

iRIC による河川シミュレーション (2)
－Nays2DとNays2DFLOODの説明・事例紹介・デモ
および iRICの今後の展開－

北海道大学 大学院 工学研究院

川村 里実

土木学会
水工学委員会・海岸工学委員会

2012 年 8 月

iRICによる河川シミュレーション (2)

Nays2D と Nays2DFLOOD の説明・事例紹介・デモおよび iRIC の今後の展開

Simulations on Flows and Morphodynamics in Rivers with iRIC (2)

Nays2D/ Nays2DFlood and future developments

川 村 里 実

Satomi KAWAMURA

1. はじめに

近年、急激な計算機の発展に伴い、河川工学の分野においても数値解析技術が著しく向上した。現在では数多くの数値解析モデルが構築され、その成果は研究分野を超えて実用分野へ普及されつつある。特に、河川流の平面二次元計算に関しては、研究者各個人（またはグループ）または各企業で個々の数値計算モデルの構築が比較的容易となり、河川流シミュレーションのための一般的なツールとして利用されつつある。そのうちの一つに北海道大学の清水康行教授が開発した平面二次元計算モデルが挙げられる。iRICに搭載されているNays2Dは清水教授が開発した平面二次元計算モデルによる河川の流れ・河床変動解析ソルバーであり、Nays2DFloodはこの平面二次元モデルを氾濫原に適用した氾濫流解析ソルバーである。

iRICとは無料（パブリックドメイン）で配布される河川の流れ、流砂、河床変動、氾濫解析や生態系の挙動を計算するためのインターフェースおよびこれらを実際に計算するプログラムを備えたソルバー群である。iRICは、河川の研究者や実務者、学生など河川問題に関わる幅広いユーザーを対象としており、洪水災害後の要因分析、蛇行など河道現象の数理解析、大学の講義での演習ツールなど実務・研究・教育における高度な水理解析を支援することが目的で開発されている。iRICの概要および目的など基本コンセプトの詳細は

「iRICによる河川シミュレーション(1) iRIC基本コンセプトと三次元ソルバー」で述べられているので参照されたい。「iRICによる河川シミュレーション(1) iRIC基本コンセプトと三次元ソルバー」で述べられているように、「モデルやインターフェースの開発自体は研究では無い。しかしながら、研究の結果に多くの公衆がアクセス出来るようにすることは研究者の社会に対する責任である。」というiRICの理念に賛同する世界各国のモデル開発者らの協力によって、平成23年12月25日にiRICバージョン2.0がリリースされた。このバージョンでは、これまでの平面2次元不定流河床変動モデルに新たに氾濫解析モデルや3次元流モデルが加わり、現時点では8つの計算モデルがiRICのソルバーとして搭載されている。また、iRICは、計算の前処理と後処理が行えるグラフィカルインターフェイス（GUI）を装備しており、格子生成や条件設定などの計算の前処理と計算結果の可視化などの後処理に費やす労力・時間の大幅な短縮に寄与している。本稿では、iRICに搭載されているソルバーのうち、北海道大学の清水康行教授を中心に開発が進められているNays2DおよびNays2DFloodの二つのソルバーについて、その概要、特徴および計算事例などを説明するとともに、iRICの今後の展開について紹介する。

2. iRIC ソルバー Nays2D

2. 1 Nays2D の概要

Nays2D は一般曲線座標で境界適合座標を用いた非定常平面2次元流れと河床変動計算の解析用ソルバーである。その原型は1990年代より北海道大学の清水康行教授によって開発が開始され、数々の改良の後、2004年に(財)北海道河川防災研究センター（現在の北海道河川財団）の河床変動計算用プリポストソフトウェアRIC-Nays に最初に搭載された計算ソルバーである (Version 1.0)。その後、北海道大学の木村一郎准教授によって動的メモリ配置（プログラムの走行中にそのプログラムで使用するメモリの確保を行う機能。これにより、メモリ領域の無駄な浪費を抑えることができる。）へと改良が加えられるとともに、清水康行教授により河岸浸食モデル、北海道大学の岩崎理樹によるホットスタート機能などが付加され、2010年のiRICバージョン1.0リリース時には添付ソルバーの1つとして配布された (Version 2.0)。さらに、岩崎理樹による混合粒径多層モデル、(株)開発工営社の井上卓也・濱木道大による河川合流点モデルなどの機能追加が行われ、(財)北海道河川防災研究センターの旭一岳の企画・監修のもと、2011年3月にiRIC Version 2.0用の計算ソルバーとして登録された (Version 3.0)。乱れや剥離を伴う非定常流れの計算に定評があり、非定常渦のリアルな動きを動的に表現可能なモデルである。また、河床変動計算も砂州の発生・発達・移動などを精度良く再現でき、実河川での適用例も多く、樹木や植生の影響評価、洪水氾濫計算、河川合流点の影響検討、河岸浸食災害の検証などに適用されている。

Nays2D における流れ場の計算モデルの特徴は以下のとおりである。

- ①座標系は一般曲線座標系を採用しており、複雑な境界や河床地形を直接考慮できる。
- ②本川と支川の合流点の計算が可能。
- ③運動方程式の移流項の差分法は、1次精度風上差分法とCIP法¹⁵⁾（高次精度差分法の一つ。3次多項式を補間関数として使用することで、数値拡散を抑え、局所的な高精度補間ができる。）から選択可能。
- ④乱流場の計算方法は、渦動粘性係数一定、ゼロ方程式モデル、 $k-\epsilon$ モデルから選択可能。
- ⑤上下流端の境界条件については、周期境界条件、下流端水位の設定、上流端流速の設定など、さまざまな設定が可能。これにより、限られた観測資料から簡単に境界条件を設定することができる。
- ⑥初期水面形は、一定勾配、折れ線、等流計算、不等流計算から選択可能。
- ⑦底面の摩擦の評価方法は、マンニングの粗度係数を用いて設定する。
- ⑧計算領域中の障害物については、計算セル単位で考慮できる。計算セルごとにフラグを設定し、障害物を定義する。これにより、橋脚など河川構造物を簡単に計算に取り入れることができる。
- ⑨植生の流れへの影響については、抗力という形で考慮することができる。植生の密生度は、任意の実数値でセル単位ごとに指定することができる。

また、Nays2D における流砂と河床変動の計算モデルの特徴は以下のとおりである。

- ①流況計算のみを行うか、流況計算と合わせて河床変動計算を行うか選択可能。
- ②流砂の種類は、掃流砂のみと掃流砂＋浮遊砂から選択可能。
- ③河床材料は、均一粒径と混合粒径の2種類が選択可能。混合粒径を選択した場合、粒度分布の変化を深さ方向に多層で記憶させることができる。
- ④限界角度による斜面崩落を考慮することができる。河床変動計算では、本来生じえる斜面角度よりも急な角度が計算されることがある。これを防ぐため、河床の角度がある限界角度を超えたとき、斜面崩落が生じるというモデルを導入している。これにより、河岸浸食など流砂連続式だけでは評価しえないような現象をある程度考慮することが可能となる。
- ⑤安息角による河岸浸食を考慮することができる。すなわち、河床変動が進行し、河床勾配が安息角以上になった場合、周囲のセルと土砂のやり取りを行い、安息角以下になるように調整する。また、河岸浸食に伴い河道が拡幅した場合、それにあわせて計算格子が自動的に移動する。

その他にも、ホットスタート（前回の計算結果の途中の状態から、継続して計算を行うこと）に対応しているなどの特徴がある。

2. 2 基礎式

2. 2. 1 流れの基礎方程式

一般曲線座標系 (ξ, η) に変換する前の直交座標系 (x, y) における基礎式は以下のとおりである。

$$[\text{連続式}] \quad \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} + \frac{\partial(hv)}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$[\text{運動方程式}] \quad \frac{\partial(uh)}{\partial t} + \frac{\partial(hu^2)}{\partial x} + \frac{\partial(huv)}{\partial y} = -hg \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\tau_x}{\rho} + D^x - \frac{F_x}{\rho} \quad (2)$$

$$\frac{\partial(vh)}{\partial t} + \frac{\partial(huv)}{\partial x} + \frac{\partial(hv^2)}{\partial y} = -hg \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\tau_y}{\rho} + D^y - \frac{F_y}{\rho} \quad (3)$$

