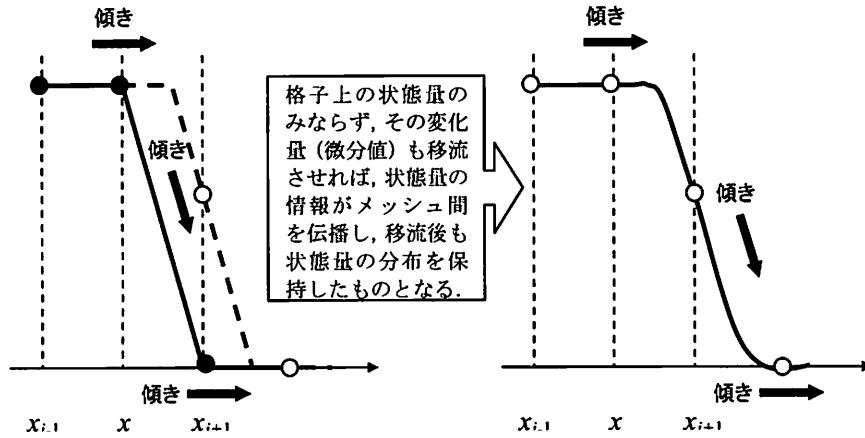


図-2 CIP法の原理図

右辺はゼロとなり，式(2.7)と式(2.8)は一致する．つまり，状態量 ϕ の微分値 $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ が移流速度 u で空間を伝播することを意味している．したがって，式(2.7)と式(2.8)の両者を用いれば，離散点間を移流する状態量 ϕ の形状やその変化量を方程式に基づいて時間発展することが可能となる．

次に，対象とする空間に存在する任意の状態量 ϕ の分布形をエルミート・スプライン補間を利用して，以下の3次多項式で表す．

$$F_i(x) = a_i(x-x_i)^3 + b_i(x-x_i)^2 + c_i(x-x_i) + d_i \quad (2.9)$$

ここで，隣り合う離散点で与えられた2つの状態量 ϕ_i, ϕ_{i-1} とそれらの微分値 ϕ'_i, ϕ'_{i-1} から以下の関係式を用いて4つの係数 a_i, b_i, c_i, d_i を求めることを考える．ここでは，以下の条件を使用する．

$$\begin{aligned} F_i(x_i) &= d_i = \phi_i \\ \frac{dF_i(x_i)}{dx} &= c_i = \phi'_i \\ F_i(x_{i-1}) &= -a_i\Delta x^3 + b_i\Delta x^2 - c_i\Delta x + d_i = \phi_{i-1} \\ \frac{dF_i(x_{i-1})}{dx} &= 3a_i\Delta x^2 - 2b_i\Delta x + c_i = \phi'_{i-1} \end{aligned} \quad (2.10)$$

これらの条件を使うと，以下のように，残りの係数 a_i, b_i を決定することができる．

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{\phi'_i + \phi'_{i-1}}{\Delta x^2} - \frac{2(\phi_i - \phi_{i-1})}{\Delta x^3} \\ b_i &= -\frac{3(\phi_i - \phi_{i-1})}{\Delta x^2} + \frac{2\phi'_i + \phi'_{i-1}}{\Delta x} \end{aligned} \quad (2.11)$$

次時刻 $n+1$ ステップ目の値は，3次多項式(2.9)で表現された分布関数 $F(x)$ を $u\Delta t$ だけ移動したものととして， $\phi^{n+1} = F(x-u\Delta t)$ ， $(\phi')^{n+1} = dF(x-u\Delta t)/dx$ で与えられる．つまり，以下のような差分スキームが得られ，時間発展計算が可能となる．

$$\begin{aligned} \phi_i^{n+1} &= -a_i(u\Delta t)^3 + b_i(u\Delta t)^2 - (\phi'_i)^n(u\Delta t) + \phi_i^n \\ (\phi'_i)^{n+1} &= 3a_i(u\Delta t)^2 - 2b_i(u\Delta t) + (\phi'_i)^n \end{aligned} \quad (2.12)$$

この差分スキームは，同じ3次精度差分スキームであるK-Kスキーム（4点利用）やQUICKESTスキーム（5点利用）に比べて，小さい空間（2点利用）でコンパクトに同精度の差分式を構築できるため，非常に優れた差分法として幅広い分野で利用されている．その一方で，フラックスにおいて非保存であること，多次元問題において変数（微係数）が増えること，境界条件の設定方法が煩雑になること等が問題となる．

次に、2次元および3次元において、CIP法で用いられる補間関数およびその微係数を以下に示す。

対象とする2次元空間に存在する点 $(i,j), (i,j+1), (i+1,j+1), (i+1,j)$ で囲まれた格子内の任意の状態量 ϕ の分布形について、エルミート・スプライン補間を利用すると、以下の3次多項式で表すことが出来る。なお、簡単のために格子サイズは $\Delta x, \Delta y$ で一定とし、また $u < 0, v < 0$ の場合について示す。

$$F_{i,j}(x,y) = [(A1_{i,j} + A2_{i,j}Y + A3_{i,j})X + A4_{i,j}Y + \partial_x \phi_{i,j}]X \\ + [(A5_{i,j}Y + A6_{i,j}X + A7_{i,j}) + \partial_y \phi_{i,j}]Y + \phi_{i,j} \quad (2.13)$$

ここで、 $X = x - x_{i,j}$ 、 $Y = y - y_{i,j}$ である。また、これらの微係数は以下の通りである。

$$A1_{i,j} = [-2d_i + \partial_x(\phi_{i+1,j} + \phi_{i,j})\Delta x] / \Delta x^3 \\ A2_{i,j} = [A8_{i,j} - \partial_x d_j \Delta x] / \Delta x^2 \Delta y \\ A3_{i,j} = [3d_i - \partial_x(\phi_{i+1,j} + 2\phi_{i,j})\Delta x] / \Delta x^2 \\ A4_{i,j} = [-A8_{i,j} + \partial_x d_j \Delta x + \partial_y d_i \Delta y] / \Delta x \Delta y \\ A5_{i,j} = [-2d_j + \partial_y(\phi_{i,j+1} + \phi_{i,j})\Delta y] / \Delta y^3 \\ A6_{i,j} = [A8_{i,j} - \partial_y d_i \Delta y] / \Delta x \Delta y^2 \\ A7_{i,j} = [3d_j - \partial_y(\phi_{i,j+1} + 2\phi_{i,j})\Delta y] / \Delta y^2 \\ A8_{i,j} = \phi_{i,j} - \phi_{i+1,j} - \phi_{i,j+1} + \phi_{i+1,j+1} \quad (2.14)$$

ここで、 $d_i = \phi_{i+1,j} - \phi_{i,j}$ と $d_j = \phi_{i,j+1} - \phi_{i,j}$ である。

対象とする3次元空間に存在する点 $(i+1,j,k), (i,j+1,k), (i,j,k+1), (i+1,j+1,k), (i,j+1,k+1), (i+1,j,k+1), (i+1,j+1,k+1)$ で囲まれた格子内の任意の状態量 ϕ の分布形について、エルミート・スプライン補間を利用すると、以下の3次多項式で表すことが出来る。

$$F_{i,j,k}(x,y,z) = [(B1_{i,j,k}X + B2_{i,j,k}Y + B3_{i,j,k}Z + B4_{i,j,k})X + B5_{i,j,k}Y + \partial_x \phi_{i,j,k}]X \\ + [(B6_{i,j,k}Y + B7_{i,j,k}Z + B8_{i,j,k}X + B9_{i,j,k})Y + B10_{i,j,k}Z + \partial_y \phi_{i,j,k}]Y \\ + [(B11_{i,j,k}Z + B12_{i,j,k}X + B13_{i,j,k}Y + B14_{i,j,k})Z + B15_{i,j,k}X + \partial_z \phi_{i,j,k}]Z \\ + B16_{i,j,k}XYZ + \phi_{i,j,k} \quad (2.15)$$

ここで、 $X = x - x_{i,j,k}$ 、 $Y = y - y_{i,j,k}$ 、 $Z = z - z_{i,j,k}$ である。また、これらの微係数は、 $u < 0, v < 0, w < 0$ の場合、以下の通りである。

$$\begin{aligned}
B1_{i,j,k} &= [-2D_j + \partial_x(\phi_{i+1,j,k} + \phi_{i,j,k})\Delta x] / \Delta x^3 \\
B2_{i,j,k} &= -[B17_{i,j,k} + \partial_x D_j \Delta x] / \Delta x^2 \Delta y \\
B3_{i,j,k} &= -[B18_{i,j,k} + \partial_x D_k \Delta x] / \Delta x^2 \Delta z \\
B4_{i,j,k} &= [3D_j - \partial_x(\phi_{i+1,j,k} + 2\phi_{i,j,k})\Delta x] / \Delta x^2 \\
B5_{i,j,k} &= [B17_{i,j,k} + \partial_x D_j \Delta x + \partial_y D_j \Delta y] / \Delta x \Delta y \\
B6_{i,j,k} &= [-2D_j + \partial_y(\phi_{i,j+1,k} + \phi_{i,j,k})\Delta y] / \Delta y^3 \\
B7_{i,j,k} &= -[B19_{i,j,k} + \partial_y D_k \Delta y] / \Delta y^2 \Delta z \\
B8_{i,j,k} &= -[B17_{i,j,k} + \partial_y D_j \Delta y] / \Delta x \Delta y^2 \\
B9_{i,j,k} &= [3D_j - \partial_y(\phi_{i,j+1,k} + 2\phi_{i,j,k})\Delta y] / \Delta y^2 \\
B10_{i,j,k} &= [B19_{i,j,k} + \partial_y D_k \Delta y + \partial_z D_j \Delta z] / \Delta y \Delta z \\
B11_{i,j,k} &= [-2D_k + \partial_z(\phi_{i,j,k+1} + \phi_{i,j,k})\Delta z] / \Delta z^3 \\
B12_{i,j,k} &= -[B18_{i,j,k} + \partial_z D_i \Delta z] / \Delta x \Delta z^2 \\
B13_{i,j,k} &= -[B19_{i,j,k} + \partial_z D_j \Delta z] / \Delta y \Delta z^2 \\
B14_{i,j,k} &= [3D_k - \partial_z(\phi_{i,j,k+1} + 2\phi_{i,j,k})\Delta z] / \Delta z^2 \\
B15_{i,j,k} &= [B18_{i,j,k} + \partial_z D_i \Delta z + \partial_x D_k \Delta x] / \Delta x \Delta z \\
B16_{i,j,k} &= [B17_{i,j,k} + \phi_{i,j,k+1} - (\phi_{i,j+1,k+1} + \phi_{i+1,j,k+1}) + \phi_{i+1,j+1,k+1}] / \Delta x \Delta y \Delta z \\
B17_{i,j,k} &= -\phi_{i,j,k} + \phi_{i+1,j,k} + \phi_{i,j+1,k} - \phi_{i+1,j+1,k} \\
B18_{i,j,k} &= -\phi_{i,j,k} + \phi_{i+1,j,k} + \phi_{i,j,k+1} - \phi_{i+1,j,k+1} \\
B19_{i,j,k} &= -\phi_{i,j,k} + \phi_{i,j+1,k} + \phi_{i,j,k+1} - \phi_{i,j+1,k+1}
\end{aligned} \tag{2.16}$$

ここで、 $D_i = \phi_{i+1,j,k} - \phi_{i,j,k}$ 、 $D_j = \phi_{i,j+1,k} - \phi_{i,j,k}$ 、 $D_k = \phi_{i,j,k+1} - \phi_{i,j,k}$ である。なお、 $u \geq 0$ の場合、 $i+1$ は $i-1$ 、 Δx は $-\Delta x$ に書き換え、 $v \geq 0$ の場合、 $j+1$ は $j-1$ 、 Δy は $-\Delta y$ に書き換え、 $w \geq 0$ の場合、 $k+1$ は $k-1$ 、 Δz は $-\Delta z$ に書き換える必要がある。

b) CIP 法の発展

CIP 法は様々なバージョンが開発されている。現在では、M 型 CIP、C 型 CIP、その高精度展開を行った IDO 法[5]、完全保存保証型セミラグランジュ法[7][8]として CIP-CSL4、CIP-CSL2、RCIP-CSL、さらには、CIP-Digitizer 法[9]、CIP ソロバン格子[10]、CIP-Multi Moment FVM[11]法など、数多くの方法が存在する。

例えば、CIP-Digitizer 法は、境界面における数値拡散を減らしつつ計算効率を向上させた方法であり、極めて簡便な精度向上の一例と言える。CIP-Digitizer 法では CIP 法に関数変換（例えば、 $\tan$ 関数）を加え、変換された空間分布に対して CIP 法による移流計算を行う。これによって、移動境界面の厚みを薄く維持することが出来る。このため、複雑境界にも適用可能である。しかしながら、界面にメッシュサイズスケールのノイズが発生する場合があるため、なんらかの平滑化や Level-Set 関数との併用を行う研究例もある。また、密度関数の保存性を維持できないという問題もある。なお、これらの問題を解消する簡便な方法として、C3VOF 法[12]、THINC スキーム[13]、STAA 法[14]などが開発されている。

