

水工学シリーズ 12-B-1

自由表面流れの概要，基礎方程式と 離散化および応用例

京都大学 防災研究所

森 信人

土木学会
水工学委員会・海岸工学委員会

2012 年 8 月

自由表面流れの概要，基礎方程式と離散化および応用例

Outline of Free Surface Flow Modeling

森 信人
Nobuhito MORI

1 沿岸における波浪場と乱れ

1.1 基礎方程式と自由表面の取り扱い

一般に非圧縮流体場の支配方程式は，以下の連続式（質量保存）と Navier-Stokes 方程式（運動量保存）により記述される．

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{Du_i}{Dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + F_i \quad (2)$$

ここで， $\vec{x} = (x, y, z) = (x_1, x_2, x_3)$ は空間座標， t は時間座標，流速 $\vec{u} = (u, v, w) = (u_1, u_2, u_3)$ ，圧力 p ， ν は動粘性係数， F_i は重力などの体積力である．圧縮性流体と異なり，この支配方程式には圧力 p に関する時間発展項が含まれないため，連続式と Navier-Stokes 方程式を連立して書く時間毎に境界条件を満足させる解を求める必要がある．このプロセスでは，ポアソン方程式

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = f(x, y) \quad (3)$$

を解く必要があり，この部分に大きな流体計算コストが掛かる．

このような Navier-Stokes 方程式を用いた流体計算の沿岸波動問題への応用として重要となるのは，自由表面と乱流の取り扱いである．特に，海岸工学では自由表面の取り扱いが重要であり，重力波の伝播を正しく解くことが最重要視される．一般に非圧縮・非回転の完全流体における線形波動運動には，水面変位 η と速度ポテンシャル ϕ を用いて以下の方程式が用いられる．

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + g\eta = 0 \quad z = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial \eta}{\partial z} = 0 \quad z = 0 \quad (5)$$

このため，水面変位 η が説明変数となるため，自由表面の位置である水面変位については正確に取り扱われる．一方，Navier-Stokes 方程式を用いた流体計算では，自由表面が陽に現れないため，水面を高精度に追跡する方程式（例えば VOF 関数，密度関数，レベルセット関数）とこれを高精度で移流させるスキーム（例えば，高精度差分，CIP 法）が必要となる．

このシリーズでは，この章以降は

(2) VOF 法による数値波動水槽：名古屋大学大学院工学研究科 川崎浩司

(3) セミラグランジュ的移流計算法：広島大学大学院工学研究院 陸田秀実

(4) 高精度粒子法：京都大学工学研究科 後藤仁志

(5) 漂砂の計算法と今後の展望：東京海洋大学大学院海洋科学技術研究科 岡安章夫

(6) 海岸構造物の耐波設計と数値波動水槽の活用：大成建設 伊藤一教

(7) 混相流，ポーラス構造物への適用法：京都大学工学研究科 原田英治

(8) 統一ベンチマークテストによる数値モデルの特性評価：北海道大学大学院工学研究科 渡部靖憲

と構成されており，この中の2，3の章では，自由水面を高精度に捕獲する方程式もしくはスキームについての解説とその応用について記述されている。

1.2 波浪場の評価手法と乱れの扱い

一般に流れ場において，乱れは様々な役割を果たしている。それらは，後述するレイノルズ応力などの見かけの剪断力により流れ場の平均プロファイルを変化させることや，運動量交換と共に流体内に混合している物質の拡散を増大させること，あるいは乱れエネルギーのカスケードダウンを通して主流のエネルギーの減少（エネルギーの逸散）を引き起こすこと，などである。沿岸波浪場においても乱れの影響は大きく，海浜流場の解析や，構造物や底面近傍の流れ，碎波などの現象においては，流れ場を乱流場ととらえることが重要となり，乱れによる流れ場（あるいは波浪場）の影響が流れのパターンの決定に支配的ともなり得る。

乱流に共通の特徴としては，まず時空間的な非定常性（確率的変動性）とコヒーレントな主流の構造，波数・周波数空間でのパワースペクトルの連続性などを挙げる事ができる。両者を適切にモデル化するため，以下で述べる

1) レイノルズ平均モデル

2) ラージエディシミュレーション

の2種類が広く用いられているが，乱流を模擬するそれぞれの手法のうちどれが最も適切であるか，計算コストと精度の兼ね合いはどうかなどは，具体的に対象となる流れ場の条件や計算上の制約などを考慮して決定されるべきものである。

自由表面を持つことと乱流のモデル化は，基本的に別のトピックであるが，沿岸部の波動においては，底面における乱流よりも，自由表面の碎波に起因する乱流成分が大きく，実質上，両者はリンクすることになる。以下では，数値波動水槽で用いられる代表的な乱流モデルとそのコンセプトについて概説する。

2 レイノルズ平均モデル

2.1 基本的な考え方

層流と異なり，乱流は様々な時空間スケールを持つ非定常な現象である。乱流が何らかのコヒーレントな特徴を持つ主流と，主流と異なるスケールの雑音に近い特徴を持つ乱れ成分に分離できるとの仮定の下で考えられたスケール分離方法としてレイノルズ分解がある。レイノルズ分解では，時間・空間的に変化する流速 u が，平均 U とその変動量 u' の和で表されると仮定する。平均の取り方は，主に時間平均，空間平均そしてアンサンブル平均の3つが考えられるが，レイノルズ分解自体はこのどれかでなければならないとは規定されない。一般に乱流理論はアンサンブル平均を想定しているが，以下では時間平均を“平均”として考える。一般に，碎波帯などにおける波動運動は，流れの非定常性，波動運動の周期性が混在するために，“平均”として何を考えるべきかは興味深い問題である。特に波動運動が非回転のポテンシャル流れに近い場合，スケールの分離に注意が必要となる。ここでは一般的な流体力学の方法に従い，以下の様に短時間 T の移動平均を考える。

$$u(x, t) = U(x, t) + u'(x, t) \quad (6)$$

$$U(x, t) = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} u(x, t) dt \quad (7)$$

$$\overline{u'}(x, t) = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} u'(x, t) dt = 0 \quad (8)$$

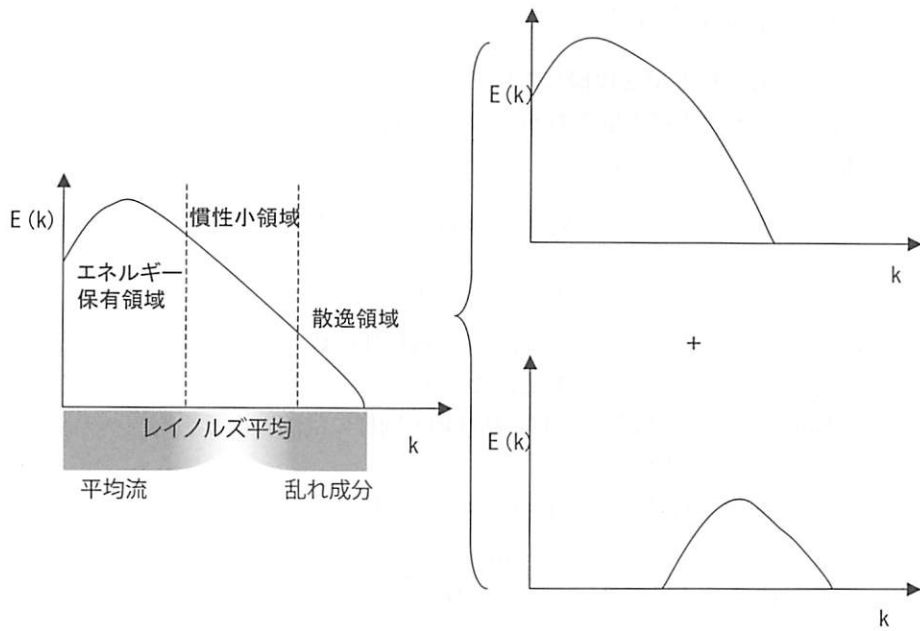


図 1: レイノルズ分解により分離される流速の波数スペクトルの概念図 (k:波数)

この操作は、他の速度成分や圧力などの変数についても成り立つと仮定される。流速の2成分間の相関を考えると以下のような関係が得られる。

$$\overline{u_1 u_2} = \overline{U_1 U_2} + \overline{u'_1 u'_2} \quad (9)$$

式(9)の右辺第2項は、乱れ成分の相互相関であり、一般にこの相関は0でない。このため、レイノルズ分解された Navier-Stokes 方程式にはレイノルズ応力が付加されることになる。

非圧縮流体に対する連続式と Navier-Stokes 方程式についてレイノルズ分解を行うと、以下のレイノルズ方程式 (Reynolds-Averaged Navier-Stokes 方程式、レイノルズ平均 Navier-Stokes 方程式) が得られる。