ただし、

$$\frac{\tau_x}{\rho} = C_f u \sqrt{u^2 + v^2}, \quad \frac{\tau_y}{\rho} = C_f v \sqrt{u^2 + v^2} \quad (4a, b)$$

$$D^x = \frac{\partial}{\partial x} \left[\nu_t \frac{\partial(uh)}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\nu_t \frac{\partial(uh)}{\partial y} \right], \quad D^y = \frac{\partial}{\partial x} \left[\nu_t \frac{\partial(vh)}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\nu_t \frac{\partial(vh)}{\partial y} \right] \quad (5a, b)$$

$$\frac{F_x}{\rho} = \frac{1}{2} C_D a_s h u \sqrt{u^2 + v^2}, \quad \frac{F_y}{\rho} = \frac{1}{2} C_D a_s h v \sqrt{u^2 + v^2} \quad (6a, b)$$

ここで、 h は水深、 t は時間、 u は x 方向の流速、 v は y 方向の流速、 g は重力加速度、 H は水位、 τ_x は x 方向の河床せん断力、 τ_y は y 方向の河床せん断力、 F_x は x 方向の植生による抵抗力、 F_y は y 方向の植生による抵抗力、 C_f は河床せん断係数、 ν_t は渦動粘性係数、 C_D は植生の抗力係数、 a_s は単位体積に占める植生の遮断面積である。

Nays2Dでは上式を以下のように一般曲線座標 (ξ, η) に変換することによって、任意形状（境界条件に沿って）に計算メッシュを設定している。

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \frac{1}{\xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x} \begin{pmatrix} \eta_y & -\eta_x \\ -\xi_y & \xi_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_\xi & y_\xi \\ x_\eta & y_\eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (7)$$

ただし、

$$\xi_x = \frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad \xi_y = \frac{\partial \xi}{\partial y}, \quad \eta_x = \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad \eta_y = \frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad x_\xi = \frac{\partial x}{\partial \xi}, \quad x_\eta = \frac{\partial x}{\partial \eta}, \quad y_\xi = \frac{\partial y}{\partial \xi}, \quad y_\eta = \frac{\partial y}{\partial \eta} \quad (8a-h)$$

一般曲線座標とは、直交座標系（デカルト座標系）では曲がった複雑な境界を表現することが困難なため、境界面に沿って座標軸を設定する座標系である。その特徴から境界適合座標系とも呼ばれる。Nays2Dではデカルト座標系で記述された支配方程式を一般座標に変換（写像）した方程式を計算している。一

般座標系への変換過程や変換後の基礎方程式についてはここでは割愛する。詳細は iRIC ソフトウェア Nays2D ソルバーマニュアル (<http://i-ric.org/ja/downloads>) を参照されたい。

2. 2. 2 乱流場の計算方法

乱流とは大小さまざまな渦を伴う不規則な流れのことである。Nays2D では、乱流場の計算方法として、「渦動粘性係数一定」、「ゼロ方程式モデル」、「k-ε モデル」から選択が可能である。

a) 渦動粘性係数一定

渦動粘性係数 ν_t とは、乱流状態の流れにおける見かけの運動粘性率のことである。この条件下では、(5a, b) 式中の ν_t を $0.000001 [\text{m}^2/\text{s}]$ として計算を行う。

b) ゼロ方程式モデル

渦動粘性係数 ν_t は、一般的に以式のように乱流の代表流速 v_t と代表長さ l の積で表される。

$$\nu_t = v_t l \quad (9)$$

水深と粗度が横断方向に緩やかに変化する流れ場においては、水平方向の渦動粘性係数と鉛直方向の渦動粘性係数は同じオーダーであると仮定し、主として底面摩擦速度と水深が運動量輸送を規定すると考え、渦動粘性係数 ν_t を以下の式で表す。

$$\nu_t = au_* h \quad (10)$$

ここに、 a は比例定数である。Fisher¹⁾ や Weibel・Schatzmann²⁾ の実験によると鉛直方向の運動量輸送に関わる a 値は 0.07 程度であるため、カルマン係数 κ ($=0.4$) を用いて渦動粘性係数 ν_t を以式で表す。

$$\nu_t = \frac{\kappa}{6} u_* h \quad (11)$$

このモデリングは乱流統計量についての輸送方程式を要しないためゼロ方程式モデルと呼ばれている。

c) k-ε モデル

標準型 k-ε モデルによる渦動粘性係数 ν_t は、以下の式で表される。

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (12)$$

ここで、 C_μ はモデル定数です。 k 及び ε は次式によって算出する。

$$\frac{\partial k}{\partial t} + u \frac{\partial k}{\partial x} + v \frac{\partial k}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial y} \right) + P_h + P_{kv} - \varepsilon \quad (13)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + u \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + v \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right) + C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} P_h + P_{\varepsilon v} - C_{2\varepsilon} \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (14)$$

ここで、 $C_{1\varepsilon}$ 、 $C_{2\varepsilon}$ 、 σ_k 、 σ_ε はモデル定数であり、それぞれの値を表-1 に示す。なお、 P_{kv} 及び $P_{\varepsilon v}$ は次式によって算出する。

$$P_{kv} = C_k \frac{u_*^3}{h}, \quad P_{ev} = C_e \frac{u_*^4}{h^2} \quad (15a, b)$$

表-1 モデル定数

C_μ	$C_{1\varepsilon}$	$C_{2\varepsilon}$	σ_k	σ_ε
0.09	1.44	1.92	1.0	1.3

2. 2. 3 底面摩擦の計算方法

Nays2D では、底面の摩擦はマンニングの粗度係数 n_m を用いて設定する。平均流速公式にマンニング則を適用した場合、(4a, b) 式の河床摩擦係数 C_f は次式で表現することができる。

$$C_f = \frac{g n_m^2}{h^{1/3}} \quad (16)$$

マンニングの粗度係数はセル単位に任意の実数値を設定することが可能である。また、このマンニングの粗度係数は Manning-Strickler により次式のように相対粗度高さに関連づけることができる。

$$n_m = \frac{k_s^{1/6}}{7.66\sqrt{g}} \quad (17)$$

2. 2. 4 植生による抵抗の計算方法

Nays2D では、植生の抵抗は、植生の抗力係数 C_D と単位体積に占める植生の遮断面積 a_s を用いて設定する。単位体積に占める植生の遮断面積 a_s は、セル単位で任意の実数値として設定することができる。単位体積に占める植生の遮断面積 a_s は清水ら³⁾ が提案した以下の式を用いて算出される。

$$a_s = \frac{n_s D_s}{S_s^2} \quad (18)$$

ここで、 n_s は植生本数、 D_s は植生の平均幹径、 S_s はサンプリング格子幅である。

2. 2. 5 流砂の基礎方程式

Nays2D で、河床変動計算を行う場合、流砂の種類として、「掃流砂のみ」と「掃流砂+浮遊砂」の2種類から選択可能である。また、河床材料については、「均一粒径」と「混合粒径」の2種類から選択可能である。混合粒径モデルは2. 2. 6以降に説明し、以下では均一粒径の河床変動モデルについて説明する。

a) 無次元河床せん断力

合成流速 V および河床に作用する無次元全せん断力 τ_* は次式で表わされる。

$$V = \sqrt{u^2 + v^2}, \quad \tau_* = \frac{h l_e}{s_g d} \quad (19a, b)$$

ただし、 h は水深、 I_e はエネルギー勾配、 s_g は水中比重、 d は河床材料の粒径である。 I_e にマニング則を適用すると、 τ_* は次式となる。

$$\tau_* = \frac{C_f V^2}{s_g g d} = \frac{n_m^2 V^2}{s_g d h^{1/3}} \quad (20)$$

b) 掃流砂量

均一粒径モデルを選択した場合は、水深平均流速の方向(V の方向)の全掃流砂量 q_b はM. P. M式⁵⁾と芦田・道上の式⁶⁾から求めることができる。

$$\text{M. P. M 式} \quad q_b = 8(\tau_* - \tau_{*c})^{1.5} \sqrt{s_g g d^3} \quad (21)$$

$$\text{芦田・道上式} \quad q_b = 17\tau_*^{1.5} (1 - \tau_{*c}/\tau_*) (1 - \sqrt{\tau_{*c}/\tau_*}) \sqrt{s_g g d^3} \quad (22)$$