また、移動ソロバン格子による CIP 法を使用した場合、密度関数の空間勾配の大きい場所、すなわち、界面付近に集中的に格子を配置することが可能となる。一例を図-3.4 に示す。自由表面流体解析のように非定常に界面が大変形する場合、時々刻々と変化する密度界面近傍（＝自由表面境界層を分解する程度）に応じて、ソロバン格子を自動的に生成し、逐次計算を行うことが可能となる。非定常に自由表面境界層に格子を集中させることが可能となる点において、本手法は有用な方法と考えられる。現在では、skimmer（水切り現象）[15]

や航行船舶の運動シミュレーション[16]などに適用されている。

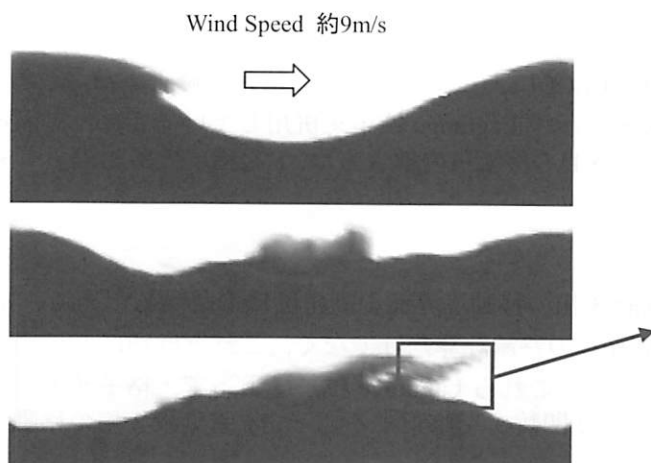


図-3 風波による砕波現象のシミュレーション結果（密度関数表示）

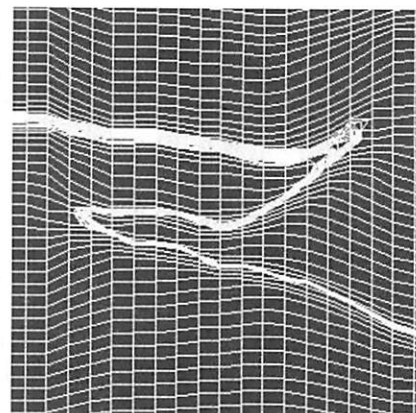


図-4 ジェット放出エリアにおけるソロバン格子(鉛直方向のみに適用した場合)

なお，CIP 法については解説本[17]が刊行されている．大変平易な書き方がされているため，読み物として面白く一気に読めてしまう．初歩から学びたい方，もう 1 度基本に立ち返りたい方には，大変お薦めの良本である．

3. オイラー・ラグランジュ型スキーム（格子と粒子のハイブリッド型）

本章では，格子法と粒子法のメリットを融合させた，いわばオイラー・ラグランジュ型の自由表面追跡法について説明を行う．近年，Euler型の界面追跡法とLagrange型の粒子法を組み合わせた新しいタイプのオイラー・ラグランジュ型スキームが数多く提案されるようになってきている．例えば，オリジナルのLevel Set法をベースとして，界面の両サイドに半径の異なる多数の粒子を配置することで，界面追跡精度を大幅に向上させたParticle Level Set法[18]，SPH法とParticle Level set法を2-way couplingさせた方法[19]などが挙げられる．陸田ら[20-23]は，界面の片側サイドにのみ同一径の粒子を配置するとともに，SPH法との組み合わせによって，移流誤差と計算負荷を大幅に低減させたLagrange粒子付Euler型スキームを提案している．Ishiiら[24][25]は界面近傍にのみ粒子を配置し，格子スケールをCIP法，それ以下のスケールをMPS法で解く手法を提案している．Liuら[23]は，差分法にMPS法を組み合わせた気液二相流問題に適用している．Tryggvasonら[27]は，移動する粒子点の配置から密度分布を求め，その値を格子上に補間し，流体方程式を格子上で求め，得られた速度場から粒子を移動させるフロントトラッキング法を提案している．

本章では，数多くあるオイラー・ラグランジュ法のうち，筆者が開発したLagrange粒子付Euler型スキームに限定し，その計算方法を紹介することにする．

3.1 Lagrange粒子付Euler型スキーム

後節で示すような流体・固体の支配方程式に加えて，固気液の境界面を追跡するために，以下の方程式を用いる．

$$\frac{\partial \phi_I}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi_I = 0 \quad (3.1)$$

ここで， I 相とは，気相（ $I=1$ ），液相（ $I=2$ ），固相（ $I=3$ ）を意味し， ϕ_I は $0 \leq \phi_I \leq 1$ および以下の条件を満

足する.

$$\phi_I = \begin{cases} 1 & \text{occupied} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3.2)$$

なお、固相の密度関数 ϕ_I ($I=3$) は、後述する SPH 粒子によって、その界面情報の修正がなされる。Lagrange 粒子付 Euler 型スキームでは、格子に加えて、後節で示す Lagrange 粒子を併用しているため、界面追跡に伴う誤差を修正することが可能となる。したがって、式(3.1)の移流項の解き方は、1 次精度の風上差分でも良いし、CIP 法を用いた高次精度差分を用いても良い。

a) Lagrange 粒子の定義とその特徴

Lagrange 粒子付 Euler 型スキームでは、固気液 3 相の移動境界面を高精度に追跡するために、密度関数 ϕ_I ($0 \leq \phi_I \leq 1$, $I=1$: 気相, $I=2$: 液相, $I=3$: 固相) の移流計算だけでなく、これとは別に 2 種類の Lagrange 粒子 (自由表面粒子と SPH 粒子) を新たに配置する。これら Lagrange 粒子によって、格子サイズ以下の界面情報を保持するとともに、これらの粒子配置から密度関数 ϕ_I を修正することで、固気液 3 相の移動境界面の追跡精度を大幅に高めることが可能となる。

格子・粒子系および物理量の定義点については、図-5 に示すようにスタガード格子に従う。つまり、速度はセル境界に定義するとともに、圧力、密度、粘性係数はセル中心に定義する。その一方で、密度関数 ϕ_I は格子の角点に定義する。さらに、Lagrange 粒子位置において密度関数 ϕ_p を新たに定義し、この値は粒子の移流とともに保持され続けるものとする。

図-6 に Lagrange 粒子付 Euler 型スキームの概念図を示す。図より、計算領域を直交格子で分割するとともに、自由表面粒子 (黒印) と SPH 粒子 (グレー印) を分布させる。本手法では、固相の弾性応答・大変形・振動を高精度で捉えるために SPH 粒子を配置する。つまり、固相領域については、粒子法的一种である SPH 法を適用し、格子サイズ以下の弾性応答・大変形・振動を解析し、その SPH 粒子位置の分布や速度にしたがって、格子で定義された密度関数 ϕ_I ($I=3$: 固相) やセル界面の速度を修正する。一方、自由表面粒子は、気液相の境界面を高精度で追跡することを目的として配置されるものである。この粒子は質量を持たず、密度関数の勾配が急激に変化するところ、すなわち自由表面付近にのみ集中的に配置される。この自由表面粒子は、格子サイズ以下の気液界面情報を保持しているため、これらの分布から、格子で定義された気相と液相の密度関数 ϕ_I ($I=1$: 気相, $I=2$: 液相) を適宜修正する。この時、1 セルあたり 4 個 (2 次元の場合) または 8 個 (3 次元の場合) 程度になるように粒子を配置する。粒子半径 r_p は格子サイズの 1/4 程度とし、計算中において常に一定とする。なお、Particle Level-set 法とは、配置される粒子の直径は計算時間内において常に一定でありメモリーが節約される点、自由表面の片側サイド (液相側) のみに粒子を配置しており大幅な粒子数の減少が見込める点、後述の距離関数 ψ は粒子再分配の時のみに使用するので境界面の移流には CIP 法を用いる点で、大きく異なることに注意されたい。

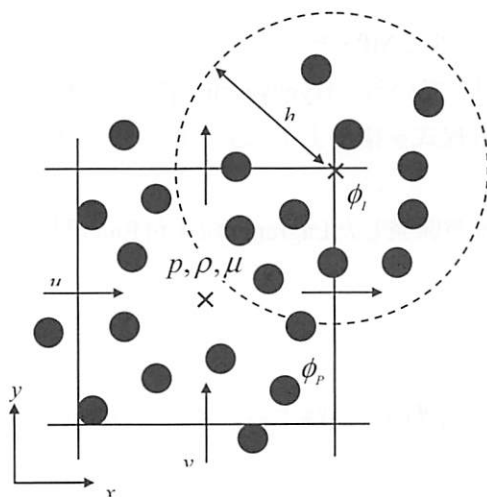


図-5 格子・粒子系と物理量の定義

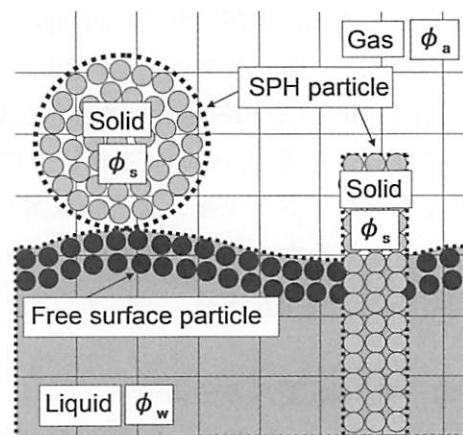


図-6 Lagrange粒子付Euler型スキームにおける格子・粒子の関係図 (グレー丸: SPH粒子, 黒丸: 自由表面粒子, なお、粒子サイズは格子サイズ以下とする)

図-7 は、タンク内スロッシング現象および円柱物体（剛体）が水面突入する際に生じる衝撃圧問題に適用した場合の粒子配置例である。格子サイズ以下のスプラッシュに対して、自由表面粒子が追従していることが分かる。また、気液界面及び固液界面が非常にクリアの Tracking 出来ていることが分かる。

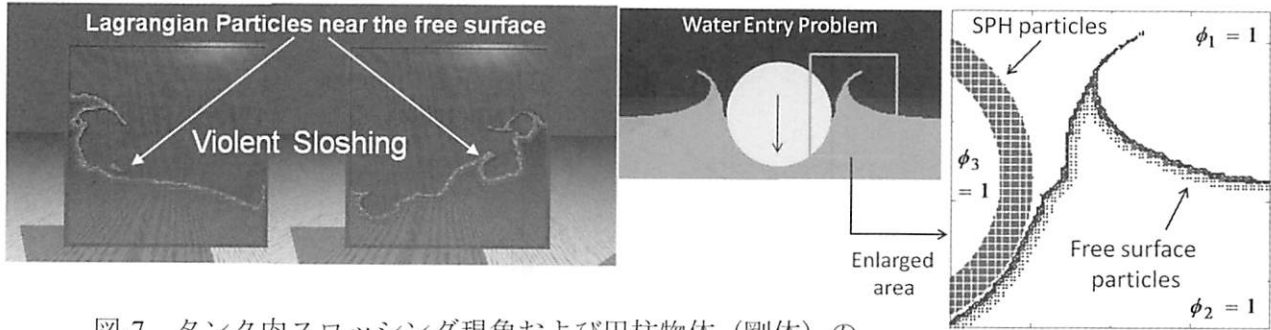


図-7 タンク内スロッシング現象および円柱物体（剛体）の水面衝撃問題におけるLagrange粒子の分布

b) Lagrange 粒子の速度および時間発展

気液界面に配置された自由表面粒子は、次式の時間発展方程式によって追跡がなされる。

$$\frac{d\vec{x}_p}{dt} = \vec{u}(\vec{x}_p) \quad (3.3)$$

ここで、 $\vec{x}_p$ は、粒子位置を示し、 $\vec{u}(\vec{x}_p)$ はその粒子位置での粒子速度を表している。本手法では、以下に示す 4 次精度 Runge-Kutta 法によって式(3.3)を解くことにする。

$$\begin{aligned} u^0 &= u^n \\ u^1 &= u^0 + \alpha_1 \Delta t f(u^0) & \alpha_1 &= \frac{1}{2} \\ u^2 &= u^0 + \alpha_2 \Delta t f(u^1) & \alpha_2 &= \frac{1}{2} \\ u^3 &= u^0 + \alpha_3 \Delta t f(u^2) & \alpha_3 &= 1 \\ u^4 &= u^0 + \frac{1}{6} (u^0 + 2u^1 + 2u^2 + u^3) \\ u^{n+1} &= u^4 \end{aligned} \quad (3.4)$$