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \quad (10)$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_j} + F_i \quad (11)$$

$$S_{ij} = \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad (12)$$

ここで $\vec{u} = u_i = U_i + u'_i$, $p = P + p'$, S_{ij} は歪みテンソル, F_i は重力などの体積力である。乱れにより生じた運動量変換に伴う見掛け上の応力であるレイノルズ方程式を流れの場の解析に応用するには、レイノルズ分解により、平均化された Navier-Stokes 方程式であるレイノルズ方程式自体には、スケール分離以外には何の近似も行われていない。式(11)右辺第3項に現れる $\overline{u'_i u'_j}$ は、式(9)に示した乱れ成分の相互相関であり、一般にこれに密度を乗じた

$$\tau_{ij} = -\rho \overline{u'_i u'_j} \quad (13)$$

がレイノルズ応力と呼ばれる。このレイノルズ分解により加わった未知量であるレイノルズ応力を何らかの形で評価する必要があり、平均量からレイノルズ応力を与える定式化が数多く試みられている。後述するように、乱れ成分の2次相関であるレイノルズ応力 $\overline{\rho u'_i u'_j}$ を与えるためには、より高次の相関が必要であり、何らかの近似無しに方程式を閉じることが出来ない（この関係を、乱流クローージャと呼ぶ）。このため、乱流について、以下で述べるような様々なモデルが考えられてきた。レイノルズ方程式に何らかの仮定の下で導出された乱流モデルを加えた方程式系は、まとめて RANS モデルと呼ばれる。

2.2 レイノルズ応力と乱流エネルギー

RANS モデルは、乱れの影響が粘性項を模擬した形で表わされる渦粘性モデルと、レイノルズ応力輸送方程式自体をモデル化する応力方程式モデルに大別される。ここでは、工学的アプリケーションの多い、渦粘性モデルについて説明する。渦粘性モデルにおいては、

$$-\overline{u'_i u'_j} = \nu_T S_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} k \quad (14)$$

$$k = \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i} \quad (15)$$

と表され、ここで k は、乱流エネルギー、 $\nu_T = \mu_T / \rho$ は、動粘性係数とのアナロジーから渦動粘性係数と呼ばれる乱流によるエネルギー散逸係数である。この乱流によるエネルギー散逸が分子粘性による散逸と類似するという仮定は、ブシネスク (Boussinesq) 近似と呼ばれ、粘性項と同様に乱流による平均流への影響は、流線に垂直な方向の速度勾配に比例すると仮定している。

一方、乱流エネルギー k の輸送方程式は、以下のように表される。

$$\frac{\partial k}{\partial t} + U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = -\overline{u'_i u'_j} \frac{\partial U_j}{\partial x_j} - \nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial k}{\partial x_j} - \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i u'_j} - \frac{1}{\rho} \overline{p' u'_j} \right) \quad (16)$$

ここで、右辺第2項を

$$\varepsilon = \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \quad (17)$$

と表記し、また乱流エネルギーの乱流拡散である式 (16) 右辺第3項 (乱れの3重相関と圧力変動と乱れとの相関) を以下の様に乱流エネルギーの勾配でモデル化することが可能であると仮定する。

$$\frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i u'_j} + \frac{1}{\rho} \overline{p' u'_j} = -\frac{\nu_T}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} \quad (18)$$

ここで σ_k は乱流プラントル数と呼ばれる定数である。この仮定は、水路流れに対する DNS の結果 Mansour ら (1987) との比較からそれほど矛盾のない仮定であることがわかっている。式 (18) を式 (17) に代入すると、以下の様に書き換えられる。

$$\frac{\partial k}{\partial t} + U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{1}{\rho} \tau_{ij} \frac{\partial U_j}{\partial x_j} - \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_T}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] \quad (19)$$

ここで右辺第1項のレイノルズ応力は、式 (14) より平均流の勾配と乱流エネルギーより求めることが出来るが、右辺第2項のエネルギー散逸項 ε を決めることが出来ないため、何らかのモデル化が必要となる。以下で述べる2方程式乱流モデルは、式 (14) と式 (19) を出発点として、様々な流れに対して適用できるように、事前情報無しに方程式を閉じることを目標として展開されてきた。

2.3 RANS モデルにおける乱流モデル

式 (14) に示されるように、RANS モデルでは、乱れの平均流への影響を渦動粘性係数 ν_T で代表させ、粘性項の係数を $\nu + \nu_T$ として乱流を取り扱う。この渦動粘性係数 ν_T をどのような物理量の関数とすべきかについては任意性があり、長く議論が行われてきた。式 (19) に示したように、乱流エネルギー k を変数の1つとして用いることについてはほとんど異論はないが、これ以外の変数に何を取るのかという選択については、次元解析による結果を基に主に3つの考え方が用いられる。

第1の考え方は、渦動粘性係数が、乱流エネルギー k と乱流スケール l で表されるというものである (Rotta, 1968)。

$$\nu_T \propto k^{1/2} l, \quad \varepsilon \propto k^{3/2} / l \quad (20)$$

渦動粘性係数が k と l の関数で表されるという考え方は、後述の1方程式モデルに用いられる。一方、乱流エネルギー k とエネルギー散逸率 ε を乱れの基本量と考えると、渦動粘性係数は次のように表される (Chou, 1945)。

$$\nu_T \propto k^2 / \varepsilon, \quad l \propto k^{3/2} / \varepsilon \quad (21)$$

エネルギー散逸率は、式 (19) の乱流エネルギー輸送方程式やレイノルズ応力の方程式に陽に現れることと、乱流エネルギーとその散逸率という組み合わせが力学的に理解し易いことから、後述するように 2 方程式モデルに良く用いられる。最後に紹介するのは、渦動粘性係数が、乱流エネルギー k と散逸率 (specific dissipation rate) ω で表されるというものである (Kolmogorov, 1941; Saffman, 1970; Wilcox, 1998)。

$$\nu_T \propto k/\omega, \quad l \propto k^{1/2}/\omega, \quad \varepsilon \propto \omega k \quad (22)$$

ω は $[T^{-1}]$ の次元を持つ量であるが、物理的な意味としては、単位時間・単位体積あたりのエネルギー散逸率、もしくは乱流の代表時間周波数であり、その意味合いが曖昧であるとの指摘もある。この $k-\omega$ の組み合わせは 2 方程式モデルの中で、 $k-\varepsilon$ の組み合わせについて用いられるものであり、大気や海洋などの地球流体の分野で広く見られる。

1 方程式モデル 式 (20) に示したように、渦動粘性係数が、乱流エネルギー k と乱流スケール l で表されることを出発点としたモデル化は、平均流のプロファイルがある程度予想される場合 (長さスケール l が明示的) に有効である。この場合、係数 C_D を用いて $\varepsilon = C_D k^{3/2}/l$ と表し、式 (19) に代入すると次式を得る。

$$\frac{\partial k}{\partial t} + U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{1}{\rho} \tau_{ij} \frac{\partial U_j}{\partial x_i} - C_D \frac{k^{3/2}}{l} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_T}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] \quad (23)$$

$$\nu_T = k^{1/2} l \quad (24)$$

この形式が、RANS モデルにおいて 1 方程式モデルと呼ばれる乱流モデルである。この場合、レイノルズ方程式に対して、式 (24) で得られる渦動粘性係数を加えることになる。式 (23) のような 1 方程式モデルでは、後述の 2 方程式モデルより簡単であるものの、乱流の長さスケール l を明示的に与える必要があり、汎用的に用いることが難しいという弱点がある。

2 方程式モデル 渦動粘性係数 ν_T を外的条件を与えずに平均流や乱流エネルギーから求められるように、構成式をもう 1 つ加えたものが 2 方程式モデルである。式 (21) や式 (22) に示したように、エネルギー散逸率 ε や ω を平均流や乱流エネルギー k から求めることが出来れば、1 方程式乱流モデルに比べて適用性範囲の広いモデルが得られることが予想される。もっとも一般的な 2 方程式モデルは、 $k-\varepsilon$ モデル (Jones and Launder 1972; Launder and Spalding, 1974) である。 ε に対する輸送方程式の導出は割愛するが、乱流エネルギー k と類似した方程式になる (梶島, 1999; ファーツィガー, 2003)。

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + U_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} \tau_{ij} \frac{\partial U_j}{\partial x_i} - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_T}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] \quad (25)$$

$$\nu_T = C_\mu k^2 / \varepsilon \quad (26)$$

ここで、 $C_{\varepsilon 1} = 1.44$, $C_{\varepsilon 1} = 1.92$, $\sigma_\varepsilon = 1.3$, $C_\mu = 0.09$ であり、これらの係数は、自由噴流の実験結果に一致するように定められた値であり、式 (19) 中の σ_k については、 $\sigma_k = 1.0$ となっている。式 (19)、式 (25)、式 (26) は、まとめて高レイノルズ数型 $k-\varepsilon$ モデルと呼ばれ、工学的にはかなり広い範囲で用いられている。

高レイノルズ数型 $k-\varepsilon$ モデルでは、流れが極端に非等方になる固体壁近傍を取り扱うことが難しい。そこで、式 (25) 中の $C_{\varepsilon 2}$ および式 (26) 中の C_μ を Re 数の関数とし、壁近傍で正しい振る舞いをするような低レイノルズ数型 $k-\varepsilon$ モデルが提案されている (Jones and Launder, 1972; 明・笠置, 1988)。低レイノルズ数型 $k-\varepsilon$ モデルを用いることにより、工学的に重要な壁面近傍の流れについても RANS モデルを適用することが可能となっている。ここで注意すべきは、式 (19)、式 (25)、式 (26) 中に含まれる係数は、自由噴流のケースより定められた値であり、汎用的に用いることが可能である保証はない点に注意が必要である (Launder and Spalding, 1974)。現在のところ、実験結果との比較から、碎波帯などの波動乱流においてもそのまま用いられている。