ここで、 τ_{*c} は無次元限界掃流力で岩垣の式⁴⁾で求める。

以上の式により求められた全流砂量を、流線曲率による二次流と河床勾配の影響を考慮して ξ 、 η 方向に変換する。渡邊ら⁷⁾によれば、 ξ 、 η 方向の掃流砂量は次式で与えられる。

$$\tilde{q}_b^\xi = q_b \left[\frac{\tilde{u}_b^\xi}{V_b} - \gamma \left(\frac{\partial z_b}{\partial \xi} + \cos \theta \frac{\partial z_b}{\partial \tilde{\eta}} \right) \right], \quad \tilde{q}_b^\eta = q_b \left[\frac{\tilde{u}_b^\eta}{V_b} - \gamma \left(\frac{\partial z_b}{\partial \tilde{\eta}} + \cos \theta \frac{\partial z_b}{\partial \xi} \right) \right] \quad (23a, b)$$

ただし、 $\tilde{u}_b^\xi$ および $\tilde{u}_b^\eta$ はそれぞれ ξ および η 方向の河床近傍の流速、 V_b は河床近傍の合成流速、 θ は ξ 軸と η 軸のなす角度である。 γ は斜面勾配による流砂の補正係数であり、長谷川⁹⁾によれば次式で与えられる。

$$\gamma = \sqrt{\frac{\tau_{*c}}{\mu_s \mu_k \tau_*}} \quad (24)$$

ただし、 μ_s および μ_k は河床材料の静止摩擦係数および動摩擦係数である。

c) 河床近傍の流速の算定

水深平均流の流れに沿って、水深平均流速と河床近傍の流速の関係を次のような単純な関係式を仮定する。

$$\tilde{u}_b^s = \beta V \quad (25)$$

ただし、 $\tilde{u}_b^s$ は水深平均流の流線(以下単純に流線と呼ぶ)に沿った河川近傍の流速である。Engelund⁹⁾によれば、水深方向の流速分布に放物線分布を用いた場合、 β は次式となる。

$$\beta = 3(1 - \sigma)(3 - \sigma), \quad \sigma = \frac{3}{\phi_0 \kappa + 1} \quad (26a, b)$$

ただし、 ϕ_0 は流速係数($=V/u_*$)、 κ はカルマン乗数($=0.4$)である。一般に、流線が曲っている場合には2次流(螺旋流)が発生する、ここではこの2次流による河床近傍の流速の算定に次式を用いる。

$$\tilde{u}_b^n = \tilde{u}_b^s N_* \frac{h}{r_s} \quad (27)$$

ただし、 $\tilde{u}_b^n$ は流線の方向に直交する方向(流線方向から反時計周りに 90 度の方向)の河床近傍の流速、 r_s は流線の曲率半径、 N_* は定数(=7 Engelund⁹⁾)である。(25)式および(27)式より(23a, b)式中の V_b は、

$$V_b = \sqrt{\tilde{u}_b^s{}^2 + \tilde{u}_b^n{}^2} \approx \tilde{u}_b^s \quad (28)$$

となる。なお上式の近似は、一般に $\tilde{u}_b^n$ は $\tilde{u}_b^s$ より 1 オーダー小さい値となるためである。 $\tilde{u}_b^\xi$ および $\tilde{u}_b^\eta$ は以下の変換により求められる。

$$\begin{aligned} \tilde{u}_b^\xi &= \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial s} \tilde{u}_b^s + \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial n} \tilde{u}_b^n = \left(\frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial y} \right) \tilde{u}_b^s + \left(\frac{\partial x}{\partial n} \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial n} \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial y} \right) \tilde{u}_b^n \\ &= (\cos \theta_s \tilde{\xi}_x + \sin \theta_s \tilde{\xi}_y) \tilde{u}_b^s + (-\sin \theta_s \tilde{\xi}_x + \cos \theta_s \tilde{\xi}_y) \tilde{u}_b^n \\ &= \frac{1}{\xi_r} \left\{ (\cos \theta_s \xi_x + \sin \theta_s \xi_y) \tilde{u}_b^s + (-\sin \theta_s \xi_x + \cos \theta_s \xi_y) \tilde{u}_b^n \right\} \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \tilde{u}_b^\eta &= \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial s} \tilde{u}_b^s + \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial n} \tilde{u}_b^n = \left(\frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial y} \right) \tilde{u}_b^s + \left(\frac{\partial x}{\partial n} \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial n} \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial y} \right) \tilde{u}_b^n \\ &= (\cos \theta_s \tilde{\eta}_x + \sin \theta_s \tilde{\eta}_y) \tilde{u}_b^s + (-\sin \theta_s \tilde{\eta}_x + \cos \theta_s \tilde{\eta}_y) \tilde{u}_b^n \\ &= \frac{1}{\eta_r} \left\{ (\cos \theta_s \eta_x + \sin \theta_s \eta_y) \tilde{u}_b^s + (-\sin \theta_s \eta_x + \cos \theta_s \eta_y) \tilde{u}_b^n \right\} \end{aligned} \quad (30)$$

ただし、 s および n はそれぞれ流線およびこれに直交する方向を表し、流線と x 軸のなす角度を θ_s として、

$$\frac{\partial x}{\partial n} = -\frac{v}{V} = -\sin \theta_s, \quad \frac{\partial y}{\partial n} = \frac{u}{V} = \cos \theta_s \quad (31a, b)$$

$$\frac{\partial x}{\partial s} = -\frac{u}{V} = \cos \theta_s, \quad \frac{\partial y}{\partial s} = \frac{v}{V} = \sin \theta_s \quad (32a, b)$$

などの関係を用いている。また、(25)式のように β を表したが、(23a, b)式の右辺第 1 項には結局、分子・分母に β が含まれることになるので、 β が任意の値で良いことになる。

d) 流線の曲率

Nays2D では(24)式で用いられる流線の曲率(1/曲率半径)を以下のように求めている。

流線の曲率(1/曲率半径)は、 x 軸と s 方向の角度を θ_s とすると次式で表わされる。

$$\frac{1}{r_s} = \frac{\partial \theta_s}{\partial s}, \quad \theta_s = \tan^{-1} \left(\frac{v}{u} \right) \quad (33a, b)$$

ここで、 $T = v/u$ とすると、上式は次のように書き表せる。

$$\begin{aligned}\frac{1}{r_s} &= \frac{\partial}{\partial s} [\tan^{-1}(T)] = \frac{\partial}{\partial T} [\tan^{-1}(T)] \frac{\partial T}{\partial s} = \frac{1}{1+T^2} \frac{\partial T}{\partial s} = \frac{1}{1+\left(\frac{v}{u}\right)^2} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{v}{u}\right) = \frac{u^2}{u^2+v^2} \frac{u \frac{\partial v}{\partial s} - v \frac{\partial u}{\partial s}}{u^2} \\ &= \frac{1}{V^2} \left(u \frac{\partial v}{\partial s} - v \frac{\partial u}{\partial s} \right)\end{aligned}\quad (34)$$