なお、粒子速度 $\vec{u}(\vec{x}_p)$ は、セル境界に定義された速度場を用い、以下に示す補間方法によって求める。

$$\begin{aligned} f_s &= a_0 + a_1 x_g + a_2 y_g + a_3 z_g \\ \begin{pmatrix} 8 \\ \sum x_g \\ \sum y_g \\ \sum z_g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum x_g^2 \\ \sum y_g^2 \\ \sum z_g^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum x_g y_g \\ \sum y_g z_g \\ \sum z_g x_g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum x_g z_g \\ \sum y_g x_g \\ \sum z_g y_g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \sum f_g \\ \sum f_g x_g \\ \sum f_g y_g \\ \sum f_g z_g \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.5)$$

これは、3 次元空間において、格子 (x_g, y_g, z_g) の物理量 f_g から粒子上への物理量 f_s への補間を示しており、最小二乗法によって粒子速度 $\vec{u}(\vec{x}_p)$ を求めることになる。なお、非定常流体場の場合は、セル境界の速度が変化するため、このプロセスは、毎時刻行う。

一方、固相領域に配置された SPH 粒子は、後述する固体の運動方程式を SPH 法によって解き、個々の粒子の移動速度を求める。また、この粒子速度は、格子のセル境界で定義された速度場へ内挿補間することで、格子に定義された速度を修正する。この際、1 つの格子内に存在する粒子数も考慮し速度修正する（図-8）。

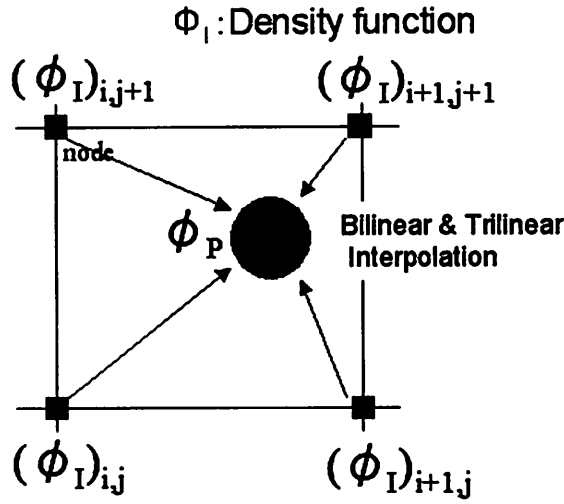


図-8 格子点からLagrange粒子への物理量の補間イメージ

c) 自由表面粒子の再配置

本手法では，自由表面の滑らかさおよび複雑さに合わせて，Lagrange粒子の追加・削減を行うと同時に，それらの再配置を行い，計算の効率化・安定化と自由表面の追跡精度の向上を図っている．ここでは，その粒子再配置アルゴリズムについて説明する．

ここでは，自由表面からの距離を認識するための指標として，距離関数 $\psi(x, y, z)$ ($-\infty < \psi < +\infty$) を新たに定義する．境界面において距離関数 $\psi = 0$ と設定し，これを基準として計算空間全体で距離関数 $\psi(x, y, z)$ を求める．次いで，界面からあるバンド幅 α 以内で，かつ，密度関数 ϕ_I がある値以上（例えば，0.5以上）となる領域の格子に対してのみ粒子を配置する．これらの概念図を図-9に示す．しかしながら，このままでは粒子配置が格子に沿った矩形状となってしまう，本来の自由表面位置とは若干異なってしまう．そこで，粒子位置を本来の境界面に出来る限り引き寄せるために，Enrightら[18]が提案した下式を用いて新しい粒子位置 $\bar{x}_{p,new}$ を求めることにする．

$$\bar{x}_{p,new} = \bar{x}_{p,old} + \lambda(\psi_{goal} - \psi(\bar{x}_p))\bar{N}(\bar{x}_p) \quad (3.6)$$

ここで， λ は 1 に設定した．また， $\psi(\bar{x}_p)$ は粒子位置 $\bar{x}_p$ における距離関数を示している． $\bar{N}(\bar{x}_p)$ は，以下の式で求めることが出来る．また， ψ_{goal} は以下の通りである．

$$\bar{N} = \frac{\nabla \psi}{|\nabla \psi|} \quad (3.7)$$

$$\psi_{goal} = \begin{cases} b_{\max} & (|\psi(\bar{x}_p)| > b_{\max}, \psi(\bar{x}_p) > 0) \\ -b_{\max} & (|\psi(\bar{x}_p)| > b_{\max}, \psi(\bar{x}_p) < 0) \\ b_{\min} & (|\psi(\bar{x}_p)| < b_{\min}, \psi(\bar{x}_p) > 0) \\ -b_{\min} & (|\psi(\bar{x}_p)| < b_{\min}, \psi(\bar{x}_p) < 0) \end{cases} \quad (3.8)$$

ここで， $b_{\max}$ および $b_{\min}$ は以下のように決定される．

$$\begin{cases} b_{\max} = \alpha \max(dx, dy, dz) \\ b_{\min} = \beta \max(dx, dy, dz) \end{cases} \quad (3.9)$$

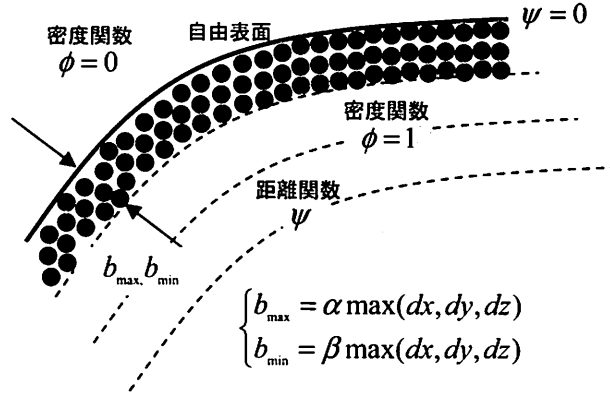


図-9 自由界面に配置された自由表面粒子の再配置過程の概念図

本手法で α は 2 程度, β は 0.1~0.75 程度に設定することとした. さらに, 急激な自由表面変形の追跡に対しては, 以下の条件を満足する格子の中心に 1 個の粒子を配置することとした.

$$\alpha < \psi(x, y, z) < \gamma \quad (3.10)$$

ここで, γ は格子サイズの 4~6 倍程度の値を取り得るものである. 最後に, $\psi(\bar{x}_p) < 0$ となる粒子を排除することで, 再配置アルゴリズムは終了する. なお α , β および γ は, 計算対象となる流体现象に依存するパラメータであり経験的に設定しているが, 格子サイズや時間刻みなどとの関連付けを行って決定付けることも可能である.

以上のような粒子の再配置アルゴリズムは, 計算負荷の増大要因となるため, 対象とする流体现象にあわせて適当な時間間隔で行うことにする.

d) 格子の密度関数 ϕ_l の修正方法

格子で定義された固気液3相の密度関数 ϕ_l ($l=1$: 気相, $l=2$: 液相, $l=3$: 固相) は, 時々刻々, 移流誤差が残ったり, 蓄積したりするため, 流体力および界面追跡の大幅な精度低下を招くことがある. そこで, 本研究では, SPH法[28]などで用いられるKernel関数を用いて, 密度関数 ϕ_l を修正することにする. SPH法では, 粒子 i の位置での物理量 ϕ_i は, その周囲の粒子 N 個の物理量の足し合わせで以下のように定義される.

$$\phi_i = \sum_{j=1}^N m_j \frac{\phi_j}{\rho_j} W_{ij} \quad (3.11)$$

この式は, 2次元の場合, 影響半径 h の円内 (図-10参照) にある N 個の粒子の持つ物理量を重み関数 W を用いて評価点へ内挿することを示している. 本論文では, 式(3.11)の考え方に基づき, 修正後の格子の密度関数 ϕ'_l は, 影響半径 h 内に含まれる粒子の密度関数 ϕ_p を用いて, 下式で評価する.

$$\phi'_l = \max \left(\phi_l, \sum_{j=1}^N \phi_p \frac{m_p}{\rho_p} W_p(|x_g - x_p|, h) \right) \quad (3.12)$$

ここで, m_p/ρ_p は粒子体積 V_p で半径 r_p を用いて求められる. W_p は Kernel 関数であり 3 次スプライン関数を用いる. また, x_g および x_p は, 格子および粒子の位置ベクトルを表す. なお, 本論文では, 影響範囲 h は, 格子サイズの 2 倍とした.

以下では, 自由表面粒子を用いた流体領域およびSPH粒子を用いた固体領域の解き方について詳述する.

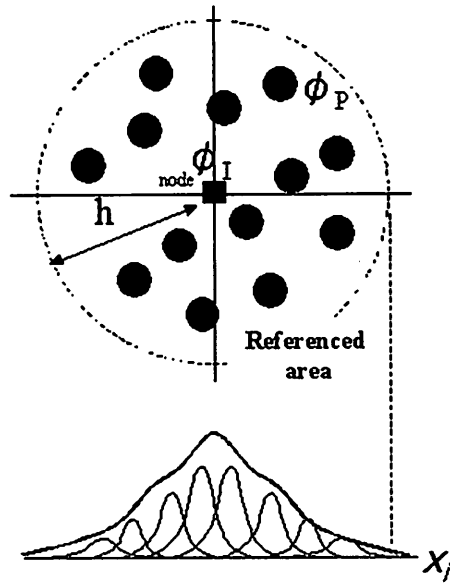


図-10 Lagrange 粒子から格子点への密度関数 ϕ_I の補間イメージ

3.2 流体領域の支配方程式と分離型解法

支配方程式は、以下に示す質量保存式、Navier-Stokes 方程式、圧力方程式である。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho = -\rho \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla \cdot \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{g}_i + F_{fsi} \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla p = -\rho C_s^2 \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (3.15)$$

ここで、 $\mathbf{g}_i$ は重力加速度項、 C_s は音速を表している。また、 F_{fsi} は固体・流体相互作用項であり、3.3 e) 節で説明を行う固体領域の計算のに使用する。

以上の方程式の解法には、Time splitting 法もしくは Fractional step 法を用いる。ここでは、移流相を先に解き、その後、非移流相を解く分離解法について説明をする。

移流相と非移流相は以下のように書き換えることが出来る。

移流相：

$$\frac{\rho^* - \rho^n}{\Delta t} + \mathbf{u}^n \cdot \nabla \rho^n = 0 \quad (3.16)$$

$$\frac{\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^n}{\Delta t} + \mathbf{u}^n \nabla \cdot \mathbf{u}^n = 0 \quad (3.17)$$

$$\frac{p^* - p^n}{\Delta t} + \mathbf{u}^n \cdot \nabla p^n = 0 \quad (3.18)$$

ここで、* は移流後の物理量を表す。この移流相の計算には、種々の高精度な移流計算法が提案されている。

非移流相：

$$\frac{\rho^{n+1} - \rho^*}{\Delta t} = -\rho^* \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} \quad (3.19)$$

$$\frac{\mathbf{u}^{**} - \mathbf{u}^*}{\Delta t} = \frac{\mu}{\rho^*} \nabla^2 \mathbf{u}^* + \mathbf{g}_i + F_{fsi} \quad (3.20)$$

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^{**}}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho^*} \nabla p^{n+1} \quad (3.21)$$

$$\frac{p^{n+1} - p^*}{\Delta t} = -\rho C_s^2 \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} \quad (3.22)$$

ここで、式(3.21),(3.22)を連立させると、以下の圧力に関するポアソン方程式が導かれる。

$$\nabla \cdot \left(\frac{\nabla p^{n+1}}{\rho^*} \right) = \frac{p^{n+1} - p^*}{\rho^* C_s^2 \Delta t^2} + \frac{\nabla \cdot \mathbf{u}^{**}}{\Delta t} \quad (3.23)$$

また、式(3.19),(3.22)より、下式が導かれる。

$$\rho^{n+1} - \rho^* = \frac{1}{C_s^2} (p^{n+1} - p^*) \quad (3.24)$$

つまり、移流相は CIP 法などを用いて高精度な移流計算を行い仮の物理量（ここでは、* 表示）をそれぞれ求めておき、非移流相はポアソン方程式(3.23)を解いた後、次時刻の流速と密度を式(3.21),(3.24)で求めることになる。なお、非圧縮性流体を取り扱う場合は、音速が無限大であるため、式(3.23)の右辺第 1 項は無視でき、かつ、式(3.18)も不要となり、SMAC 法で用いられるポアソン方程式と同形式で簡単に解くことが可能である。また、式(3.24)の右辺も無視できることから、密度一定の条件が成立するとともに、移流相の計算（式(3.19)）のみを行えば良いことになる。通常の流体計算であれば、非圧縮条件が十分成立するので、このように簡単なアルゴリズムが可能となる。

3.3 固相領域の支配方程式と SPH 法による解法

a) 固相領域の支配方程式

前節までの流体領域の計算に加え、固体領域が存在する場合の計算方法について、本節では説明を行う。なお、固体・流体の相互作用によって、固体が運動・変形・振動する現象を柔軟に追跡するために、ここでは、SPH 法に基づいた固相領域の解析方法について述べる。