2.4 まとめ

上記の $k-\varepsilon$ モデルなどの2方程式乱流モデルでは、式(14)のようにレイノルズ応力に等方性を仮定しているため、開水路の2次流など非等方な乱流については適用することが難しい。また、このためレイノルズ応力そのものを変数とするレイノルズ応力モデルが提案されている。しかし、式が複雑であり、工学的なアプリケーションには余り用いられることはなく、現在のところ工学分野では、上記の $k-\varepsilon$ モデルが広く用いられている。

以上、レイノルズ分解により Navier-Stokes 方程式をスケール分離し、乱れ成分の平均流への影響を $k-\varepsilon$ モデルなどを用いて表す RANS モデルについて概説した。RANS モデルは、平均流と乱れの関係から乱流特性を推定するモデルである。このため数値計算を行う場合、格子サイズを平均流の空間変化程度に取れば良いので、計算コストはそれほど大きくなく、このため広く用いられてきた。しかし、レイノルズ分解によるスケールの分離は、平均流と乱れのスケールがオーバーラップしないという仮定の下に成り立っている。これは、乱流の連続したスペクトル構造を考えると矛盾を包含している。RANS モデルに対し、Navier-Stokes 方程式の平均化・粗視化を計算格子の大きさに基づいて数値的に陽的に分離する手法として、ラージエディシミュレーション (Large Eddy Simulation, 以下略して LES) がある。次節では、RANS モデルとの対比を取りつつ LES について概説する。

3 ラージエディシミュレーション

3.1 基本的な考え方

全ての流れのスケールに対して Kolomogolv の乱流統計量を基礎としたモデルによって時間あるいはアンサンブル平均物理量を計算する RANS モデルとは異なり、Large Eddy Simulation (LES) ではカットオフ長さを境に大スケールと小スケールの2つの変動スケールに分離し、小スケール変動に対して乱流統計モデルを適用する。すなわち、物理空間においては瞬時物理量を、乱れによる高波数変動をカットオフ長さ Δ (通常計算グリッド幅を基準とする) を代表長さとする空間フィルターで取り除いた解像 (あるいは Grid Scale; GS) スケールの物理量と、瞬時量からの残差とに分解する (図2参照)。これは波数空間では、カットオフ波数 ($k_c = \pi/\Delta$) を境としたローパスフィルターの役割を果たし、 k_c より低波数スペクトルのみ直接計算により解像され、高波数スペクトルに対してモデル化が行われることになる (図3参照)。

LES は空間フィルターを使って乱れのモデル化を行うため、瞬時の解像流速場を取得することが可能であり、碎波など乱流を含む水面波を計算する場合にはこれが重要な長所となる。例えば、碎波帯において生成される様な、非定常かつ大規模渦や大スケール変動が顕著となる乱流は、時間平均あるいはアンサンブル平均を基本統計量とする RANS モデルにとって苦手な現象であり、一般に精度や信頼性の点で有利とは言えない。一方、瞬時流速場を取得可能な LES は、大スケール変動についても陽的に解像するため、こうした現象について、時々刻々のそのまの現象を再現できる。しかしながら、この特徴をもっても、瞬時計算結果を実験結果と比較しようとする時にしばしば問題が生じる。初期値問題として決定論的に得られる LES の結果は、厳密な意味で一致しない初期値のもとで行われる物理実験結果 (例えば、碎波後の水面形など) と同一時刻で一致する保証はない。このような場合、位相平均あるいは初期値をグリッドスケールで変化させた LES の結果のアンサンブル平均等の統計量を実験統計量と比較する必要がある。

自由表面乱流に対して RANS モデルと LES に共通して未解明な問題は、水面上の乱れである。固定壁と異なり、水面近傍上はほぼ Free slip と見なせるが (気液二相流を扱う場合は別として)、乱れは非等方と特殊な条件であり、その統計量の一般化はされていないために適当なモデルがない状態である。また、LES で用いる空間フィルターの範囲内に水面がある場合のフィルター操作された結果についてはよく吟味されるべき問題である (Labourasse ら, 2007)。

この節では、LES について、水面乱流特有の問題ではなく、一般的に広く使われている定式化を概説する。詳細については専門書 (例えば Sagaut, 2000)、モデルに関する研究について原著論文 (例えば Meneveau and Katz, 2000) を参照頂きたい。

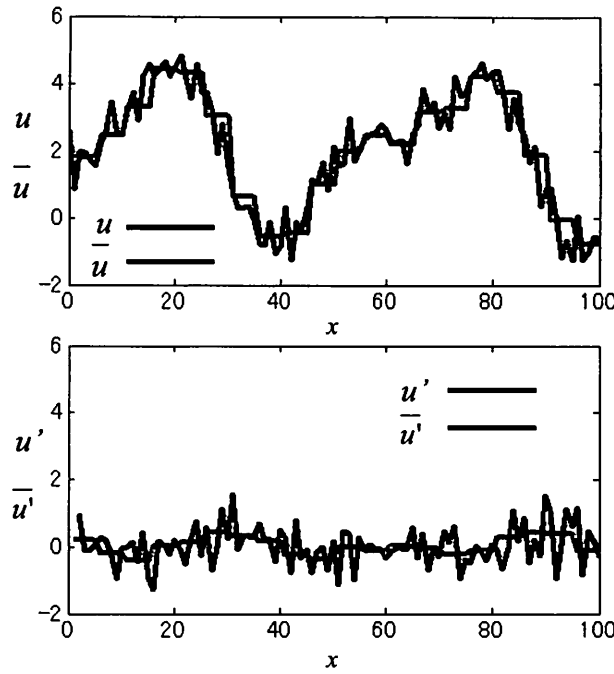


図 2: 瞬時流速 u , 解像流速 $\bar{u}$, 残差 (SG) 流速 u' とフィルタリングされた残差流速 $\bar{u}'$ の例.

3.1.1 フィルター操作

LES で用いられるフィルター操作は、一般的に次のように定義される.

$$\overline{\psi(\mathbf{x}, t)} = \int G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \psi(\mathbf{x}', t) d^3 \mathbf{x}' \quad (27)$$

この積分は領域全体に渡る. このフィルター関数 G は次の正規化条件を満足する.

$$\int G(\mathbf{x}') d^3 \mathbf{x}' = 1 \quad (28)$$

フィルター操作により解像されない残差は、瞬時 ψ と GS 量 $\bar{\psi}$ の差で表わせらせる.

$$\psi'(\mathbf{x}, t) = \psi(\mathbf{x}, t) - \overline{\psi(\mathbf{x}, t)} \quad (29)$$

これは、レイノルズ分解の変動量と似ているが、違いは、一般にフィルタリングされた残差は 0 にならないことである (図 2 参照).

$$\overline{\psi'(\mathbf{x}, t)} \neq 0 \quad (30)$$

LES で使われるフィルター関数は次の特徴をもつ様に設計され、Navier-Stokes 式への適用を可能にしている.

1. フィルター操作後の定数は不変 ($\bar{a} = a$, 式 (28) から明らか)
2. 線形性が保持される ($\overline{\psi_1 + \psi_2} = \bar{\psi}_1 + \bar{\psi}_2$),
3. 微分の交換が可能 ($\overline{\frac{\partial \psi}{\partial x}} = \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x}$).

またフィルター関数は、物理空間的・フーリエ空間の両方でサポートコンパクトである必要があるが、これを満たす関数は存在しないため、その選択には何らかの近似と任意性が存在する.

現在まで多様なフィルター関数が提案されてきたが、古くから最も良く使われてきたシンプルな関数は、トップハット、ガウシアンそしてシャープスペクトルフィルターである. トップハットフィルターは、次の式で表わさ

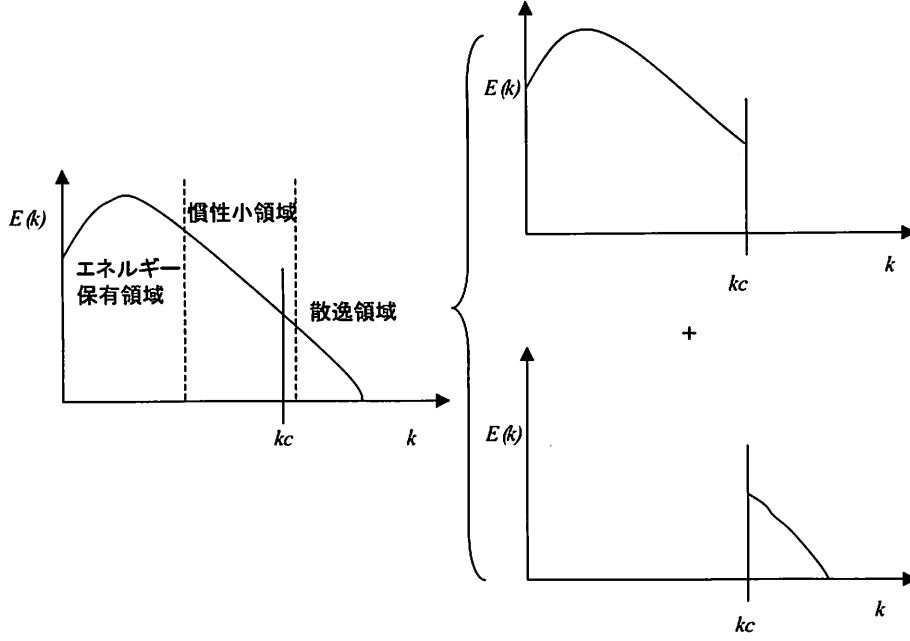


図 3: カットオフ波数を境とした解像されるエネルギースペクトル (右上) とモデル化されるスペクトル (右下).