ここで,

$$\frac{\partial}{\partial s} = \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial}{\partial y} = \frac{u}{V} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{v}{V} \frac{\partial}{\partial y} = \frac{u}{V} \left(\xi_x \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial}{\partial \eta} \right) + \frac{v}{V} \left(\xi_y \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \quad (35)$$

であり, 結局, 曲率 $1/r_s$ は次式で表される.

$$\frac{1}{r_s} = \frac{1}{V^3} \left[u^2 \left(\xi_x \frac{\partial v}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) + uv \left(\xi_y \frac{\partial v}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) - uv \left(\xi_x \frac{\partial u}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) - v^2 \left(\xi_y \frac{\partial u}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \right] \quad (36)$$

e) 浮遊砂浮上量

浮遊砂の浮上量式としては, 以下の Itakura and Kishi の式¹⁰⁾を採用している.

$$q_{su} = p_k^* K \left[a_* \frac{\rho_s - \rho}{\rho_s} \cdot \frac{gd}{\sqrt{\tau_*}} \Omega - w_f \right] \quad (37)$$

$$\Omega = \frac{\tau_*}{B_*} \cdot \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \xi \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp[-\xi^2] d\xi}{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp[-\xi^2] d\xi} + \frac{\tau_*}{B_* \eta_0} - 1 \quad (38)$$

$$a' = \frac{B_*}{\tau_*} - \frac{1}{\eta_0}, \quad \eta_0 = 0.5, \quad a_* = 0.14, \quad K = 0.008 \quad (39a-d)$$

ただし, q_{su} は浮遊砂の単位面積当たりの河床からの浮上量, w_f は浮遊砂の沈降速度であり Rubey の式¹¹⁾より求める. B_* は揚力算定の際の速度に摩擦速度を適用するための換算係数であり, 均一粒径の場合は $B_* = 0.143$ の一定値が用いられる.

f) 浮遊砂濃度連続式

一般曲線座標系における浮遊砂濃度の連続式は以下の式で表される.

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\bar{c}h}{j} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{u^\xi \bar{c}h}{j} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{u^\eta \bar{c}h}{j} \right) = \left(\frac{q_{su}}{J} - \frac{w_f c_b}{J} \right) \quad (40)$$

ここで, $\bar{c}$ は水深平均浮遊砂濃度, c_b は河床近傍の浮遊砂濃度 (基準点濃度) である. 拡散項については, 簡単のため, 省略して記述した. また, 基準点濃度 c_b すなわち浮遊砂の底面付近 ($z = b = 0.05D$) の濃度は次式で表される.

$$c_{bk} = \int_{-\infty}^{\infty} \xi \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp[-\xi^2] d\xi = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \exp(a'^2) \quad (41)$$

次に、浮遊砂の水深方向平均濃度 $\bar{c}$ と基準点濃度 c_b の関係を知る必要がある。 $\bar{c}$ と c_b の関係式としては、清水・板倉¹²⁾が用いた次式で与えるものとする。

$$C_k = \frac{c_{bk}}{\gamma} (1 - e^{-\gamma}) \quad (42)$$

g) 流砂連続式

まずは、平面 2 次元の直交座標系における流砂の連続式を示す。

$$\frac{\partial z_b}{\partial t} + \frac{1}{1-\lambda} \left[\frac{\partial q_b^x}{\partial x} + \frac{\partial q_b^y}{\partial y} + q_{su} - w_f c_b \right] = 0 \quad (43)$$

ただし、 t は時間、 z_b は河床高、 q_b^x 、 q_b^y は x 、 y 方向の単位幅掃流砂量、 q_{su} は単位面積当たりの浮遊砂浮上量、 w_f は浮遊砂の沈降速度、 c_b は基準点濃度、 λ は河床材料の空隙率である。計算条件設定において「掃流砂のみ」を選択した場合は、浮遊砂浮上量、基準点濃度はゼロとなり、浮遊砂は考慮されない。

なお、Nays2D では流れの基礎式と同様に上式を一般座標系に変換した方程式を計算している。

2. 2. 6 混合粒径モデルについて

Nays2D では掃流砂による河床変動計算の計算条件設定において河床材料に「混合粒径」を選択することができる。(ただし、現時点では、「浮遊砂」の計算には「混合粒径」の取り扱いに対応していない。)

混合粒径で構成される河床はある粒度分布により構成されている。この粒度分布を数値的に扱うためには、図-1 に示すような河床の粒径加積曲線を n 階層に分割し、各階層を代表粒径 d_k でとその代表粒子の存在確率 p_k で表現する。なお、中央粒径 d_m は次式で定義される。

$$d_m = \sum_{k=1}^n p_k d_k \quad (44)$$

ここに、 d_k : k 階層の代表粒径、 p_k : 河床全体に占める k 階層の粒子の割合である。

この様に n 階層に分割されたそれぞれの階層における流砂量を見積もり、これを足し合わせることで河床変動を計算する。したがって、流砂の連続式は次式で表わされる。

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{z_b}{J} \right) + \frac{1}{1-\lambda} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\sum q_{bk}^{\xi}}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\sum q_{bk}^{\eta}}{J} \right) \right] = 0 \quad (45)$$

ここに、 z_b : 河床高、 λ : 河床の空隙率、 q_{bk}^{ξ} 、 q_{bk}^{η} : ξ 、 η 方向の k 階層の掃流砂量である。各階層における全掃流砂量は、粒径別に拡張された芦田・道上式により求められる。

$$q_{bk} = 17 \tau_*^{3/2} \left(1 - \frac{\tau_{*ck}}{\tau_{*k}} \right) \left(1 - \sqrt{\frac{\tau_{*ck}}{\tau_{*k}}} \right) \sqrt{s_g g d_k^3} \quad (46)$$

ここに、 q_{bk} ：流線方向の全流砂量、 s_g ：土粒子の水中比重、 τ_{*k} ： k 階層の粒径に作用する無次元掃流力、 τ_{*ck} ： k 階層の粒径の無次元限界掃流力です。ここで、 τ_{*k} は次式で求められる。

$$\tau_{*k} = \frac{u_*^2}{s_g g d_k} \quad (47)$$

また、各粒径の無次元限界掃流力の算定には、遮蔽効果を考慮する必要がある。ここでは、Egiazaroff の式を修正した浅田の式¹³⁾を用いている。

$$\frac{\tau_{*ck}}{\tau_{*cm}} = \left[\log_{10} 23 / \log_{10} (21 d_k / d_m + 2) \right]^2 \quad (48)$$

ここで、 τ_{*cm} は中央粒径の無次元限界掃流力であり、岩垣の式⁴⁾を用いて算定します。全流砂量から ξ , η 方向流砂量の算定は均一粒径の場合と同じく渡邊の式⁷⁾を用いる。

$$\tilde{q}_{bk}^{\xi} = q_{bk} \left[\frac{\tilde{u}_b^{\xi}}{V_b} - \gamma \left(\frac{\partial z_b}{\partial \xi} + \cos \theta \frac{\partial z_b}{\partial \eta} \right) \right], \quad \tilde{q}_{bk}^{\eta} = q_{bk} \left[\frac{\tilde{u}_b^{\eta}}{V_b} - \gamma \left(\frac{\partial z_b}{\partial \eta} + \cos \theta \frac{\partial z_b}{\partial \xi} \right) \right] \quad (49a, b)$$