支配方程式は、以下の連続の式と運動方程式である。

$$\frac{D\rho}{dt} + \rho \frac{\partial u^i}{\partial x^i} = 0 \quad (3.25)$$

$$\frac{du^i}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial x^j} + g^i + F_{fsi}^i \quad (3.26)$$

ここで、 ρ は密度、 u^i は速度、 x^j は位置ベクトルの j 方向成分、 σ^{ij} は固体・流体の応力テンソル、 F_{fsi} は固体・流体相互作用項である。

b) SPH 法による離散化

SPH 法による連続式の離散化は以下の通りである。

$$\frac{d\rho_a^i}{dt} = \rho_a \sum_b \frac{m_b}{\rho_b} (u_a^i - u_b^i) \cdot \frac{\partial W^{ab}}{\partial x^i} \quad (3.27)$$

$$\frac{du_a^i}{dt} = \sum_b m_b \left(\frac{\sigma_a^{ij}}{\rho_a^2} + \frac{\sigma_b^{ij}}{\rho_b^2} \right) \frac{\partial W^{ab}}{\partial x^j} + g^i + \frac{F_{fsi}}{\rho_a} \quad (3.28)$$

固体領域の計算をする場合、式(3.26) に示す固体の応力テンソル σ_s^{ij} は、以下の通りである。

$$\sigma_s^{ij} = -P \delta^{ij} + S^{ij} \quad (3.29)$$

ここで、 S^{ij} は偏差応力成分、 $P = -\sigma_{kk} / 3$ である。弾性体が大変形する場合、物体形状が時々刻々変化することを考慮に入れた扱いが必要であり、増分型構成式は、以下のようになる。

$$\{dS^{ij}\} = [D^e] \{d\epsilon^{ij}\} \quad (3.30)$$

ここで、 D^e は弾性マトリックス、 $d\epsilon^{ij}$ はひずみの時間増分、 dS^{ij} は偏差応力の時間増分である。弾塑性計算を行いたい場合は、弾性マトリックスを塑性マトリックスを加えれば良い。ここでは、変形時の固相の回転運動を考慮するために、以下の *Jaumann* 速度を用いる。

$$\frac{dS^{ij}}{dt} = 2\mu \left(\dot{\epsilon}^{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \dot{\epsilon}^{kk} \right) + S^{ik} \Omega^{jk} + \Omega^{ik} S^{kj} \quad (3.31)$$

例えば、2次元の場合、以下の通りである。

$$\begin{aligned} \frac{dS^{xx}}{dt} &= \frac{2}{3} \mu (2\dot{\epsilon}^{xx} - \dot{\epsilon}^{yy}) + 2\Omega^{xy} S^{xy} \\ \frac{dS^{yy}}{dt} &= \frac{2}{3} \mu (2\dot{\epsilon}^{yy} - \dot{\epsilon}^{xx}) - 2\Omega^{xy} S^{xy} \\ \frac{dS^{xy}}{dt} &= 2\mu \dot{\epsilon}^{xy} + \Omega^{xy} S^{yy} - S^{xx} \Omega^{xy} \end{aligned} \quad (3.32)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \Omega^{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v^x}{\partial y} - \frac{\partial v^y}{\partial x} \right), & \Omega^{yx} &= -\Omega^{xy} \\ \dot{\epsilon}^{xx} &= \frac{\partial v_x}{\partial x}, & \dot{\epsilon}^{yy} &= \frac{\partial v_y}{\partial y}, & \dot{\epsilon}^{xy} &= \dot{\epsilon}^{yx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (3.33)$$

である。

以上、大変形解析を行うための *Jaumann* 速度を用いると、固体の支配方程式(3.25)は、以下のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{du_a^i}{dt} &= \sum_b m_b \left(- \left(\frac{P_a}{\rho_a^2} + \frac{P_b}{\rho_b^2} \right) \delta^{ij} + \frac{S_a^{ij}}{\rho_a^2} + \frac{S_b^{ij}}{\rho_b^2} \right. \\ &\quad \left. + \Pi_{ab} \delta^{ij} + R_{ab}^{ij} f^n \right) \frac{\partial W_{ab}}{\partial x^j} + g^i - \frac{F_{fsi}}{\rho_a} \end{aligned} \quad (3.34)$$

ここで、 Π_{ab} は人工粘性項、 $R_{ab}^{ij} f^n$ はGrayら[29]と同様の人工応力項を示し、以下の式で評価される。

$$R_{ab}^{ij} = R_a^{ij} + R_b^{ij} \quad (3.35)$$

$$f_{ab} = \frac{W(r_{ab})}{W(\Delta p)} \quad (3.36)$$

なお、2次元の場合、

$$\begin{aligned} R_a^{xx} &= \bar{R}_a^{xx} \cos^2 \theta_a + \bar{R}_a^{yy} \sin^2 \theta_a, \\ R_a^{yy} &= \bar{R}_a^{xx} \sin^2 \theta_a + \bar{R}_a^{yy} \cos^2 \theta_a, \\ R_a^{xy} &= (\bar{R}_a^{xx} - \bar{R}_a^{yy}) \sin \theta_a \cos \theta_a \end{aligned} \quad (3.37)$$

$$\bar{R}_a^{xx} = \begin{cases} -\varepsilon \frac{\bar{\sigma}_a^{xx}}{\rho_a^2}, & \text{if } \bar{\sigma}_a^{xx} > 0 \quad (\text{Tension}) \\ 0, & \text{if } \bar{\sigma}_a^{xx} \leq 0 \quad (\text{Compression}) \end{cases} \quad (3.38)$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_a^{xx} &= \sigma_a^{xx} \cos^2 \theta_a + \sigma_a^{xy} \cdot 2 \sin \theta_a \cos \theta_a + \sigma_a^{yy} \sin^2 \theta_a \\ \bar{\sigma}_a^{yy} &= \sigma_a^{xx} \sin^2 \theta_a + \sigma_a^{xy} \cdot 2 \sin \theta_a \cos \theta_a + \sigma_a^{yy} \cos^2 \theta_a \end{aligned} \quad (3.39)$$

$$\tan 2\theta_a = \frac{2\sigma_a^{xy}}{\sigma_a^{xx} - \sigma_a^{yy}} \quad (3.40)$$

となる。 $\bar{R}_a^{yy}$ についても同様に考えることが出来る。ここで、 $\varepsilon = 0$ の時は、人工応力を考慮しないことに相当する。

以上のことから、式(3.31)の偏差応力成分 S^{ij} の時間発展は、式(3.30)に示す時間増分量を時間積分すること

により、時々刻々求めることができる。さらに、その偏差応力 S^{ab} と流体力 P （式(3.23)から求められる）を式(3.29)に代入すれば、時々刻々の応力 σ_s^{ij} を求めることが可能となる。

c) 剛体の運動

剛体の3次元運動を取り扱う場合は、Lagrange 粒子群を個別に運動させずに、構造体の重心位置の並進と回転によって運動させる。その際には、以下の運動方程式[30]を用いる。

$$\frac{\partial^2 x_{s,k}}{\partial t^2} = \frac{F_{s,k}}{m_i} - F_{fsi} \quad (3.41)$$

$$I \frac{\partial \omega_i}{\partial t} = T_i \quad (3.42)$$

$$\frac{\partial \theta_i}{\partial t} = \omega_i \quad (3.43)$$

ここで、 θ_i は回転角度、 ω_i は角速度、 T_i はトルクである。 I は慣性モーメント、 F_{fsi} は固体流体の相互作用項である。

SPH 法を用いた具体的な剛体運動の方法は以下の通りである。 N 個の粒子で表された剛体の重心の座標を $\mathbf{r}_g$ 、慣性モーメントを I として、

$$\mathbf{r}_g = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \quad (3.44)$$

$$I = \sum_{i=1}^N m |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_g|^2 \quad (3.45)$$

ここで、粒子 i の座標を $\mathbf{r}_i$ 、粒子 1 個の質量を m とする。慣性モーメントは初期時刻のものを用いる。

新しい時刻 $k+1$ の速度 $\mathbf{u}_i^{k+1}$ と座標 $\mathbf{r}_i^{k+1}$ を定義し、剛体重心の変化量 $\mathbf{r}_g'$ と、回転角変化量 $\theta'_i = \omega \Delta t$ とすると、

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{r}}_i' &= \hat{\mathbf{r}}_i^{k+1} - \mathbf{r}_i^k \\ \mathbf{r}_g^{k+1} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{\mathbf{r}}_i^{k+1} \\ \mathbf{r}_g' &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{\mathbf{r}}_i' \\ \theta' &= \omega \Delta t = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^N m \hat{\mathbf{r}}_i' \times (\mathbf{r}_i^k - \mathbf{r}_g^{k+1}) \\ \mathbf{r}_i' &= \mathbf{r}_g' + \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{r}_i^k - \mathbf{r}_g^{k+1}) \\ \mathbf{u}_i^{k+1} &= \frac{\mathbf{r}_i'}{\Delta t} \\ \mathbf{r}_i^{k+1} &= \mathbf{r}_i^k + \mathbf{r}_i' \end{aligned} \quad (3.46)$$

ここで、 $\mathbf{R}$ は回転行列である。

以下では、3次元回転行列 $\mathbf{R}$ について概説する。3次元空間における回転を表現する方法には、(1)オイラー角による表現、(2)回転行列による表現、(3)クォータニオンによる表現、という3つの方法がある。オイラー角を用いた場合は物体に固定された座標軸が直交を保てなくなる特異点が存在し回転運動の記述に限界があることが知られている。また、回転行列を用いた場合は9個のパラメータが存在するため演算回数が多くなるほど誤差が蓄積するという問題を抱えている。そこで、本手法では回転運動の記述方法としてクォータニオン（四次数）を用いている。

クォータニオンは、4つのパラメータ（1つの実部と3つの虚部）で構成される数であり、(1)任意の軸周りの回転を簡単に合成できる、(2)回転軸が固定された状態にある間、途中の回転の状態を線形補間できるとい

う特長を有している。任意のクォータニオンは以下のように表される。ここで、 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ は虚数単位である。

$$\mathbf{q}(t) = s + v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k} \quad (3.47)$$

任意のベクトル $\mathbf{r} = (x, y, z)$ に対応するクォータニオンを $\mathbf{Q} = (0, \mathbf{r})$ と置く。回転軸方向の単位ベクトルを $\mathbf{V} = (v_x, v_y, v_z)$ 、回転量を θ とすると、回転軸となるクォータニオンは、

$$\mathbf{Q} = \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \mathbf{V} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) \quad (3.48)$$

となる。なお、クォータニオンと回転行列 R の関係は、以下の通りである。

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 - 2v_y^2 - 2v_z^2 & 2v_x v_y - 2sv_z & 2v_x v_z + 2sv_y \\ 2v_x v_y + 2sv_z & 1 - 2v_x^2 - 2v_z^2 & 2v_y v_z - 2sv_x \\ 2v_x v_z - 2sv_y & 2v_y v_z + 2sv_x & 1 - 2v_x^2 - 2v_y^2 \end{pmatrix} \quad (3.49)$$

この回転行列と並進行列を用いて、構造物の 3 次元運動を記述することが可能となる。

d) 時間積分

ここでは、Predictor-Corrector Leapfrogによる時間積分の方法について説明する。支配方程式を以下のように簡略式で書くことにする。

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{u}}{dt} &= \mathbf{F} \\ \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \mathbf{u} \\ \frac{d\rho}{dt} &= D \\ \frac{d\mathbf{S}}{dt} &= \mathbf{T} \end{aligned} \quad (3.50)$$

ここで、初期時刻の値を上付き0で示し、予測子を下付き p で示すと、

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_p &= \mathbf{u}_0 + \Delta t \mathbf{F}_0 \\ \rho_p &= \rho_0 + \Delta t D_0 \\ \mathbf{S}_p &= \mathbf{S}_0 + \Delta t \mathbf{T}_0 \end{aligned} \quad (3.51)$$

この予測子を用いて、以下のように各物理量を修正する。

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{u}_p + \frac{1}{2} \Delta t (\mathbf{F} - \mathbf{F}_0) \\ \rho &= \rho_p + \frac{1}{2} \Delta t (D - D_0) \\ \mathbf{S} &= \mathbf{S}_p + \frac{1}{2} \Delta t (\mathbf{T} - \mathbf{T}_0) \\ \mathbf{x} &= \mathbf{x}_0 + \Delta t \mathbf{u}_0 + \frac{1}{2} (\Delta t)^2 \mathbf{F}_0 \end{aligned} \quad (3.52)$$

以上のように、偏差応力 $\mathbf{S}^{n+1}$ 、粒子速度 $\mathbf{u}^{n+1}$ 、密度 ρ^{n+1} 、さらには次時刻の粒子位置 $\mathbf{x}^{n+1}$ が得られる。

e) 固体流体相互作用項

次に、ポアソン方程式から液相と固相の圧力を計算する。求めた圧力と各粒子の速度から運動方程式によって加速度を計算する。運動方程式を計算する際、液相については圧力項と粘性項、固体については圧力項と偏差応力の項に分けて計算を行う。