れ, 空間幅 Δ 内の $\mathbf{x}' - \Delta/2 < \mathbf{x} < \mathbf{x}' + \Delta/2$ 内の平均を表す.

$$G(\mathbf{x}) = \frac{1}{\Delta} H(\Delta/2 - |\mathbf{x}|) \quad (31)$$

ガウシアンフィルターは, 平均 0, 分散 $\sigma^2 = \Delta^2/12$ のガウス分布である.

$$G(\mathbf{x}) = \left(\frac{6}{\pi \Delta^2} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{6|\mathbf{x}|^2}{\Delta^2} \right) \quad (32)$$

シャープスペクトルフィルターは, そのフーリエ変換が $H(kc - |k|)$ で表わされ, 波数空間でシャープなローパスフィルターとなる.

$$G(\mathbf{x}) = \frac{\sin(\pi \mathbf{x} / \Delta)}{\pi \mathbf{x}} \quad (33)$$

図 3.1.1 にこれらのフィルター関数形を示す.

Navier-Stokes 式がもつ移動・回転座標に対する普遍性は, フィルター操作された Navier-Stokes 式にも保持されなければならない. すなわち, 物理空間で極端に歪んだ座標系変換を行う場合, 普遍性を失わないフィルター関数を選択する必要がある, 注意が必要である.

3.2 レオナルド分解

RANS モデルと同様に, Navier-Stokes 式を出発点とし, これに対して前述した空間フィルター操作を行うと, 次式が得られる.

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \bar{u}_i \bar{u}_j = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (34)$$

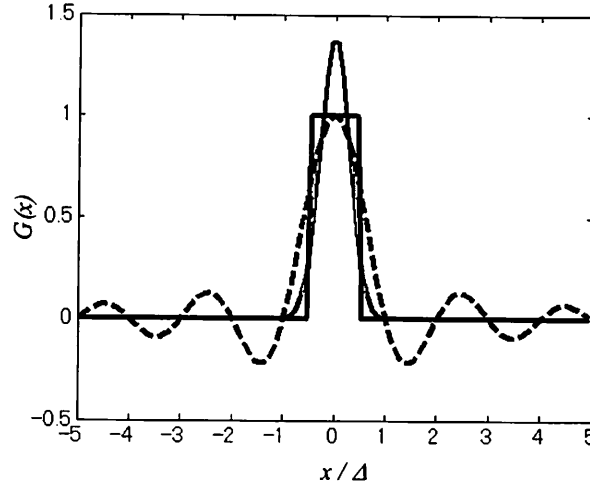


図 4: トップハットフィルター (黒実線), ガウスフィルター (灰実線), シャープスペクトルフィルター (黒破線) .

式 (34) のフィルタリングされた非線形項は、そのままでは解けないので、次のようにレイノルズ分解と類似した方法で分解する。

$$\overline{u_i u_j} = \overline{(\overline{u_i} + u'_i)(\overline{u_j} + u'_j)} = \overline{u_i} \overline{u_j} + \overline{u_i u'_j} + \overline{u'_j u'_i} + \overline{u'_i u'_j} \quad (35)$$

この場合、レイノルズ分解とは異なり $\overline{u_i}, \overline{u_j}$ が 0 でないので、クロス項 $(\overline{u_i u'_j}, \overline{u'_j u'_i})$ を無視できないことに注意する。式 (35) を式 (34) に代入すると、次式を得る。

$$\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_i} \overline{u_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u_i u'_j} + \overline{u'_j u'_i} + \overline{u'_i u'_j}) \quad (36)$$

カットオフ長さ以下の流速変動の寄与を表す subgrid (SG) 応力テンソル τ_{ij} を次のように定義する。

$$\tau_{ij} = C_{ij} + R_{ij} = \overline{u_i u_j} - \overline{u_i} \overline{u_j} \quad (37)$$

ここで、 C_{ij} は cross-stress テンソル $(=\overline{u_i u'_j} + \overline{u'_j u'_i})$ であり、 R_{ij} は、レイノルズ SGS テンソルである。(37) により、式 (36) は

$$\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_i} \overline{u_j} = -\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (38)$$

と書ける。一方、この分解によって得られた式 (38) の非線形項は、GS 流速の積のフィルタリングされた形となっており、依然解くことはできないので、レオナルド応力 $L_{ij} = \overline{u_i} \overline{u_j} - \overline{u_i} \overline{u_j}$ を定義して、再度分解する。

$$\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_i} \overline{u_j} = -\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (39)$$

この時、 τ_{ij} は次のように再定義される。

$$\tau_{ij} = L_{ij} + C_{ij} + R_{ij} = \overline{u_i u_j} - \overline{u_i} \overline{u_j} \quad (40)$$

導出された式 (39) はレイノルズ方程式 (式 (11)) と非常に類似した方程式であるが、式 (37) の τ_{ij} が含む相互相関が異なる点に留意して欲しい。RANS モデル同様に LES では、SG 応力 (40) が何らかの方法でモデル化され、式 (39) を基礎方程式として GS 流速場が解かれることになる。

次に、レイノルズ 分解による乱れエネルギー輸送方程式に対応する SG 乱れエネルギー k_T の輸送方程式について考えていく。Navier-Stokes 方程式に u_i を乗じ、フィルタリングすると、

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \overline{u_i u_i}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_i u_i u_j} - \overline{u_i u_j} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} - \frac{\partial \overline{u_i p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \overline{u_i u_j}}{\partial x_j \partial x_j} - \nu \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} \quad (41)$$

また、式 (39) に $\overline{u_i}$ を乗じたものを式 (41) から引き、SG 乱れエネルギー $k_T = \frac{1}{2}(\overline{u_i u_i} - \overline{u_i} \overline{u_i}) \equiv \frac{1}{2}\overline{u_i' u_i'}$ を定義する。

$$\begin{aligned} \frac{\partial k_T}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} k_T \overline{u_j} = & -\frac{1}{2}(\overline{u_i u_i u_j} - \overline{u_j} \overline{u_i u_i}) - \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{p u_j} - \overline{p} \overline{u_j}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\nu \frac{\partial k_T}{\partial x_j}) \\ & - \nu (\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} - \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j}) + \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_i} \tau_{ij} - \tau_{ij} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} \end{aligned} \quad (42)$$

ここで、左辺第 2 項は SG 乱れエネルギーの移流、右辺第 1 項は乱流輸送、第 2 項は圧力による拡散、第 3 項は粘性拡散、第 4 項は粘性による散逸、第 5 項は SGS 拡散、第 6 項は SG 散逸を表す。RANS における 1 方程式モデルと同様に、LES における SG 乱れエネルギーをベースとしたモデルでは、モデル化された式 (42) から k_T が計算され、SG 応力 $\tau(k_T, \overline{u_i})$ が与えられる。

3.3 Smagorinsky モデル

Smagorinsky モデルでは、解像スケールから SG スケールへのエネルギーカスケードが、粘性拡散で表わされる分子機構と同様であると仮定し、分子粘性の代わりに SG 粘性 ν_T を導入し物理空間において陽的にモデル化を行う。すなわち、SG 応力項は次のようにモデル化される。

$$-\frac{\partial \tau_{ij}^d}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \nu_T \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) \quad (43)$$

ここで、 τ_{ij}^d は τ_{ij} の偏差で、

$$\tau_{ij}^d \equiv \tau_{ij} - \frac{1}{3} \tau_{kk} \delta_{ij} \quad (44)$$

$\frac{1}{3} \tau_{kk} \delta_{ij}$ は、圧力項に加えて一括して評価され、それ故モデル化する必要はない。式 (43) の SG 応力項と SG 粘性 ν_T の関係は、レイノルズ方程式における式 (14) のレイノルズ応力と渦粘性の関係と類似の関係であり、式自体もほぼ同一である。最終的に、解くべき運動方程式は次のように修正される。

$$\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_i} \overline{u_j} = -\frac{\partial \overline{\Pi}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \nu_T \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) \quad (45)$$

ここで、 $\Pi = \overline{p} + \frac{1}{3} \tau_{kk}$ 。

SG 粘性 ν_T の与え方については、以下のように考える。流れは一定のスペクトル平衡状態にあり、エネルギースペクトル形は変化しない局所平衡性を仮定すると、エネルギーの生成 (ε_i)、散逸 (ε)、カットオフ波数を通過するエネルギーフラックス (ε' は、等しいと与えられる (図 5 参照)。

$$\varepsilon_i = \varepsilon' = \varepsilon \quad (46)$$

分子粘性による散逸と SG 粘性によるエネルギーフラックスの相似性を考えると

$$\varepsilon = \varepsilon' \equiv \tau_{ij}^d \overline{S_{ij}} = 2\nu_T \overline{S_{ij}} \overline{S_{ij}} \quad (47)$$