ここで、流速の添え字 b は底面近傍の流速を表わす。河川湾曲流など流線が曲げられる場合、流線とは垂直方向に2次流と呼ばれる流れが発生し、土砂の移動に大きな影響を及ぼす。ここではEngelund に従い、以下のように2次流による横断方向の流速を見積もる。

$$\tilde{u}_b^n = \tilde{u}_b^s N_* \frac{h}{r_s} \quad (50)$$

ここで、 $\tilde{u}_b^s$, $\tilde{u}_b^n$ は s , n 軸の底面近傍の流速、 r_s は流線の曲率である。また、 N_* は2次流算定の係数であり、Engelund⁹⁾に従い7としている。この s , n 軸の流速を座標変換によって、 ξ , η 方向に変換し、流砂量を算出する。また、 γ は長谷川⁹⁾によるものを簡易的に各粒径別に拡張する。

$$\gamma = \sqrt{\frac{\tau_{*ck}}{\mu_s \mu_k \tau_{*k}}} \quad (51)$$

また、混合粒径河床での分級現象を再現するために、芦田・江頭・劉ら¹⁴⁾が提唱した多層モデルの概念を導入している。これは、河床を図-2のように河床を交換層、遷移層及び堆積層に分割するものであり、交換層における粒度分布の時間変化は次式で計算されます。

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p_{mk}}{J} \right) + \frac{p_{bk}}{e_m} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{z_b}{J} \right) + \frac{1}{(1-\lambda)e_m} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{q_{bk}^{\xi}}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{q_{bk}^{\eta}}{J} \right) \right] = 0 \quad (52)$$

ここで、 p_{mk} ：交換層での各粒径の存在割合、 e_m ：交換層厚で最大粒径もしくは90%粒径が用いられる。また、 p_{bk} は河床が浸食しているか堆積しているかにより取る値が異なり、以下のように扱う。

$$\begin{aligned}
 p_{bk} &= p_{mk} & \frac{\partial z}{\partial t} > 0 \\
 p_{bk} &= p_{tk} & \frac{\partial z}{\partial t} < 0
 \end{aligned}
 \tag{53}$$

ここで、 p_{tk} ：遷移層における各粒径の存在割合である。なお、流砂量の計算には交換層における各粒径の存在割合を用いる。なお、数値計算上では、浸食・堆積だけでなく、変動量によっても扱いを変える必要がある。すなわち、堆積が生じる場合で、1ステップの河床変動量によって遷移層厚が堆積層厚を上回った場合、堆積層厚分を新たな堆積層とし、残りの部分を遷移層とする。また、反対に浸食が生じる場合では、河床変動によって遷移層がなくなった場合は、遷移層直下の堆積層を新たな堆積層とする。

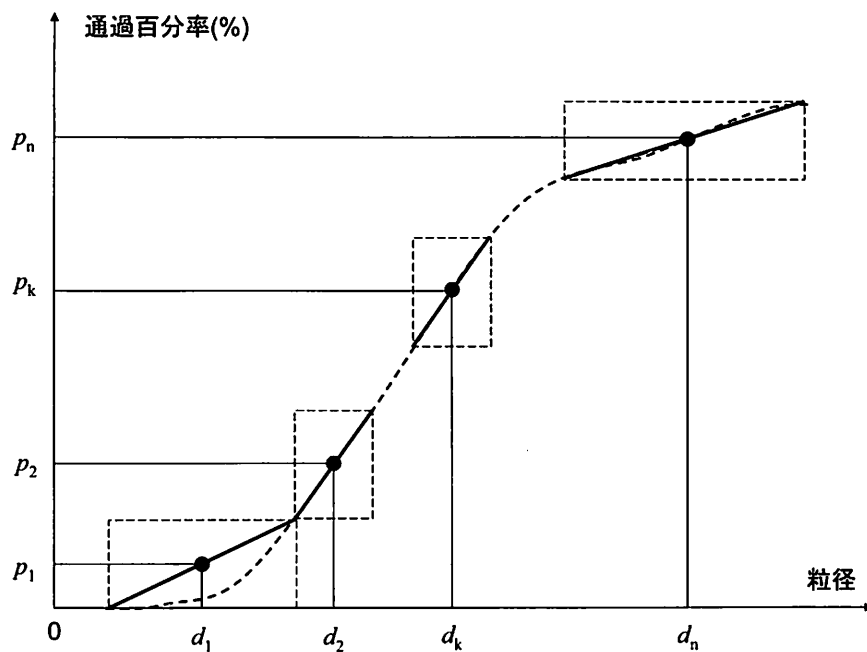


図-1 粒径分布の取り扱い

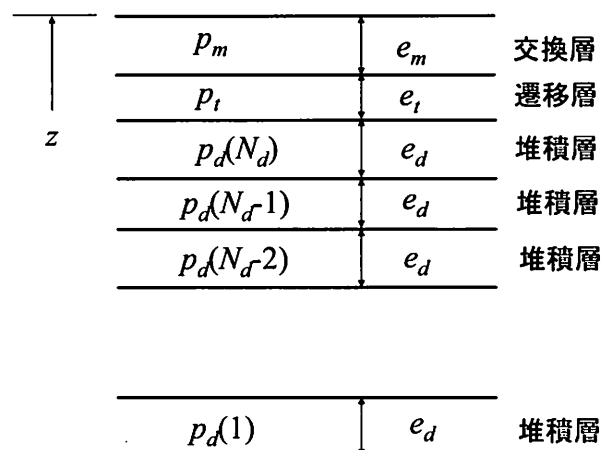


図-2 多層モデルの概念図

2. 2. 7 河岸侵食モデルについて

Nays2D では図-3 に示すような河岸侵食モデルを選択することができる。河岸（計算格子の左右端（ $j=1$ と $j=ny$ ））で河床低下が生じ、河岸の角度が水中安息角 θ_c 以上となった場合、水中安息角を超える部分は瞬間的に崩落するものと仮定し、河岸の角度が水中安息角となるように格子を再配置すると同時に侵食量に等しい量の土砂量を洗掘箇所へ埋め戻すという作業を行う。

2. 2. 8 斜面崩落モデルについて

河床変動計算では、河床高さは流砂の連続式により更新される。しかしながらこの式から計算された河床は、河床材料が持つ安息角以上の急勾配となることがある。このような現象は例えば、高水敷と低水路の間や構造物周辺の河床変動、砂州前縁線の近傍で見られる。また河岸侵食の様な現象は、流砂の連続関係のほか、河岸から土砂が崩落することも重要な要素となる。このような現象を計算格子内で扱うには、河床変動により計算された河床角度をある基準値以下に補正する斜面崩落モデルの導入が必要となる。斜面崩落モデルにはこれまで様々なモデルが提案されている。Nays2d ではその中でも簡便なモデルである限界角度を判定基準とした斜面崩落モデルを用いている。これは、一メッシュ間の角度が設定したある角度を超えたとき、土砂の体積保存を考えて瞬時に限界角度にするというモデルである（図-4）。