また、式(3.26)にある相互作用項 F_{fsi} は、以下の通り、固気液 3 相の圧力（格子で定義される圧力として後述の式(3.23)から求められる）を、固体粒子上の圧力へ内挿補間し、以下の式により加速度を算出することで評価することが出来る。

$$F_{fsi}(\mathbf{r}_a) = -\frac{1}{\rho(\mathbf{r}_a)} \sum_b m_b \frac{P(\mathbf{r}_b)}{\rho(\mathbf{r}_b)} \nabla_a \cdot \mathbf{W}(\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b, h) \quad (3.53)$$

偏差応力の項はそれぞれ固相粒子のみの足し合わせで評価する．求めた値から，各粒子の密度，速度，位置などの物理量を更新する．

3.4 計算手順と計算例

Lagrange粒子付Euler型スキームの計算フロー（図-11参照）は，大きく分けて3つに分けることができる．メインフローは格子上で気液界面を追跡するフローであり，ここでは固気液3相の圧力場も同時に計算する．また，サブフローとして，自由表面粒子の時間発展・粒子再配置を行うフローと，SPH粒子を用いて固体の応力，ひずみ，速度，位置を求めるフローがある．なお，固体-流体連成問題を取り扱うために，流体領域と固体領域の時間刻みを変える必要がある．ここでは，下式に示すように，流体ルーチン 1 回に付き，固体ルーチンは N 回ステップ行うことにした．

$$\Delta t_f = N \times \Delta t_s \quad (3.54)$$

ここで， Δt_f は流体ルーチンの時間刻み， Δt_s は固体ルーチンの時間刻みを表す．

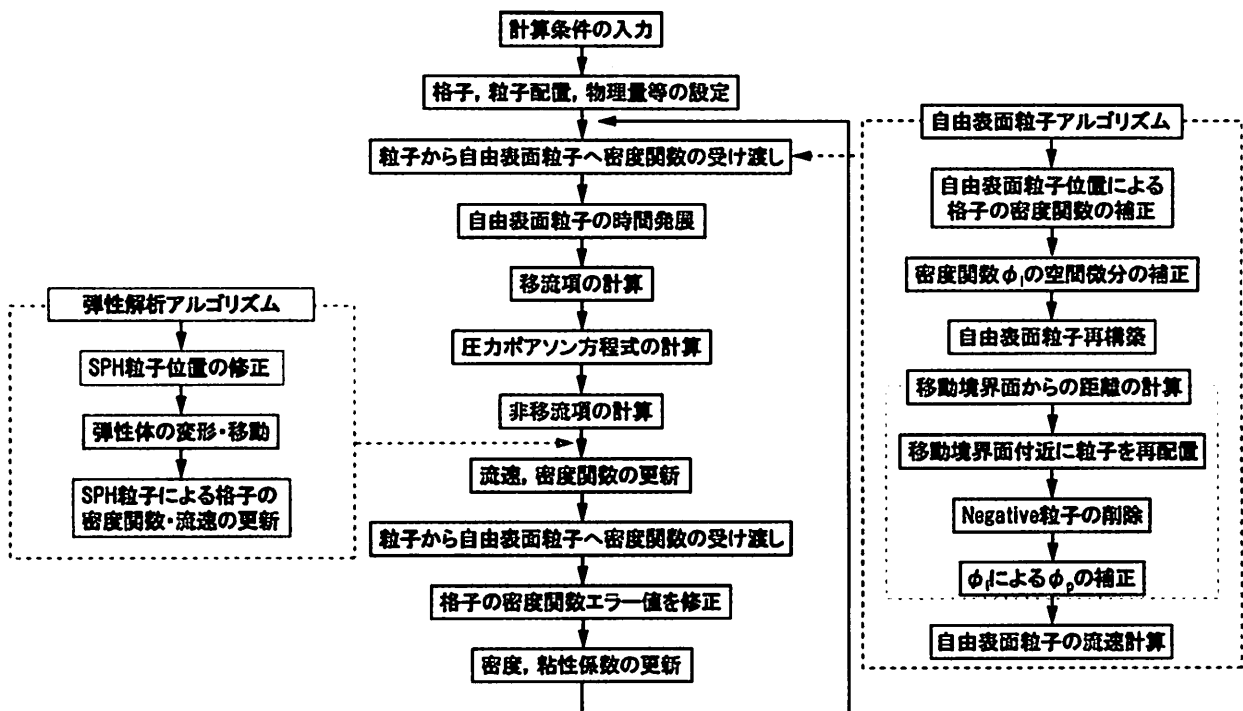


図-11 Lagrange 粒子付 Euler 型スキームの計算フロー

4. 数値計算例

4.1 界面追跡の精度検証

ここでは、強いせん断・伸縮変形を伴う流れ場において、薄い膜状の界面が追跡できるか否かを検証する。初期の円の中心位置は(0.5, 0.75)であり、半径は 0.15 である。格子サイズは $dx=dy=0.01$ 、格子数 100×100 とし、時間刻みは $dt=0.01$ とした。対象とする流れ場は、以下の通りである。

$$\begin{aligned} u(x, y) &= -2 \sin^2(\pi x) \sin(\pi y) \cos(\pi y) g(t) \\ v(x, y) &= 2 \sin^2(\pi y) \sin(\pi x) \cos(\pi x) g(t) \end{aligned} \quad (3.55)$$

ここで、 $g(t)=\cos(\pi t)/T$ として、周期 T で流れ場は反転し、元に戻るものとする。なお、周期 $T=10$ とした。粒子は、物体境界付近については、1 格子あたり 4 個もしくは 16 個の粒子を配置した。

図-12,13 は、CIP 法および Lagrange 粒子付 Euler 型スキームによる結果を比較したものである。総粒子数は、565 個である。なお、ここでは密度関数の tangent 変換は行っていない。図より、CIP 法は界面が非常に薄くなるにつれて、密度関数値が急激に減少し、最終的には初期形状に戻らない。これに対して、本手法はかなり薄い界面形状も捕獲し、かつ、最終形状も完全に円形に戻っていることが分かる。なお、本手法の界面形状の変化は、Enright らが提案した Particle Level Set 法による計算結果と非常によく合致している。

次いで、本手法の 3 次元問題への適用性について検討する。特に、界面の大変形が形成される速度場において、膜状界面の捕獲精度を検証する。初期の球の中心位置は(0.35, 0.35, 0.35)であり、半径は 0.15 である。格子サイズは $dx=dy=dz=0.01$ 、格子数 $100 \times 100 \times 100$ とし、時間刻みは $dt=0.001$ とした。対象とする流れ場は、以下の通りである。

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= 2 \sin^2(\pi x) \sin(2\pi y) \sin(2\pi z) g(t) \\ v(x, y, z) &= -\sin(2\pi x) \sin^2(\pi y) \sin(2\pi z) g(t) \\ w(x, y, z) &= -\sin(2\pi x) \sin(2\pi y) \sin^2(\pi z) g(t) \end{aligned} \quad (3.56)$$

ここで、 $g(t)=\cos(\pi t)/T$ として、周期 T で流れ場は反転し、元に戻るものとする。なお、周期 $T=3$ とした。粒子は、物体境界付近については、1 格子あたり 8 個もしくは 64 個の粒子を配置した。

図-14,15 は、CIP 法および Lagrange 粒子付 Euler 型スキームによる結果を比較したものである。総粒子数は 261,955 個である。

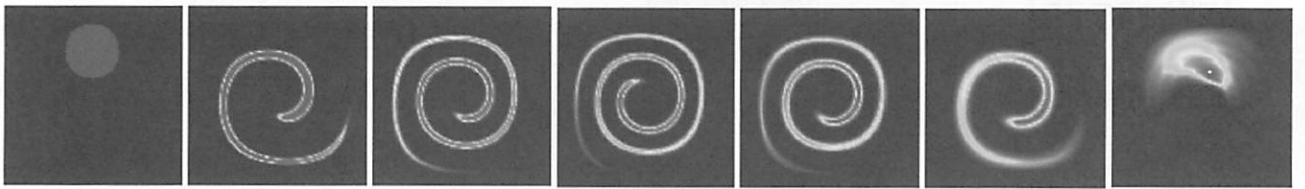


図-12 CIP 法

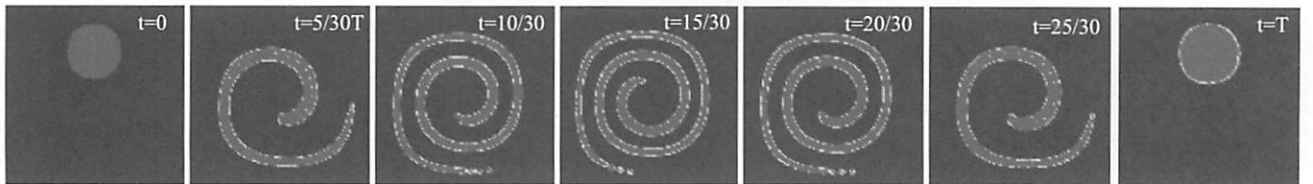


図-13 Lagrange 粒子付 Euler 型スキーム（界面に 16 個/cell の粒子）

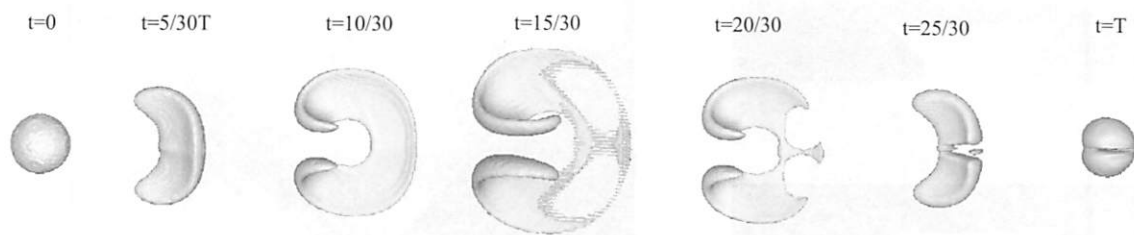


図-14 CIP 法

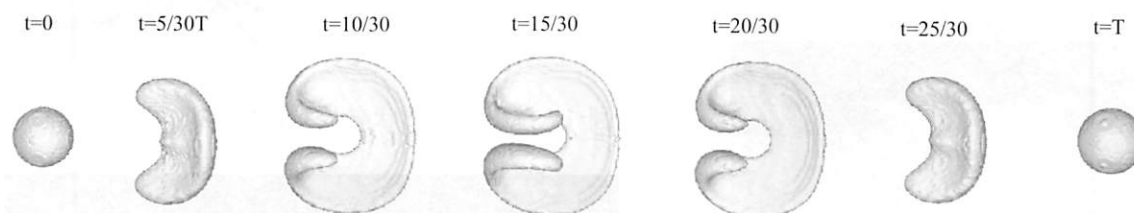


図-15 Lagrange 粒子付 Euler 型スキーム (界面に 64 個/cell の粒子)

図より、CIP 法は、界面が薄くなった場合に物体が消えてしまい、最終的には 2 個に分裂してしまうのに対して、本手法は、薄い界面を保持しつつ、最終形状はほぼ完全に初期状態に戻っていることが分かる。

4.2 固気液相互作用問題への適用

a) 剛体および弾性体の水面突入問題

水面衝撃突入問題の典型例として、図-16 に示すような楔角 β を有する V 型物体 (剛体) の突入計算に適用した。なお、物体の突入速度を $V_0=5.0\text{m/s}$ とし、楔角 $\beta=30, 45$ 度の計算を行った。計算格子は、格子サイズ 1mm の等間隔構造格子とし、壁境界は全て free-slip 条件とした。流体の物性は実流体場と同様であり、密度比 800, 粘性比 55 倍とした。また、初期静水時において自由表面付近に配置する Lagrange 粒子は約 15,000 個、粒子径 0.25mm とする一方で、V 型物体は約 170,000 個の粒子で構成した。時間刻みは、 10^{-4}s とし、約 0.02s 間の突入計算を行った。物体の水面突入直後、物体下面から非常に薄いジェットが形成され、その後、十分発達したジェットはスプレーとなって気相に飛び散っていく過程が再現されている。また、図-17 は、楔角 $\beta=45$ 度の時の物体突入による自由水面形状について Greenhow ら[31]の実験結果と比較を示したものである。図-18 は、密度楔角 $\beta=30$ 度の時のスプラッシュ生成時における密度関数と粒子分布を示したものである。スプレー領域では、格子解像度以下に配置された粒子群が液滴となって飛散し、その粒子群によって液相の密度関数 ϕ_l ($I=2$) が修正されるため、通常の数値計算法で発生するような密度関数のなまりがほとんどない。このことは、このように局所的にストレッチされた自由表面の追跡精度の大幅な向上を示していると言える。