とおいてよい。ここで、ひずみ率 $\overline{S_{ij}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i})$ である。GS 成分から SG 成分へのエネルギーの輸送はカットオフ波数近傍の変動に支配されていると仮定し、SG 乱れエネルギー及びカットオフ長さを代表スケールとした次元解析より ν_T 及び ε を次のようにおく。

$$\nu_T = C_\nu k_T^{1/2} \Delta \quad (48)$$

$$\varepsilon = -C_\varepsilon k_T^{3/2} / \Delta \quad (49)$$

式 (48) を (47) に代入したものと式 (49) を等しく置けば、次式が得られる。

$$k_T = \frac{C_\nu}{C_\varepsilon} \Delta^2 \overline{S_{ij}} \overline{S_{ij}} \quad (50)$$

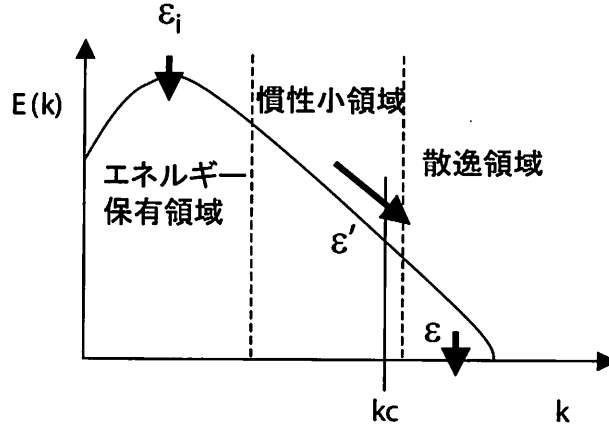


図 5: 局所平衡の仮説の概念図 (ε_i (エネルギー生成) $=\varepsilon'$ (カットオフ波数を通ずるエネルギーフラックス) $=\varepsilon$ (粘性による散逸).

$$\nu_T = \sqrt{\frac{C_\nu}{C_\varepsilon}} C_\nu \Delta^2 (2\overline{S_{ij}} \overline{S_{ij}})^{1/2} = (C_s \Delta)^2 (2\overline{S_{ij}} \overline{S_{ij}})^{1/2} \quad (51)$$

ここで、 C_s はスマゴリンスキー定数と呼ばれる。局所平衡性の仮定の下、(46) からこれを決定していく。式 (51) を使うと (47) より、

$$\varepsilon' = 2(C_s \Delta)^2 (2\overline{S_{ij}} \overline{S_{ij}})^{1/2} \overline{S_{ij}}^2 \quad (52)$$

等方乱流に対する Kolmogorov スペクトルより、 C_s は、次のように決定できる。

$$C_s = \frac{1}{\pi} \left(\frac{3C}{2} \right)^{-3/4} \sim 0.18 \quad (53)$$

実際の計算においては、(53) の定数の下、式 (51) で SG 粘性を唯一のパラメータである歪率を基に計算し、式 (43) により、フィルタリングされた運動方程式 (45) の SG 応力を与えることになる。

このモデルは、追加の方程式を解くことなしに容易に SG 応力を与えることができるため、古くから広い分野においての適用例がある。しかしながら、RANS モデル同様、シンプルモデルは大抵大きな仮定の下に成り立っているため、その適用には注意を要する。また、Kolmogorov スペクトルを仮定している時点で、カットオフ長さが慣性小領域内の高波数側にある必要がある。もう一点は、これも局所平衡の下、グローバル定数としてスマゴリンスキー定数が決定されているため、局所的な乱流構造における局所的なエネルギー輸送が評価できない点である。波浪下における非定常構造乱流へ適用するには、モデル及び結果の吟味が不可欠である。

4 乱流モデルを用いた砕波帯流体運動の解析例

前節までで概説したように、現在広く用いられる乱流モデルとしては RANS モデルと LES がある。海岸工学においても RANS モデル、LES の両者が用いられている。RANS モデルは、乱流運動の全てがレイノルズ応力としてモデル化され、グリッドサイズの影響を陽には受けないため、グリッドサイズを比較的大きく取ることが出来る。RANS で適用するモデルによっては、PC レベルの計算機で岸沖方向が O(10 m) の水槽スケールから O(1km) の現地スケールまで幅広い空間スケールを対象としたアプリケーションに対して適用し得る。しかしながら、ここで注意する必要があるのは、通常の RANS モデルでモデル化されるのは、あくまでもレイノルズ平均で定義されるランダム変動 (式 (8) で明らか) であり、波動成分や組織性あるいは周期性をもつ変動は厳密には対象外であり、これらに適用した場合不正確な過剰拡散を与える可能性がある。

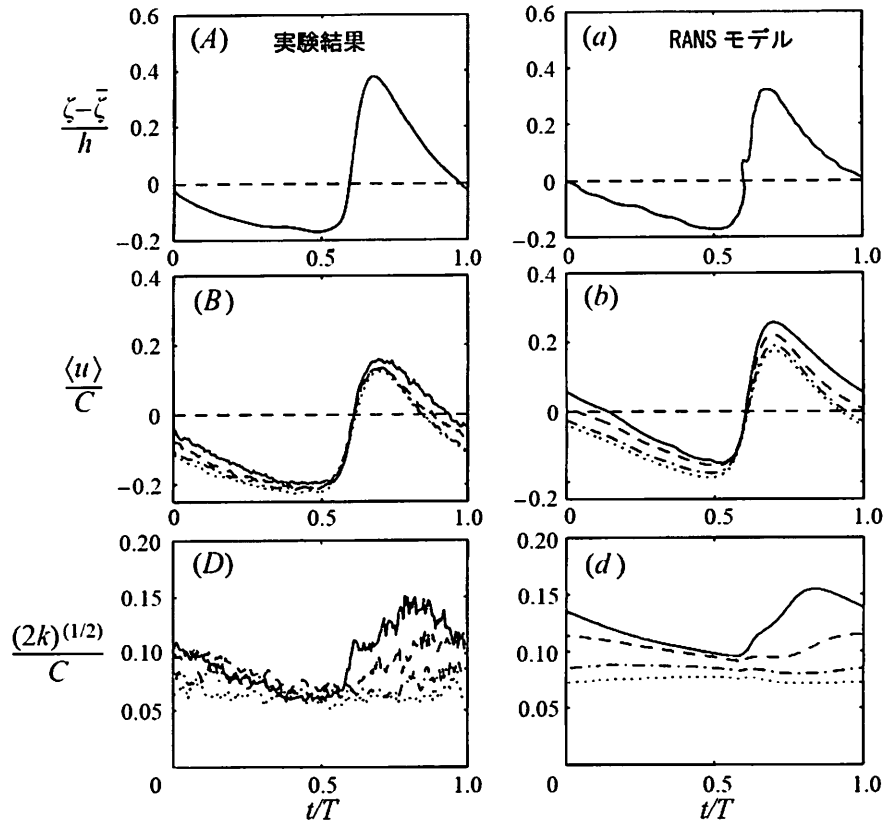


図 6: $k-\varepsilon$ モデルを用いて計算された spilling 碎波の水面変位 (A,a), 水平流速 (B,b) および乱れ (D,d) と実験結果の比較 (左側: 実験データ, 右側: 計算結果; 線の種類は鉛直方向の位置の違い) (Lin and Liu, 1998)

一方, Direct Numerical Simulation (DNS) に要する膨大な計算コストを低減するために開発された LES は, モデルによってはフィルター操作によるカットオフ長さが慣性小領域の高周波数側にある必要があり (特に, 局所平衡性が仮定されているスマゴリンスキーモデルなど), グリッドスケールが散逸スケールよりやや大きい程度の大きさに拘束され, 非常に細かく取る必要がある. 例えば, 実験室レベルの碎波帯を想定して, Kolmogorov スケールをもとに考えると

$$\eta = (\nu^3/\varepsilon)^{1/4} \quad (54)$$

$\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$, $\varepsilon = 10 \text{ W/kg}$ とすると, $\eta = O(1 \mu\text{m})$ となり, これより 1~2 オーダー大きいグリッドサイズを与えたとしてもかなり細かく設定する必要があることがわかる. このため, PC/WS レベルの計算機では, メートルオーダーの空間スケールを対象とする現象が計算対象となる. しかし, 今後のコンピューターの計算性能の向上に伴い, 大規模 (100 m オーダー) なスケールの計算に対しても適用できるようになると考えられる.