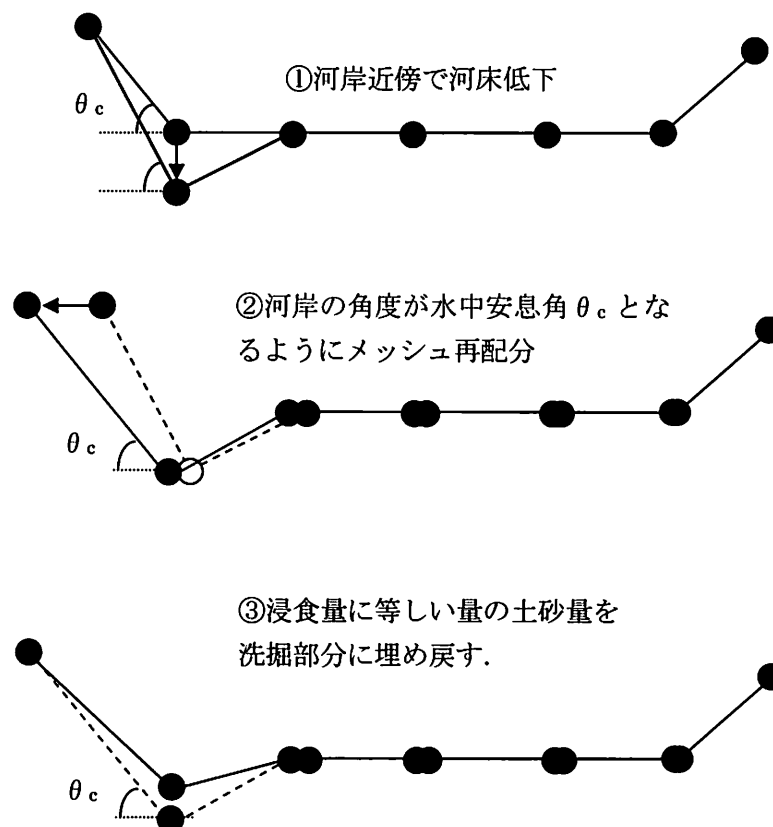


図-3 河岸侵食計算の模式図

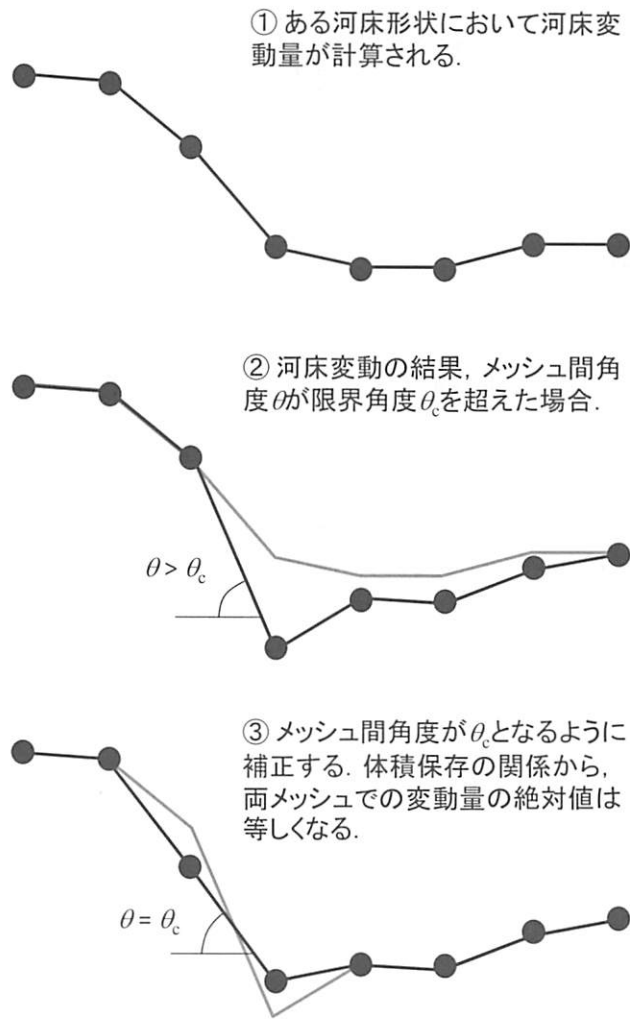


図-4 斜面崩落モデルの概念図

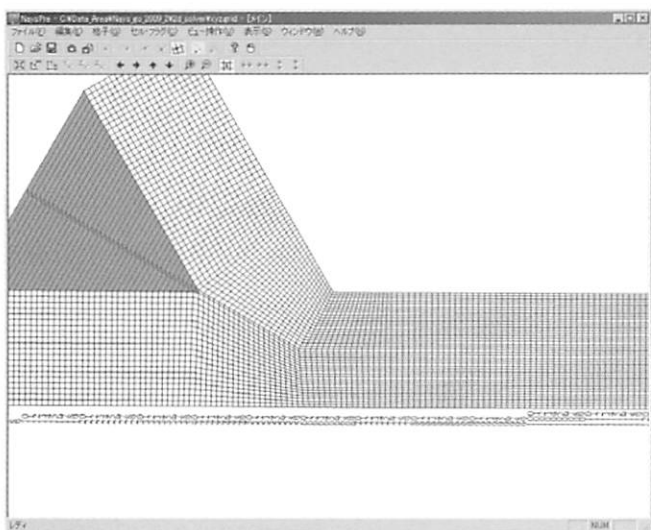


図-5 Aタイプ対応 grid イメージ

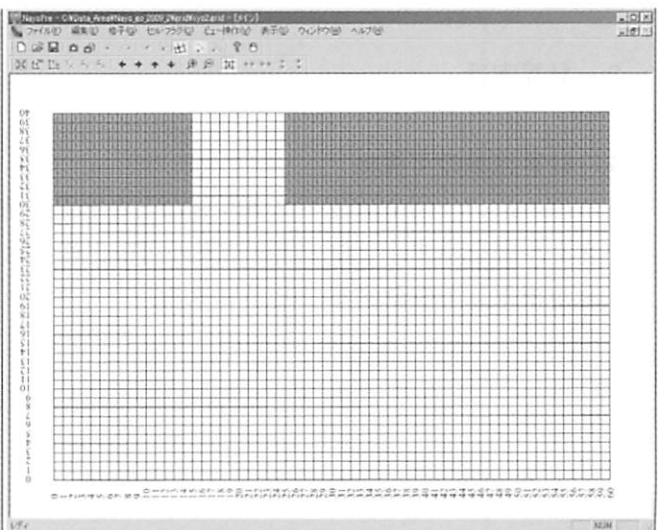


図-6 Bタイプ対応 grid イメージ

2. 2. 9 支川合流モデルについて

Nays2D では支川合流を計算するための格子を作成することができる。(ただし、考慮できる流入河川数は2(本川と支川)で、下流端では合流して水路が一つになっている必要がある。また、支川合流タイプの格子には、現時点では「混合粒径」と「河岸浸食」の計算は対応していない。)

支川合流タイプの計算格子は、合流の角度によって図-5 または図-6 のように2通りから選択ができる(Aタイプ;分岐合流タイプ, Bタイプ;横合流タイプ)。なお、支川合流は、本川の左右岸のどちらから合流するかを選択できる。

2. 3 Nays2D による計算事例

iRIC では、格子生成や条件設定などの計算の前処理と計算結果の可視化など後処理を容易に行えるグラフィカルインターフェイス(GUI)を整備することによって、Nays2Dに限らずどのソルバーにおいてもiRIC上で格子生成や結果の可視化などを簡単に実行することができる。河川測量データやDEMデータなどの地形データの編集を単純化し航空写真を利用して植生や粗度などを設定できる機能、また低水路と高水敷を分けた計算範囲のメッシュ化作業を自動化する機能が装備されている。さらに、計算結果の可視化としてコンター図、仮想粒子(パーティクル)の動画表示、マウス操作による鳥瞰図表示など、プレゼンテーション技術に向上にも寄与できる機能が充実している。それらの操作はソルバーによらずほぼ共通の手順となる。ここではNays2Dによる簡単な計算事例として実河川における定常流れの計算例を示す。基本的な操作手順は以下のとおりである。

1. 計算格子の作成

図-7 に示す範囲を計算対象とし、図中に示されている測線における河川横断測量データから計算格子を作成する。測線上の横断方向分割数や各測線間の縦断方向分割数を指定することによって、図-8 に示すような計算格子を生成することができる。

2. 計算条件の設定

主な計算条件は図-9 に示すような条件設定のダイアログボックス内の項目に従って入力することができる。ここでは、流量条件を300m³/sの定常として計算を行う。また、マンニングの粗度係数、障害物セル、固定床セルおよび植生の密生度はセル毎に設定可能であり、マウス操作によるセル選択・設定を行うこともできる。

3. 計算実行

4. 計算結果の可視化

水深コンター図や流速ベクトル図などを容易に表示することができる。図-10 には可視化例として流速ベクトル図を示す。なお、計算結果の可視化作業は計算中でも行うことが可能であり、計算途中で計算結果を可視化して確認することができる。