次いで、弾性体の箱型物体が水面に突入する問題に適用する。図-19 は計算の初期条件を示す。弾性物体は箱型であり、縦横 20cm 、板厚 5mm のアクリル製 (ヤング率 640MPa 、ポアソン比 0.35) である。水面の突入速度は 3.6m/sec とした。格子サイズは 2mm 、流体領域の時間刻み $0.5 \times 10^{-4}\text{sec}$ 、固相領域の時間刻み $2.5 \times 10^{-5}\text{sec}$ とした。初期の自由表面粒子数 6024 個、弾性体の SPH 粒子数 3900 個、粒子径 1.25mm とした。図中には、格子と SPH 粒子の配置の一部 (右上部) を拡大して示している。図-20 は、各突入衝撃角 β における歪み量の時系列変化を示す。突入衝撃角 β が小さいほど、衝撃圧が大きくなるため、歪み量は大きい。また、高剛性モデルの場合、その変動も高周波になっていることが分かる。図-21 は、箱型物体内壁に設置された歪ゲージより得られた歪み量の時系列変化を比較したものである。測点 St.1~St.3 のいずれも概ね良好な一致をしていることが分かる。但し、高周波の振動モードが計算では捉えられていないことから、さらなる検証は必要であろう。図-22 は、水面突入過程における水面下の衝撃圧分布および弾性箱型物体内部の歪み量の空間分布 (衝撃角 $\beta=25$ 度) を示したものである。非定常に変化する衝撃圧の作用下において、箱型模型の内部歪み量がどのように変化していくか、細かく再現されていることが分かる。このことから、格子サイズに大きく影響されることなく、薄肉構造物の相互作用計算が可能であることが分かる。但し、固相・流体相の時間刻み幅、さらには、1 格子あたりの初期粒子数が計算結果に及ぼす影響を十分把握しておく必要性がある。

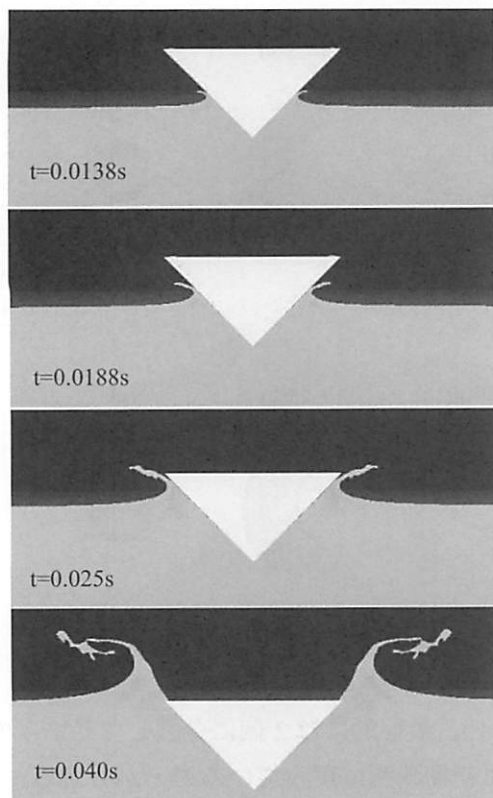


図-16 自由水面形状の時間的变化 (楔角 $\beta=45$ 度)

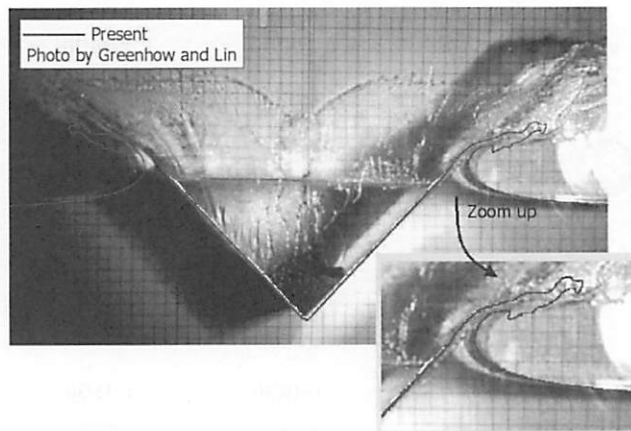


図-17 自由水面形状の比較[31] (楔角 $\beta=45$ 度)

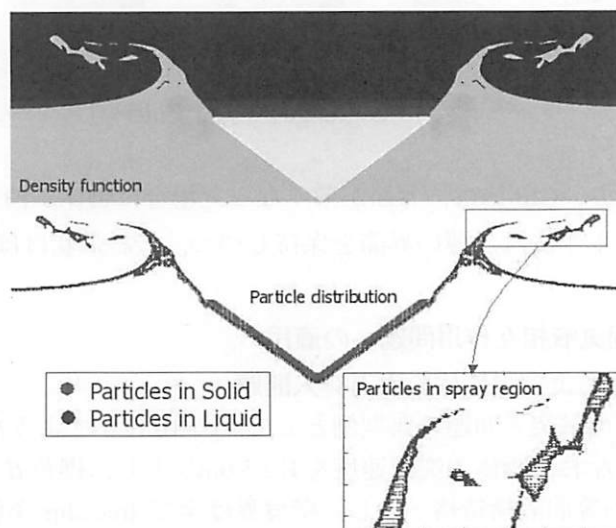


図-18 発達したジェット付近の密度関数と粒子配置の一例 (楔角 $\beta=30$ 度)

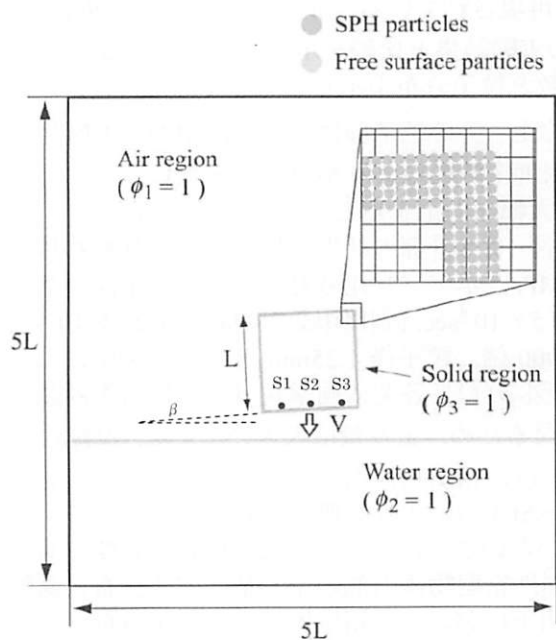


図-19 弾性箱型物体の水面衝撃問題の初期条件 (水面と物体のなす角度 β)

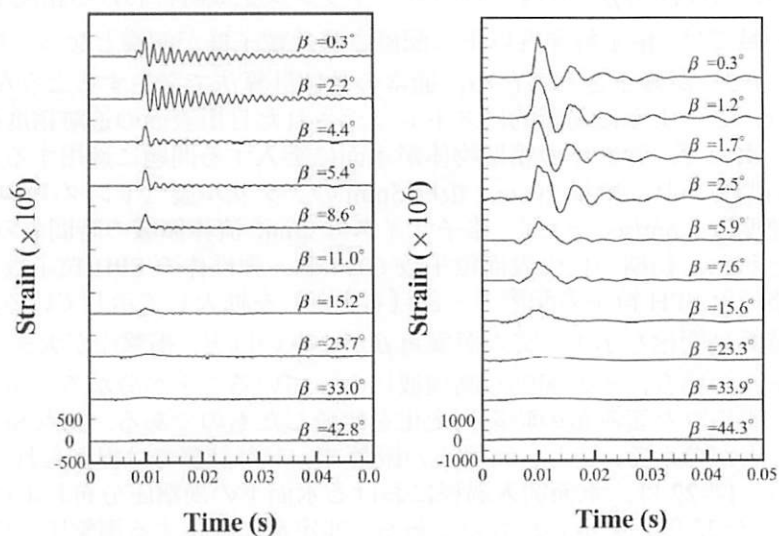


図-20 歪み量の時系列変化の一例 (左図: 高剛性モデル, 右図: 低剛性モデル)

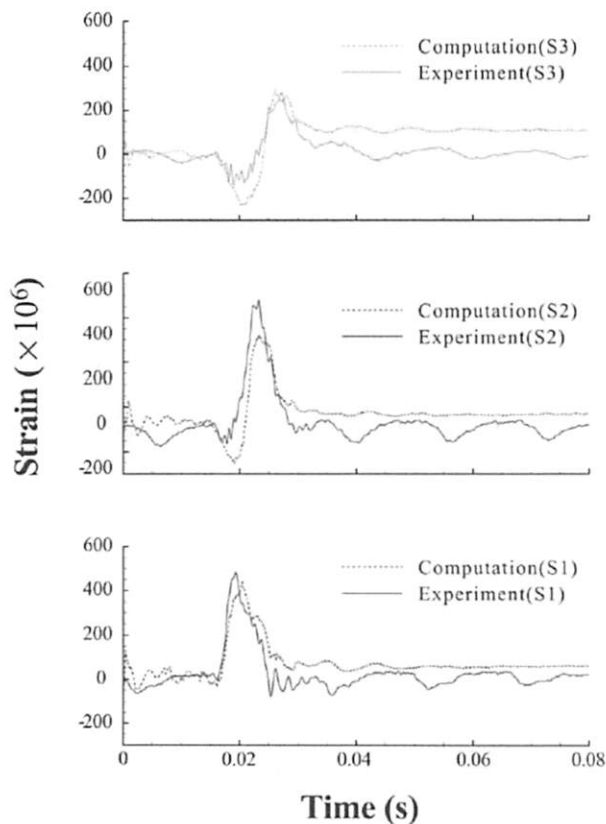


図-21 St1～St.3 における歪み量の時系列変化の比較（衝撃角 $\beta=15$ 度）

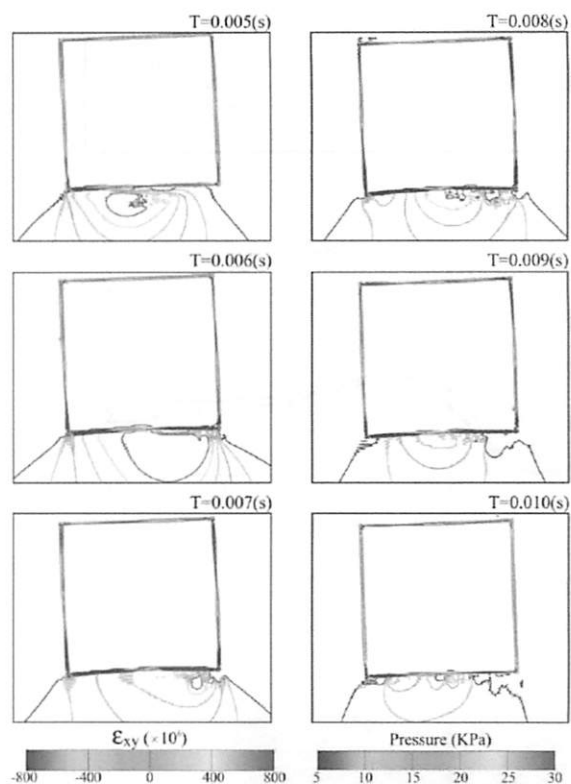


図-22 衝撃圧と歪み量の時空間分布（衝撃角 $\beta=2.5$ 度）

b) 弾性壁に作用する衝撃圧問題

ここでは、図-23に示すAntociら[32]の相互作用問題について検証する．幅 $A=10$ cm，高さ $H=14$ cm，奥行き $B=10$ cm の水柱前脚部に，高さ $L=7.9$ cm，厚さ $s=5$ mm のゴム材料の直立弾性壁を設ける．このゴム壁の上端はクランプで固定され，下端は自由端となっている．ゴム壁の材料特性は，密度 $\rho=1100$ kg/cm³，ヤング係数 $E=12$ Mpa，ポアソン比 $\nu=0.4$ である．なお，気液相の密度比800，粘性比50として実流体場と同様とした．格子サイズは 1.25mm とし，初期に自由表面に配置される粒子（直径0.625mm）は約1万個であり，1格子当たり 4 個とした．一方，5mm厚の薄いゴム壁は，わずか 4 メッシュで表現され，約 2000 個のSPH粒子（直径0.625 mm）で構成されている．図-24は，本手法の計算結果および実験結果を比較したものである．