以下では, 前節までに概説された RANS モデルおよび LES を用いた碎波帯内の流体運動の計算例を示すとともに, その精度について紹介する. 図-6 に示すのは, 水路内一様斜面上 (1/35 勾配) の spilling 碎波について 2 次元の $k-\varepsilon$ モデルにより計算された水面変位, 流速と乱れの時間波形である (Lin and Liu, 1998). 図は, 固定点における鉛直方向 4 点の時間波形であり, 上から下に向かって水面変位, 水平流速および乱れ, 左側の列は, 実験データ, 右側の列は計算結果, 線の種類は鉛直方向の位置の違いを示している. 計算結果と比較されている実験結果は, レーザードップラー流速計により計測された位相平均流速である (Ting and Kirby, 1995). 碎波点近傍の乱れについては再現性が低いものの, 図-6 に示す碎波点より岸側の計測点では, 水面変位, 流速, 乱れ共に RANS モデルの計算結果は実験結果と比較的合うことが示されている. Lin and Liu (1998) は, RANS モデルは碎波点

近傍で乱流エネルギーを過大評価することを明らかにしており、その原因として碎波点近傍の波峰近傍では大きなシアが存在し、 $k-\varepsilon$ モデルではこのときの乱れを正しく推定できないことが原因であると結論づけている。いずれにせよ、碎波点よりある程度岸側のボアが形成されるような領域では RANS モデルはリーズナブルな解を与えることが確認されている。また、詳しくは触れないが、初期および境界における乱流エネルギーの与え方が碎波点の推定精度に影響するが、これは RANS モデルだけではなく LES についても同様に任意性が残る問題である。

一方、図-7 に示すのは、より大規模な乱れが発生する plunging 碎波を対象に、3 次元の LES により計算された流速と乱れの時間変化である (Watanabe, 2005)。計算結果と比較している実験結果は、図-6 で比較したものと同じ水槽を用いた一連の実験であるが、入射波条件が異なる (Ting and Kirby 1995)。LES の結果は、アンサンブル平均されたものであり、乱れは GS 流速から計算されている。比較されている水平位置は、図-6 より碎波点に近い、第 1 および第 2 着水点間の点であり、LES による結果は、水平・鉛直流速ともその時間変化の特徴を良く捉えている。乱れの時間変化について見ると、RANS モデルと異なり、LES で計算された乱れはやや低めの結果となっている。一般に、碎波帯では mm スケール以下の気泡が混入し、混入された気泡は乱流を強化するが (Bunner and Tryggvason, 2010)、通常の LES ではこれを考慮できない。このため、図-7 に示したように、実験と比較して LES で計算された乱れがやや低めの値を示すことは予想された結果である。一方、図-6 に示したように、実験結果と比較して RANS モデルが大きめの乱れを与えることは不自然であると言える。

上記で紹介した 2 つの計算例は、いずれも一連の実験結果 (Ting and Kirby, 1995; Ting and Kirby, 1996) と比較しているが、碎波帯の乱流の計測は、気泡が混入すると計測すること自体が困難であり、開水路や管路の乱流の比較と異なり、必ずしも実験結果がパーフェクトであるわけではない。

5 気液 2 相流モデル

5.1 基礎方程式

碎波帯の状態をより正確に解くためには、混相流としての取り扱いが必要となる。気液 2 相流については、原子力分野で管路や機械の内燃機関のノズル等を中心に古くから研究されている (例えば、有富 正憲・秋山, 2001; Balachandar, 2010)。これらは、空気塊や気泡を空間平均し、Euler 的に扱うものであり、気液 2 相流モデルと呼ばれる。気液 2 相流モデルでは、気相と液相について質量および運動量の連続式をそれぞれ立て、運動量については気液間でモデル式を用いてやりとりを行う。

5.1.1 質量保存則

気液間のガス輸送が無いと仮定すると、液相の質量保存則は以下の様に書くことが出来る。

$$\frac{\partial \alpha_l \rho_l}{\partial t} + \nabla \cdot \alpha_l \rho_l \vec{u}_l = 0 \quad (55)$$

ここで、

α_l 液相のボイド率

ρ_l 液相の密度

$\vec{u}_l$ 液相の速度

である。非圧縮の仮定をおくと、気相の体積変化が無視できるため、気相のボイド率は $\alpha_g = 1 - \alpha_l$ と定義できる。

もし、気相 (分散相) を気泡の集合と見なす場合、気泡を粒子群と見なし、Lagrange 的に扱う方法もある (Moraga ら, 2008)。この場合、気泡径を D_g 、気泡数密度を N_g とおくと、気相ボイド率 α_g と以下の関係を持つ。

$$\alpha_g = \bar{V}_g N_g \quad (56)$$

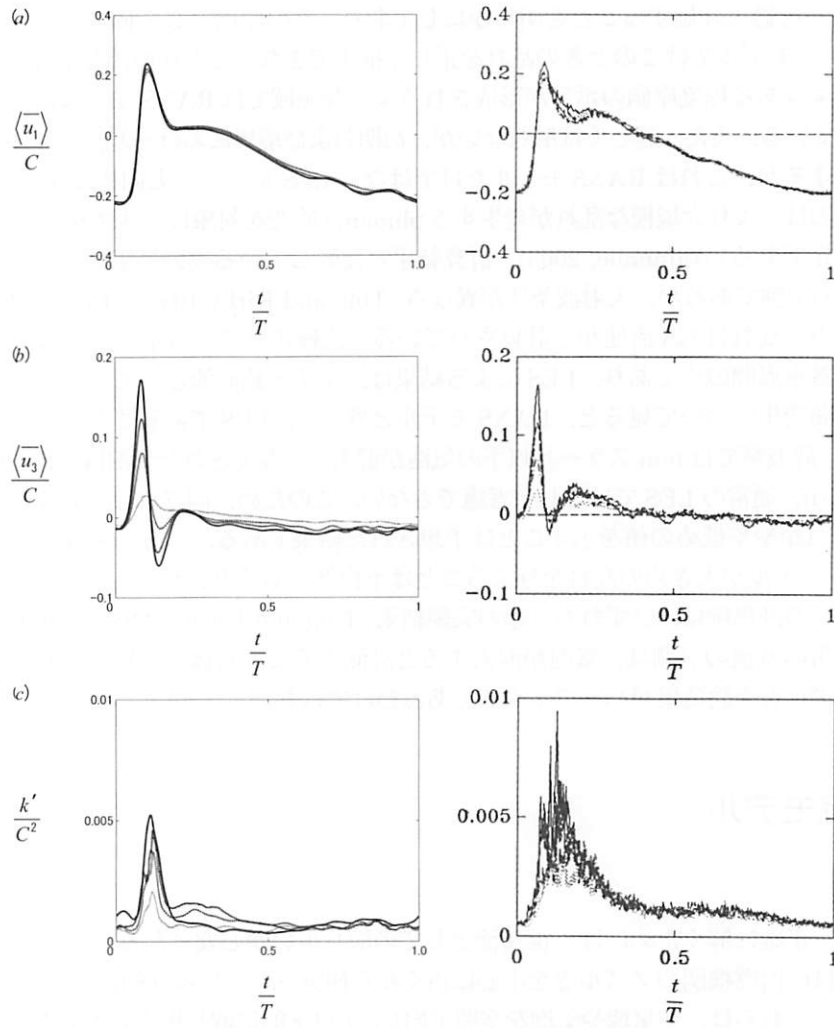


図 7: LES を用いて計算された plunging 碎波の水平流速 (a), 鉛直流速 (b) および乱れ (c) と実験結果の比較 (上側: 計算結果, 下側: 実験データ; 線の種類は鉛直方向の位置の違い) (Watanabe, 2005)

ここで, $\bar{V}_g$ は平均気泡体積である. もし, 気泡径を複数設定する場合には,

$$\alpha_g = \sum_i \bar{V}_g^i N_g^i \quad (57)$$

となる.

5.1.2 運動量保存則

運動量の保存については, 気相の液相についてそれぞれ立て, これをカップルする必要がある. まず, 一般に液相に対する運動量保存則は以下の様になる.

$$\frac{\partial \alpha_l \rho_l \vec{u}_l}{\partial t} + \nabla \cdot \alpha_l \rho_l \vec{u}_l \vec{u}_l = \nabla \cdot \alpha_l \vec{T}_l + \alpha_l \vec{g} + \vec{F}_l \quad (58)$$

ここで, $\vec{g}$ は重力加速度, $\vec{T}_l$ はせん断応力テンソル, $\vec{F}_l$ は気相・液相の界面力である.

$$\vec{T}_l = - \left(\frac{2}{3} \rho_l k \right) \vec{I} + \nu_t (\nabla u_l + \nabla^T u_l) \quad (59)$$

ここで、 k は乱流エネルギー、 $\vec{I}$ は単位行列、 ν_t は乱流粘性係数である。

一方、気相の運動量保存についても類似の式が成り立つ。

$$\frac{\partial \alpha_g \rho_g \vec{u}_g}{\partial t} + \nabla \cdot \alpha_g \rho_g \vec{u}_g \vec{u}_g = \nabla \cdot \alpha_g \vec{T}_g + \alpha_g \vec{g} + \vec{F}_g \quad (60)$$

ここで、 $\vec{M}_I$ 気相に働く界面外力であり、

ρ_g 気相の密度

$\vec{u}_g$ 気相の速度

である。気泡内と気泡界面における圧力は異なるが、もし圧力変化が小さいと仮定すると $p_g = p_l$ であり、式 (60) は

$$\frac{\partial \alpha_g \rho_g \vec{u}_g}{\partial t} + \nabla \cdot \alpha_g \rho_g \vec{u}_g \vec{u}_g = +\alpha_l \nabla p_l + \alpha_g \vec{g} + \vec{F}_g \quad (61)$$

と簡略化される。問題は、気泡混入のソースや運動量交換に必要な界面力 $\vec{M}$ をどのように与えるかということになる。これらについては、土木学会・数値波動水槽 (2012) を参照されたい。

5.2 砕波への応用

気液 2 相流に対する 2 流体モデルを砕波帯に応用した例はそれほど多くない。ここでは、最近の計算例として Moraga ら (2008) と Shi (2010) のモデルと計算結果を紹介する。

Moraga ら (2008) は、気泡の混入項について以下の式を用いてモデル化している。

$$\mathcal{E}_g = S_0 P_E(D_g) \Delta D_g \sum \delta(\vec{x} - \vec{x}_s) \quad (62)$$