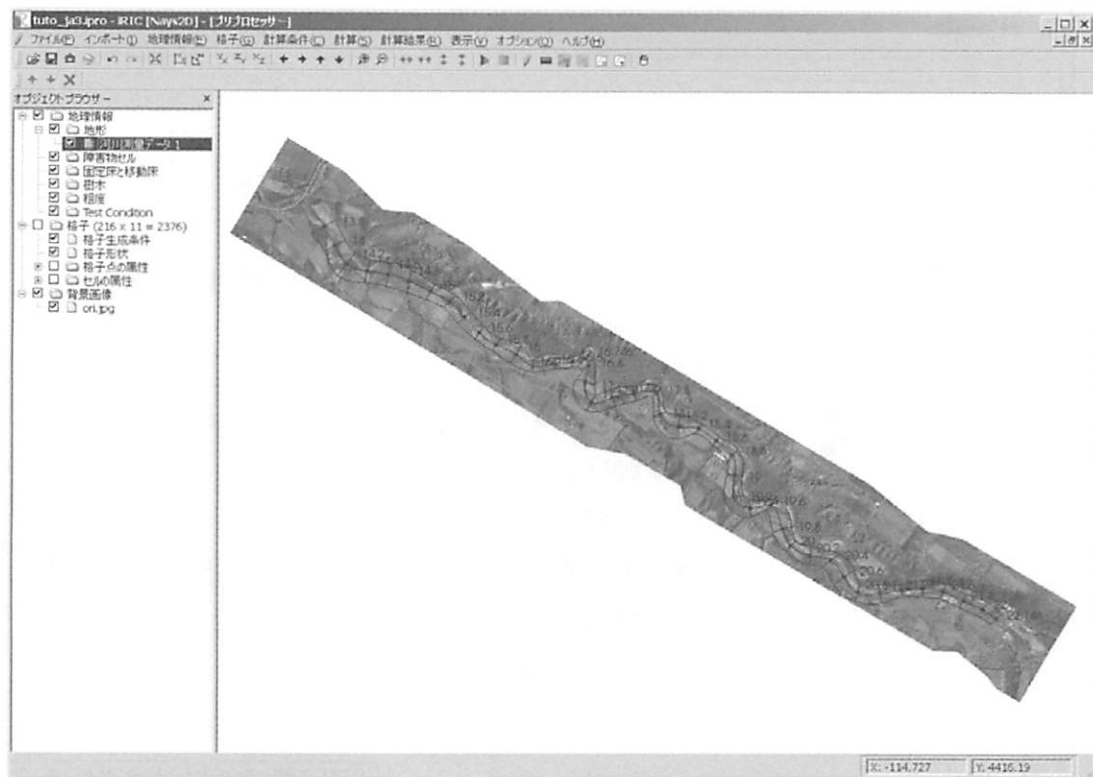


図-7 計算事例対象河川

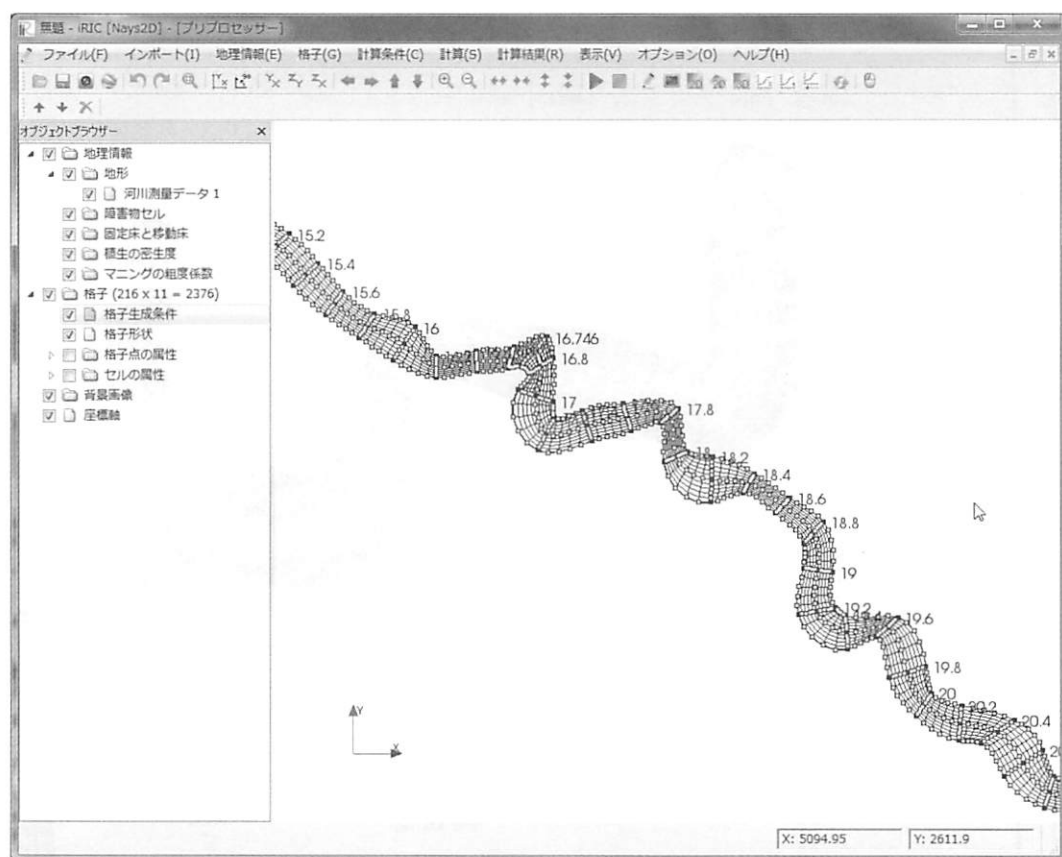


図-8 河川横断測量データからの格子生成

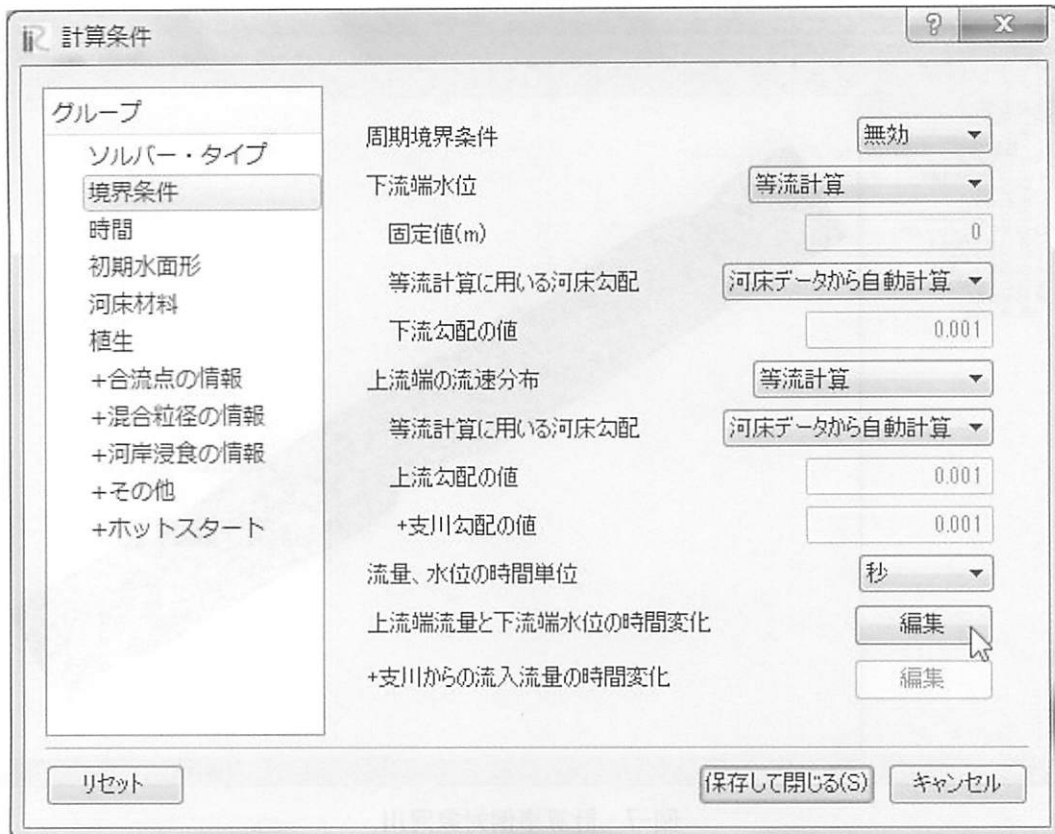


図-9 計算条件設定のダイアログボックス

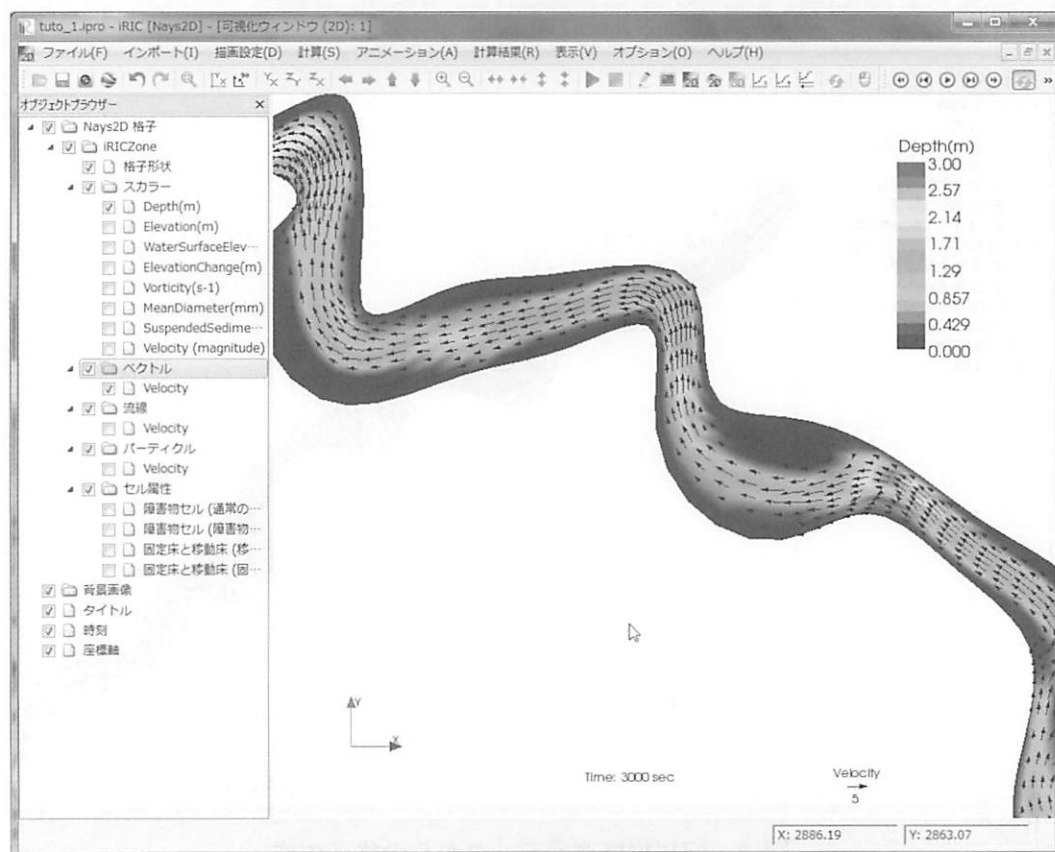


図-10 計算結果の可視化例（流速ベクトル図）

3. iRIC ソルバー Nays2DFlood

3. 1 Nays2DFlood の概要

Nays2d Flood は一般曲線座標で境界適合座標を用いた非定常平面 2 次元流計算による氾濫流解析用ソルバーである。本解析ソルバーは前出の Nays2D ソルバー内の平面二次元流計算を氾濫流解析に適用したものである。上流端および左右側方の任意の複数の箇所からの非定常流量の流入条件を容易に設定でき、中小河川流域における氾濫流解析に適用されている。また、河道データを用いず、地形データのみを用いることで計算手順を非常にシンプルにした氾濫モデルであり、詳細な河道データの無い原始河川や発展途上国における氾濫形態の解明などにも容易に適用することが可能である。

Nays2DFlood の主な特徴は以下のとおりである。

- ① Nays2d Flood で氾濫流計算を開始するまでの基本的な手順が非常にシンプルである。
- ② 座標系は一般曲線座標系を採用しており、複雑な境界や地形を考慮できる。
- ③ 運動方程式の移流項の差分法は、1 次精度風上差分法と CIP 法から選択可能。
- ④ 上下流端の境界条件については、下流端水位の設定、上流端流速の設定など、さまざまな設定が可能である。
- ⑤ 左右の側方境界条件については、流出と流入を選択することができる。流入を選択することにより、複数河川から越水する場合など、複雑な氾濫形態を表現することが可能。