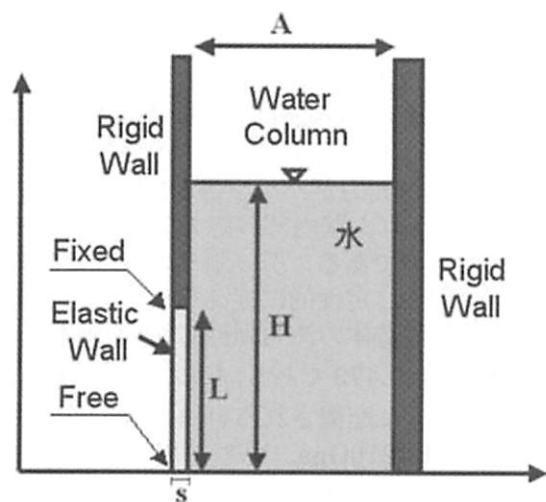


図-23 ゴム壁と水柱崩壊の相互作用問題の計算領域．弾性壁前脚下端（自由端）より水塊が飛び出す．

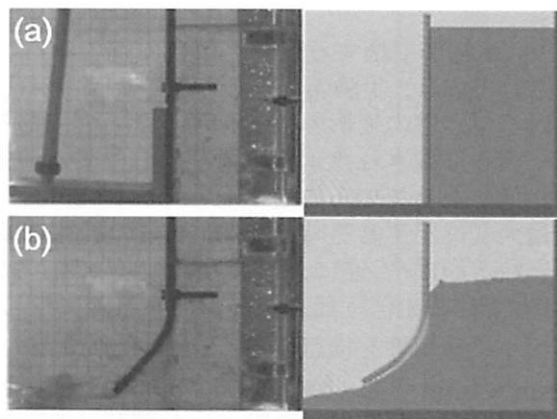


図-24 ゴム壁と水柱崩壊現象の相互作用シミュレーション結果（左図：実験結果，右図：本数値計算結果）

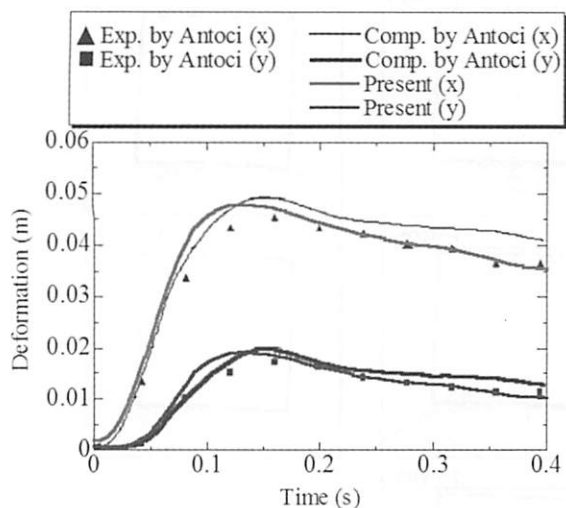


図-25 ゴム壁下端における水平および鉛直変位の時系列変化の比較

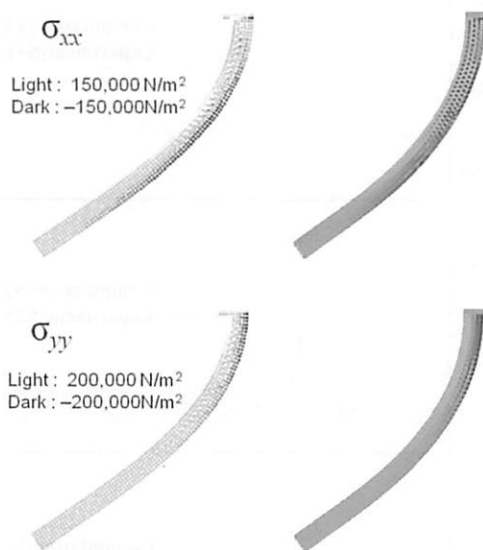


図-26 ゴム壁の変形と内部応力の分布の比較
(左図: Antoci の結果[32], 右図: 本計算結果)

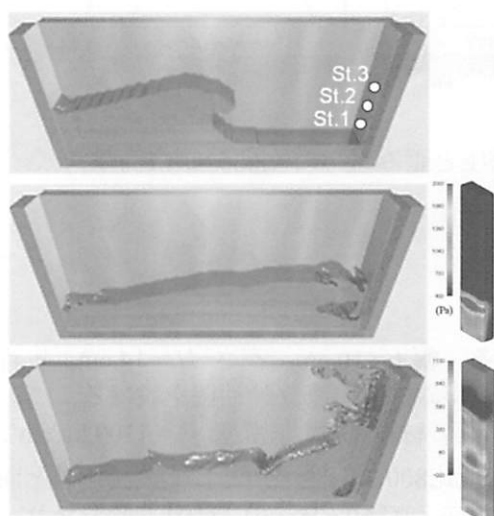


図-27 鋼壁に衝突する孤立波と右側側壁の内部応力の空間分布

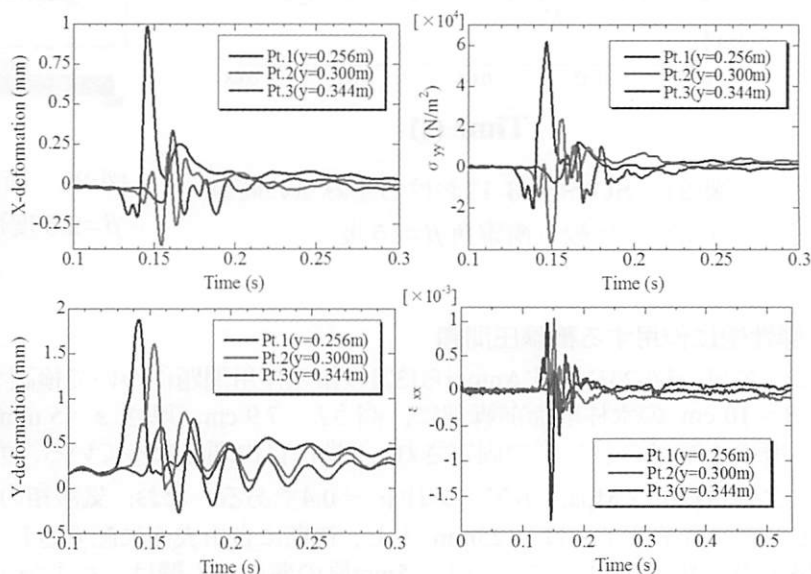


図-28 鋼壁の x-y 変位と内部応力・ひずみ量の時系列変化

図より、水柱が崩壊するとともに自由端であるゴム下端から水塊が飛び出し、ゴム壁が大変形していく様子が再現されており、実験結果と概ね良い一致を示している事が分かる。また、図-25は、計算時間内 ($t=0.4\text{s}$ 間) におけるゴム壁の変形の様子を示したものである。 $t=0.1\sim 0.2$ 秒間でゴム壁の反り変形は最大となり、その後、リザーバーに残された水塊の飛び出しによる流体力と、ゴム壁の弾性復元力がバランスし、ゴム変形がほぼ準定常状態となっていることが分かる。図-26は、SPH粒子で構成されたゴム壁内部の応力分布について、ゴム壁の最大変位が生じる時刻でAntociらの計算結果と比較・検証したものである。引っ張りの曲げ領域で応力が最大となる傾向や、逆に、圧縮の曲げ領域で応力が最小となる傾向などは、定性的に捉えられていると言える。

次いで、砕波を伴う孤立波が衝突する際に生じる衝撃砕波圧による構造体の流力弾性応答・振動解析を行い、本モデルの適用性を検証する。入射した孤立波の波高水深比は $H_1/h_1 = 0.473$ である。なお、格子サイズは $4\text{mm} \times 4\text{mm} \times 4\text{mm}$ とし、時間刻みは 0.0001s とした。初期に自由表面付近に配置される自由表面粒子は約 5 万個とした。一方、右境界に設置された鋼壁 (肉厚 16mm 、ヤング係数 $E=210\text{GPa}$ 、ポアソン比 $\nu=0.3$ 、密度 $\rho=7,800\text{kg/m}^3$) は、約 2.1 万個の SPH 粒子で構成するものとし、下端のみ固定支持で、その他は固体の支配方程式(3.25),(3.26)にしたがって、流体力により自由に変形・運動するものとした。なお、自由表面粒子および鋼壁を構成する SPH 粒子の半径は、いずれも格子サイズの半分 (約 1mm) とし、1 格子当たり 8 個程度配置した。図-27 は、鋼壁に砕波水塊が衝突するシミュレーション結果である。同図には、鋼壁を構成してい

る SPH 粒子に作用する衝撃圧の時空間分布も示している。図-28 は、鋼壁内部の中央断面の測点 St.1～St.3（下端からの距離はそれぞれ $y=0.256$, $y=0.300$, $y=0.344\text{m}$ ）に作用における x 方向及び y 方向の変位の時系列変化および同測点における応力 σ_{yy} とひずみ ε_{xx} の時系列変化を示したものである。以上、既往の研究では、構造と流体を個別に取り扱った弱連成解析が主流であるが、本数値計算法は、このような流体力弾性振動問題を直接的に取り扱うことが可能であることを示している。しながら、今後、構造体内部の応力・ひずみ・変形を計測し、精度検証を重ねていく必要はある。

c) 浮体と自由表面の相互作用問題

ここでは、浮体と自由表面の相互作用問題に適用した例を紹介する。図-29 は、漁船の CAD データから、3 次元形状を SPH 粒子（約 2.5 万個）で表現した例を示している。このように、ライン図があれば、ほぼ自動的に 3 次元物体形状を粒子群で構築することができる。図-30 は、フルード数 $Fr=0.338$ 、レイノルズ数 $Re=10^6$ 相当で、漁船が平水中を航走する際の自由表面運動をシミュレーションしたものである。この時の船側波形について実験と比較したものが図-31 である。また、各 Fr 数（ $=0.1\sim0.4$ ）における全抵抗値について比較したものが図-32 である。両図より、本計算結果は実験と概ね良い一致を示しており、その妥当性が確認できる。また、図-33 は液相領域の保存性について検証したものである。いずれのケースも初期の液相量に比べ、概ね 0.0025% 程度の損失率にとどまっていることから、本手法の保存性が極めて高いことを示す結果と言える。なお、本手法は、一定の時間間隔もしくは液相の保存性がある閾値を下回った際に、自由表面粒子の再配置を繰り返し行うことで、液相の体積率を回復させる工夫を行っている。以上のことから、物体に作用する抵抗値の評価ツールとしても有用であることが分かる。