ここで、 S_0 はチューニング係数、 $P_E(D_g)$ は気泡径の確率密度関数、 ΔD_g は離散化した気泡径分布の幅を示し、 $\vec{x} = \vec{x}_s$ となる場所で気泡が混入するようにコントロールされる。 $p_E(D_g)$ については、Deane・Stokes (2002) の観測結果をもとに、気泡混入初期のアクティブフェイズにおいて以下の関数型を仮定している。

$$P_E(D_g) = \begin{cases} (D_g/2)^{-3/2} & D_g < r_H mm \\ (D_g/2)^{-10/3} & D_g \geq r_H mm \end{cases} \quad (63)$$

ここで、 r_H は Hinze スケールであり、 $r_H = 1$ mm として計算されている。液相の計算には Level Set 法を用いて水面を解き、水面における流速が下向きに 0.22m/s を超えた場所を $\vec{x}_s$ として定義している。一方、気泡のシンク項については、Martinez-Bazan ら (1999a, 1999b) の気泡分裂についてのモデルを用いて以下のようなモデルを用いている。

$$S_g^i = S_g^{i+} + S_g^{i-} \quad (64)$$

$$S_g^{i+} = \int_{D_g}^{\infty} m(D_0) p(D_g, D_0) f(\epsilon, D_0) \quad (65)$$

$$S_g^{i-} = f(\epsilon, D_0) D_g \quad (66)$$

ここで $m(D_0)$ は、分裂元となる気泡直径 D_0 に対する平均分裂個数、 $p(D_g, D_0)$ は気泡径の数密度 2 次元分布、 $f(\epsilon, D_0)$ は気泡径 ϵ, D_0 および乱流エネルギー散逸率 ϵ における気泡分裂確率である。

Shi ら (2010) は、砕波による気泡混入について RANS モデルを適用している。気泡混入項は、Moraga ら (2008) のモデルと類似しているが、液相のせん断力 $P_\tau = \mu_t |\vec{T}|^2$ を用いて以下のように定式化されている。

$$\mathcal{E}_g = S_0 P_E(D_g) \Delta D_g P_\tau, \quad P_\tau > P_0 \quad (67)$$

ここで P_0 は、気泡混入が生じる最小のせん断力である。一方、気泡のシンク項については、別のモデルを用いているが、考え方は類似しているのでここでは割愛する。

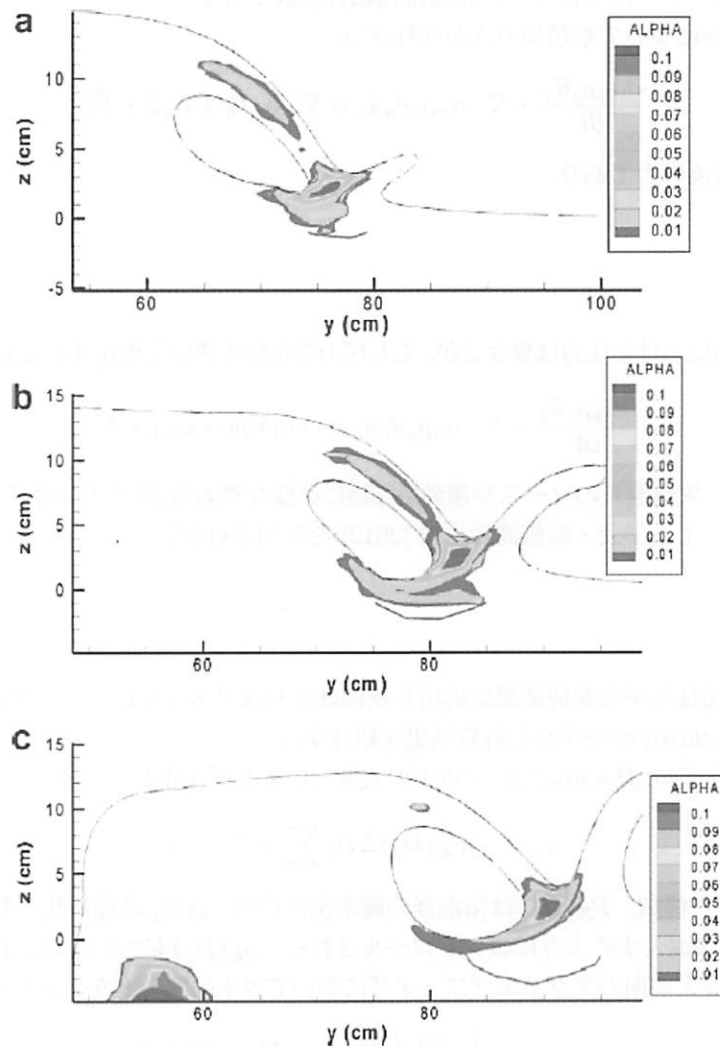


図 8: 気液 2 相流によるジェット噴流突入時のボイド率の計算結果 (Moraga, 2008 の Figure 6)

図-5.2 に示すのは、Moraga ら (2010) の行った 3 次元場における Jet による 2 流体モデルの計算結果である。彼らの計算条件は、一様流内に主流に対して斜めにプレートを設置して縮流を起こし、定常な plunging jet を起こすというものである。気泡混入の条件は、一定の下降流速を用いており、0.08mm～4mm までの 20 種類の気泡径を対象に計算を行っている。図は、流れの主流方向に直交した鉛直断面であり、斜めに置かれたプレートにより各断面で Jet の規模が異なるため、時間的には定常な計算であるが、空間的にはパターンが異なる結果となっている。着水点におけるボイド率の変化が計算されており、実験結果との比較により 1% のボイド率の平面分布が再現出来ていることが確認されている。本来なら気泡混入のない Jet 内中心部に不自然な高ボイド率が計算されている点や、ボイド率の最大値等の再現に大きな問題があり、これは混入時の S_0 を一定値として取り扱っている（常に同じ量が混入）することに依るためであると結論づけられている。

Shi ら (2010) は、Rapp・Melville(1990) の集中波の局所碎波による碎波気泡混入について鉛直 2 次元断面において計算を行っている。液相の計算には VOF 法を用い、Moraga(2008) と類似して、0.1mm～10mm までの 20 種類の気泡径を対象に計算を行っている。図-5.2 に示すのは、(a) 鉛直断面空気の面積、(b) 単位幅あたりの体積ボイド率、(c) ボイド率である。実験で計測されるボイド率は、初期に最大値を取り、その後に指数関数的に減少する。計算結果は初期のボイド率が小さくその後の現象もやや弱い。これは、気泡混入項が液相のせん断に比例す

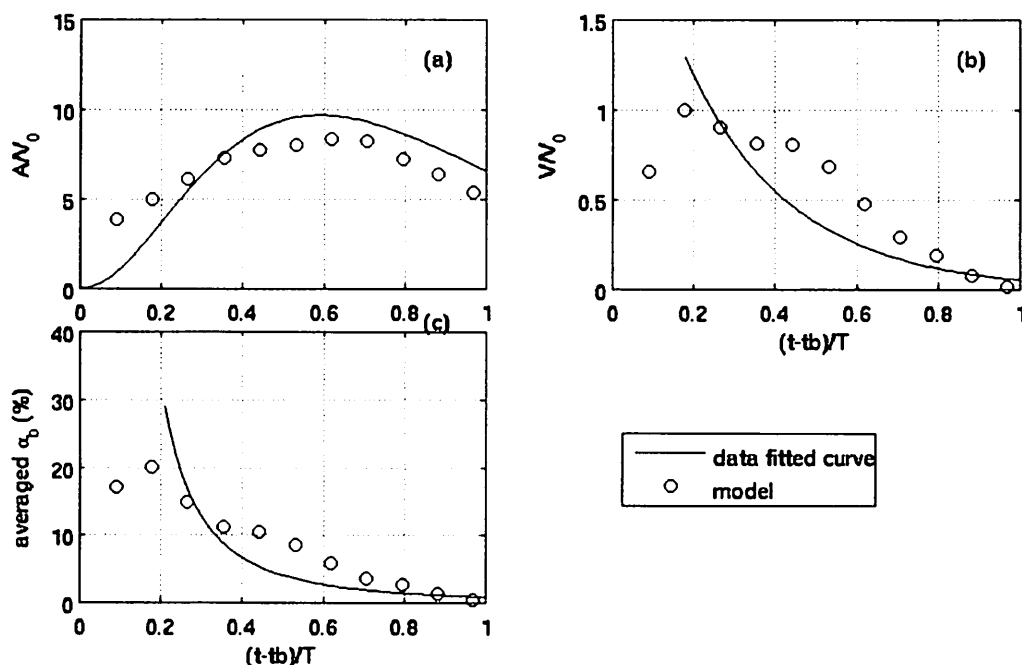


図 9: 気液 2 相流による砕波帯におけるボイド率の計算結果と実験結果の比較 (Shi ら, 2010 の Figure 7) : (a) 正規化された面積の時間変化, (b) 正規化された体積の時間変化, (c) 正規化されたボイド率の時間変化