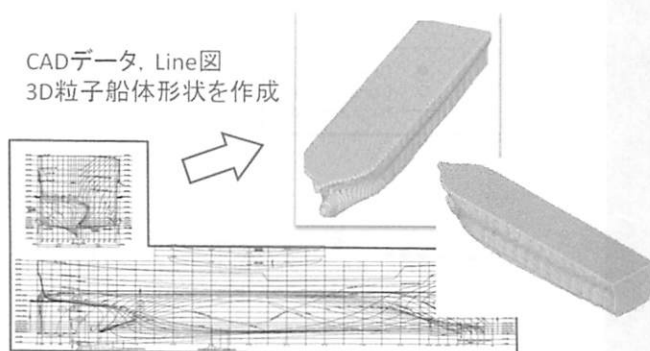


図-29 3 次元船型ライン図から 3 次元粒子分布への変換

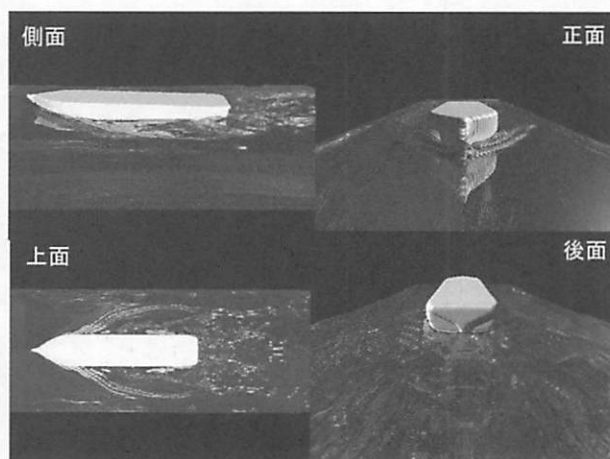


図-30 漁船の平水中航走シミュレーション

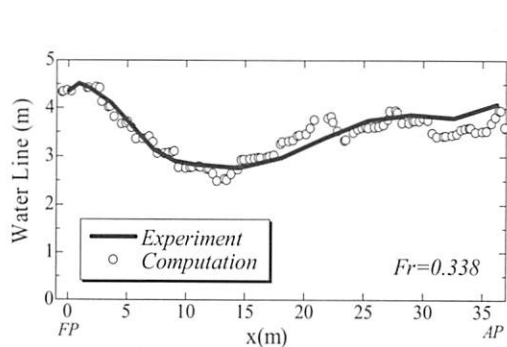


図-31 船側波形の比較

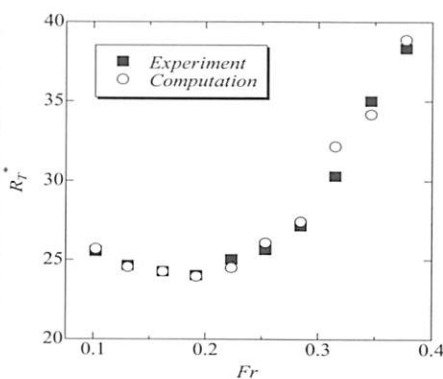


図-32 全抵抗値の比較

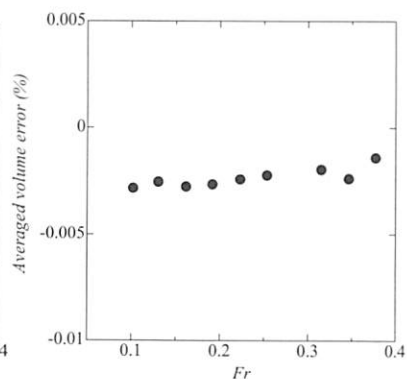


図-33 液相体積率 (=数値誤差) の検証

次いで、波浪中を航行するタンカーの浮体運動のシミュレーションに適用した例を示す。本計算では、フルード数 Fr およびレイノルズ数 Re は、船長・船速を代表値として、それぞれ $Fr=0.1385$ 、 $Re=3.5\times 10^6$ とした。向かい波の波高 $H_w/L_{pp}=0.02$ とし、造波は微小振幅波理論に基づき、波高・周期、船速を初期条件として与えた。また、SPH 粒子で構成されたタンカーは、実験条件にあわせて初速度 0.434m/sec で曳航させた。但し、船体運動は Heave、Pitch のみを考慮し、その他の運動は固定した。Euler 格子は等間隔で $0.005\sim 0.01 L_{pp}$ とし、自由表面粒子径は $0.00125\sim 0.0025 L_{pp}$ 、SPH 粒子径は $0.00125 L_{pp}$ とした。初期に自由表面に配置される自由表面粒子は、表面から 2 格子幅分の領域に対して平均約 40 万（最大 90 万）、船体の SPH 粒子は約 1.5 万とした。図-34 は、規則波（向波）中を航行するタンカーに適用したものであり、船体運動およびスプラッシュ現象を伴う水面変動のスナッスナップショットの一例である。この図から、Heave 運動および Pitch 運動を伴いながら航行するタンカーには、スラミング現象や海水打ち込み現象が発生していることがわかる。次いで、図-35 は、Heave 運動、Pitch 運動および波浪中抵抗増加について、全ての実験ケースと比較するとともに、Strip 法との比較も同時に行い、本数値計算手法の精度検証を行う。図より、本数値計算手法は実験結果と概ね一致していることが分かる。しかしながら、Heave 運動については $\lambda/L=0.8$ において過大評価、 $\lambda/L=1.25$ において過小評価となっているため、今後、さらなる検証が必要であると考えられる。一方、Strip 法はこのような問題には適用できないことが分かる。

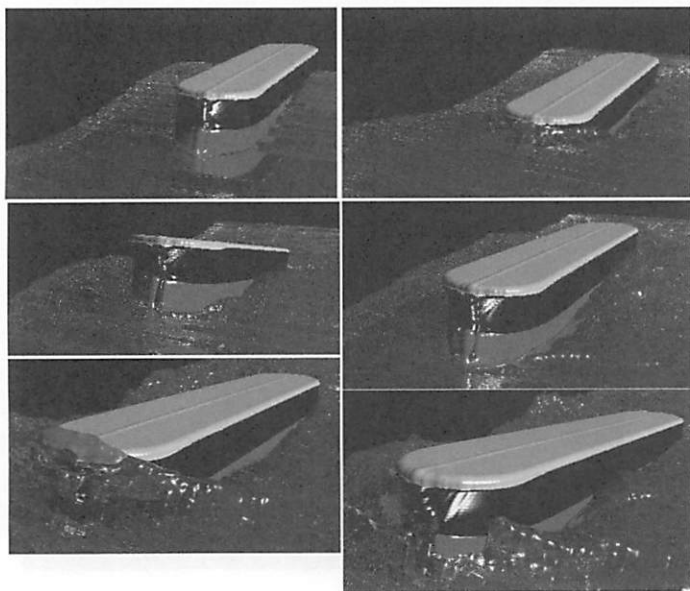


図-34 波浪中を航行するタンカーの運動シミュレーション

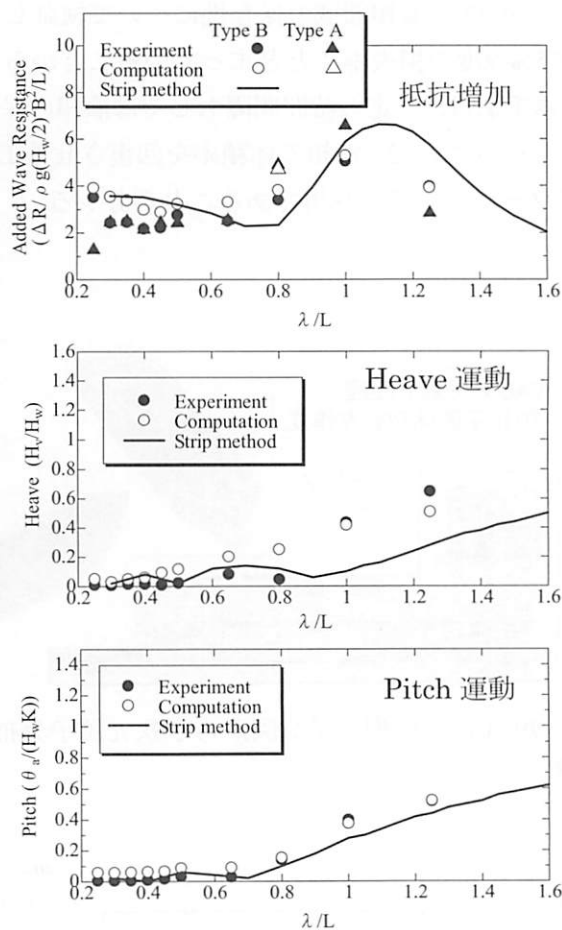


図-35 波浪中運動の比較検証

5. おわりに

本稿では、オイラー法とラグランジュ法の混合法であるセミラグランジュ法による移流計算法について基礎的な解説を行うとともに、その代表的な計算法である CIP 法の基礎・発展を解説・紹介した。さらに、近年、格子法と粒子法のメリットを融合させたオイラー・ラグランジュ型自由表面追跡法として、著者らが開発している Lagrange 粒子付 Euler 型スキームを解説するとともに、種々の固気液相互作用問題への適用例を紹介した。先にも述べたが、数値流体力学のアプローチによって、海岸工学に関連する自由表面問題および固気液相互作用問題を数値シミュレーションする場合、既往の数値計算法の利点・欠点を理解した上で、適用限界を十分把

握しておく必要がある。仮に、既存の CFD 計算法や市販ソフトウェアを何の疑いもなく単に操るだけのユーザーが増えてしまった場合、当該分野の発展は望めない。読者の中から、独自に作成したプログラム・計算法を用いて、これまで解決できなかった問題、適用が困難であった問題に、果敢にチャレンジする技術者・研究者が一人でも多く現れることを期待している。

参考文献

- 1) C.S.Peskin : Numerical analysis of blood flow in the heart, J. Comput. Phys., 25, 220 (1977).
- 2) W.H.McMaster : Computer codes for fluid-structure interactions, Lawrence Livermore Lab. Report, (1984).
- 3) T.Yabe and P.Y.Wang : Unified Numerical Procedure for Compressible and Incompressible Fluid, J Phys. Soc. Japan, 60, 2015 (1991).
- 4) T.Yabe, F. Xiao and T. Utsumi : The constrained interpolation profile method for multiphase analysis, J. Comput. Phys., 169, 556 (2001).
- 5) A.Priestley : A quasi-conservation version of the semi-Lagrangian advection scheme, Mon. Wea. Rev., 121, 621 (1993).
- 6) K.Sakurai, T.Aoki, W.H.Lee and K.Kato : Poisson equation solver with fourth-order accuracy by using interpolated differential operator scheme, Computers & Mathematics Applications, 43, 621 (2002).
- 7) T.Nakamura, R.Tanaka, T. Yabe : Multi-Dimensional Conservative Scheme (CIP-CSL4) in Non-Conservative Form, CFD Journal, Special Number, pp.574-585 (2001).
- 8) T. Nakamura, R.Tanaka, T. Yabe and K.Takizawa : Exactly Conservative Semi-Lagrangian Scheme for Multi-Dimensional Hyperbolic Equations with Directional Splitting Technique, J. Comput. Phys., 174, pp.171-207 (2001).
- 9) T.Yabe and F.Xiao : Description of Complex and Sharp Interface during Shock-Wave Interaction with Liquid-Drop, J. Phys. Soc. Japan, 62, 2537 (1993).
- 10) T. Yabe et al. : Higher-Order Schemes with CIP Method and Adaptive Soroban Grid Towards Mesh-Free Scheme., J. Comput. Phys., 194, pp.57-77 (2004).
- 11) F.Xiao, R.Akoh and S.Ii : Unified formulation for compressible and incompressible flows by using multi-integrated moments II : Multi-dimensional version for compressible and incompressible flows, J. Comp. Phys., 213, 31 (2006).
- 12) F.Xiao and A.Ikebara : An efficient method for capturing free boundaries in multi-fluid simulations, Int. J. Numer. Meth. Fluids, 42, 187 (2003).
- 13) F.Xiao, Y. Honma and T.Kono : A simple algebraic interface capturing scheme using hyperbolic tangent function, Int. J. Numer. Meth. Fluids, 48, 1023 (2005).
- 14) 池端昭夫, Xiao : 日本機械学会年次大会予稿集, (2002).
- 15) T. Yabe et al. : Challenge of CIP as a universal solver for solid, liquid and gas, International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol.47, pp.655-676 (2005).
- 16) 滝沢研二: "CIP ソロバン格子による船舶シミュレーション" 第 55 回理論応用力学講演会集 3. 287-288 (2005).
- 17) 矢部ら, CIP 法～原子から宇宙までを解くマルチスケール解法～, 森北出版, (2003).
- 18) Enright, D., Fedkiw, R., Ferziger, J. and Mitchell, I. : A hybrid particle level set method for improved interface capturing, Journal of Computational Physics, 183, pp.83-116 (2002).
- 19) Losasso, F., Talton, J., Kwatra, N. and Fedkiw, R. : Two-way Coupled SPH and Particle Level Set Fluid Simulation", IEEE TVCG 14, 797-804 (2008).
- 20) 陸田秀実・新蔵慶昭・土井康明 : 衝撃砕波圧作用下における固体流体連成解析法と構造物の動的応答特性, 海岸工学論文集, 第 55 巻, pp.31-35 (2008).

- 21) 陸田秀実・新蔵慶昭・土井康明：Lagrange 粒子付 Euler 型スキームを用いた衝撃圧による構造物の動的応答解析，日本船舶海洋工学論文集，第 8 号，pp.195-203 (2008).
- 22) 陸田秀実，栗原健浩，黒川剛幸，川上健太，土井康明：Lagrange 粒子付 Euler 型スキームによる流体構造連成解析法の適用性，土木学会論文集，B2, Vol.65, No.1, pp.51-55 (2009).
- 23) Suandar BASO, Hidemi MUTSUDA, Takehiro KURIHARA, Takayuki KUOKAWA, Yasuaki DOI, Jiangang SHI : An Eulerian Scheme with Lagrangian Particle for Evaluation of Seakeeping Performance of Ship in Nonlinear Wave, International Journal of Offshore and Polar Engineering (ISSN 1053-5381), Vol.21, No.2, pp.103-110 (2011).
- 24) Ishii, E., Ishikawa, T and Tanabe, Y. : Particle/CIP hybrid method for predicting motions of micro and macro free surfaces, Proc. of ASME HT-FED, HT-FED2004-56142, (2004).
- 25) 石井英二・石川 亨・田辺好之：粒子法とグリッド法の結合によるマルチスケール気液界面解析，Thermal Science & Engineering, Vol.14, No.3, pp.51-59, (2006).
- 26) Liu, L., Koshizuka, S. and Oka, Y. : Computational of multiphase flow by coupling the MPS method with mesh method, 日本原子力 2003 年春の年会, 479, (2003).
- 27) Tryggvason, G., B.Bunner, A. Esmaeeli, D.Juric, N. Al-Rawahi, W. Tauber, J. Han, S. Nas, Y. -J. Jan : Journal of Computational Physics, 169, pp.708-759 (2001).
- 28) Gingold R.A., Monaghan J.J. : Smoothed particle hydrodynamics, theory and application to non-spherical stars, *Mon. Not. Roy. Astr. Soc.* Vol.181, pp.375-389 (1977).
- 29) Gray, J. P., J. J. Monaghan and R. P. Swift : SPH elastic dynamics, *Computer methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190, pp.6641-6662, (2001).
- 30) Baraff, D. : An introduction to physically based modelling : Rigid body simulation I ～Unconstrained rigid body dynamics ～, *SIGGRAPH'97 course notes*, D3 (1997).
- 31) Greenhow, M. and Lin W.M. : Nonlinear free surface effects : experiments and theory, *Report No.83-19, Dept. of Ocean Engineering, MIT*, (1983).
- 32) Antoci, C., M. Gallati and S. Sibilla : Numerical simulation of fluid-structure interaction by SPH, *Computers and Structures*, 85, pp.879-890 (2007).