るように与えられているために、初期よりもやや遅れてピーク値が現れるためである。図-5.2 は、同様の計算における気泡径毎のボイド率の空間分布である。このモデルによる砕波によるせん断が最も大きいのは波頂付近であり、このためにボイド率のピークは波頂付近に現れ、その後、波の伝播と気泡の移流速度の違いにより気泡が波峰の後ろ側に移流されているのがわかる。また、気泡径毎に浮上速度と抗力が違うために異なる空間分布を持ち、体積換算したボイド率では大きな気泡径の方がボイド率に大きな影響を与えていることが分かる。実験結果と比較すると、本来ボイド率が一番高い波峰前面には気泡がほとんど存在せず、また Jet の突入に伴う下向きの気泡ブルームも見られないことが分かる。これらの差異は、気泡混入のメカニズムと異なり、気泡混入が剪断力に比例する形としているためであり、Moraga(2008) とほぼ同じ問題点が結論づけられている。

本来、グリットスケールで解かれる空気塊や大きな径の気泡とサブグリットスケールの気泡が連続的に分布するはずであるが、上記の扱いでは完全に別の物理プロセスとして解かれており、plunging 砕波のような大変形する砕波についての気泡混入メカニズムの理解とそのモデル化に大きな問題が残されていることが分かる。

6 まとめ

以上、主に波動乱流における乱流モデルとその適用性について概説を行った。乱流理論やモデルのより詳しい内容については、本文であげた乱流理論・数値解析の専門書を参考にしてほしい。

ここで紹介した RANS モデルと LES の 2 つの乱流モデルは、今後も広く用いられると思われるが、最後の節に示したようにモデルに応じた適用範囲があり、これを逸脱しないように注意を払いつつ応用する必要がある。また、砕波帯における混相流についてはさらに多くのモデルと不確実性があり、今後の研究の進展が期待される。また、気液 2 相流モデルでは気泡をサブグリットスケールに落とすことにより、気泡を含む砕波流れの数値モデルが開発されつつあり、今後の進展が期待される。

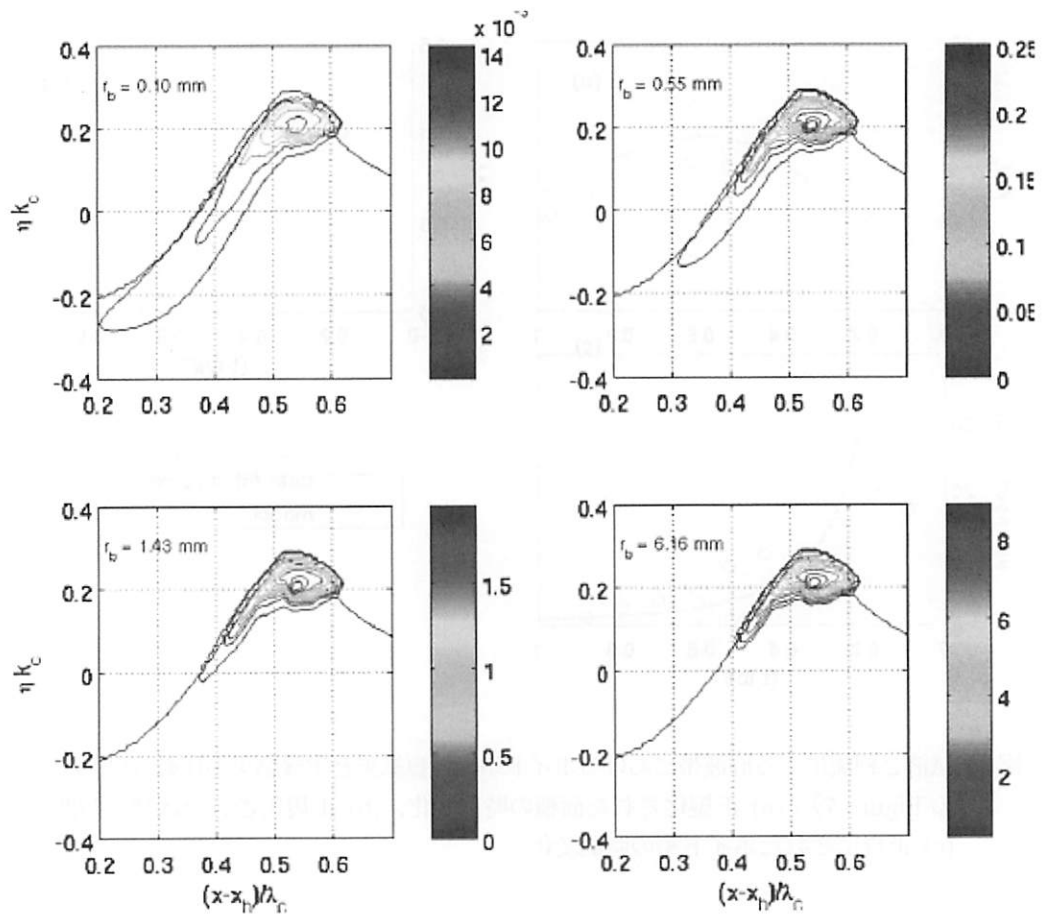


図 10: 気液 2 相流による砕波帯におけるボイド率の計算結果 (Shi ら, 2010 の Figure 9) :
気泡径毎のボイド率

謝辞：本原稿をまとめるにあたり，北海道大学渡部靖憲准教授には大変お世話になりました．ここに感謝の意を評します．

参考文献

- [1] 有富 正憲・秋山 守 (2001): 新しい気液二相流数値解析—多次元流動解析, コロナ社.
- [2] 梶島岳夫 (1999): 乱流の数値シミュレーション, 養賢堂, 255p.
- [3] 明・笠木 (1988): $k-\epsilon$ 乱流モデルに対する新たな提案とその評価, 日本機械学会論文集, B 編, Vol.54, No.507, pp. 3003-3009.
- [4] ファーティガー・ペリッチ (2003): コンピューターによる流体力学, シュプリンガー・フェアラーク, 419p.
- [5] 土木学会 (2012): 数値波動水槽—砕波波浪計算の深化と耐波設計の革新を目指して—, 228p.
- [6] Balachandar, S. and J.K. Eaton (2010): Turbulent dispersed multiphase flow, Annual Review of Fluid Mechanics, Vol.42, pp.111-133.

- [7] Bunner, B. and Tryggvason, G. (2010): Dynamics of homogeneous bubbly flows. Part 2. Velocity fluctuations. *Journal of Fluid Mechanics*. 466, 53-84, 2002.
- [8] Chou, P. Y. (1945) : On velocity correlations and the solutions of the equations of turbulent fluctuation, *Q. Appl. Math*, Vol.3, p.38-54.
- [9] Jones, W.P. and Launder, B.E. (1972) : The prediction of laminarization with two equation model of turbulence, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol.15, pp. 301-314.
- [10] Kolmogorov, A. (1941): The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol.30, pp.301-305.
- [11] Labourasse, E., Lacanette, D., Toutant, A., Lubin, P., Vincent, S., Lebaigue, O., Caltagirone, J.-P. and Sagaut, P. (2007) : Towards large eddy simulation of isothermal two-phase flows: Governing equations and a priori tests, *International Journal of Multiphase Flow*, 33, 1-39.
- [12] Launder, B. and Spalding, D.B. (1974) : The numerical computation of turbulent flows, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.3, pp.269-289.
- [13] Lin, P. and Liu, P.L.F. (1998) : A numerical study of breaking waves in the surf zone, *Journal of Fluid Mechanics*, 359, pp.239-264.
- [14] Mansour, N.N., Kim, J. and Moin, P. (1987) : Reynolds stress and dissipation rate budgets in turbulent channel flow, *Journal of Fluid Mechanics*, vol.194, pp.15-44.
- [15] Meneveau, C, and Katz, J. (2000) : Scale-invariance and turbulence models for large-eddy simulation, *Annual Review of Fluid Mechanics*, 32, 1-32.
- [16] Moraga, F.J., P.M. Carrica, D.A. Drew and R.T. Lahey (2008): A sub-grid air entrainment model for breaking bow waves and naval surface ships, *Computers & Fluids*, Vol.37, pp.281-298.
- [17] Mellor, G.L. and Yamada, T (1974) : A hierarchy of turbulence closure models for planetary boundary layers. *Journal of Atmospheric Sciences*, 31, 1791-1806.
- [18] Rotta, J.C. (2000): Turbulent boundary layers in incompressible flow, *Progress in Aerospace Sciences*, Vol.2, p.1, 1968.
- [19] Saffman, P.G. (1970): A model for inhomogeneous turbulent flow, *Proceedings of Royal Society of London*, Vol.A317, pp.417-433.
- [20] Sagaut, P. (2000): Large eddy simulation for incompressible flows, Springer.
- [21] Shi, F., J. Kirby and G. Ma (2010): Modeling quiescent phase transport of air bubbles induced by breaking waves, *Ocean Modelling*, Vol.35, pp.105-117.
- [22] Ting, F.C.K. and Kirby, J.T. (1994): Dynamics of surf-zone turbulence in a strong plunging breaker, *Coastal Engineering*, 24, pp.177-204.
- [23] Ting, F.C.K. and Kirby, J.T. (1996): Dynamics of surf-zone turbulence in a spilling breaker, *Coastal Engineering*, 24, pp.177-204.
- [24] Watanabe, Y., Saeki, H. and Hosking R.J. (2005): Three-dimensional vortex structures breaking waves, *Journal of Fluid Mechanics*, 545, 291 - 328.
- [25] Wilcox, D.C. (1998): Turbulence Modeling for CFD, DCW Industries, 538p.