- ⑥ 初期水面形は、水深ゼロ、一定勾配から選択可能。
- ⑦ 底面摩擦はマンニングの粗度係数を用いて算定する。マンニングの粗度係数は、計算セル単位で設定することが可能である。
- ⑧ 計算領域中の障害物については、計算セル単位で設定できる。これにより、必要に応じて道路・堤防・盛土などの構造物を簡単に計算に取り入れることができる。

3. 2 Nays2D との相違点

Nays2DFlood は Nays2D の平面二次元流モデルを適用しており、流れに関しては共通の基礎方程式を計算している。しかし、氾濫モデルへ適用するにあたって、条件設定等に Nays2D との相違点がある。以下に Nays2D との共通点および相違点について説明する。

3. 2. 1 基礎式

流れの基礎方程式は Nays2D と共通であり、式(1) - (3)の方程式を一般座標系に変換したものを解く。また、乱流場の計算方法は、渦動粘性係数が式(11)で表わされるような「ゼロ方程式モデル」を採用している（Nays2D では「渦動粘性係数一定」，「ゼロ方程式モデル」または「 $k-\epsilon$ モデル」から選択が可能であったが、現在 Nays2D-Flood では、操作手順の簡便性のためにこれらの選択肢を排除している。）。底面摩擦は、式(16)で表わされるようにマンニングの粗度係数によって計算される。また、Nays2D-Flood では、河床変動計算は行わないとしている。

3. 2. 2 流入条件の設定

Nays2D による計算対象は主に河道内流れであるため、流水の流入箇所は当然計算格子の上流端（および合流点モデルでは支川の計算格子の上流端）であるのに対して、氾濫流解析では氾濫原への流入箇所を指定する必要がある。流

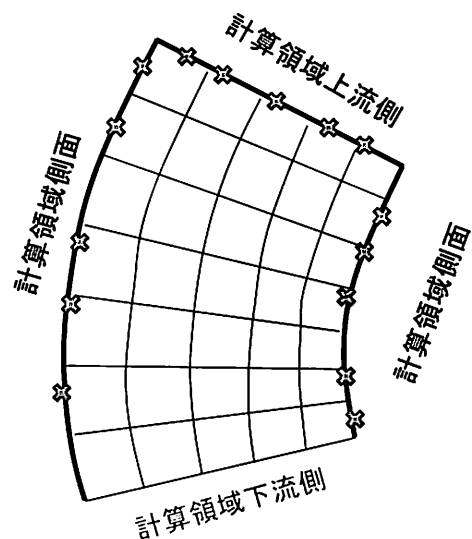


図-11 Nays2DFlood で設定可能な流入箇所

入箇所として想定されるのは、破堤箇所や氾濫原へ流れ込む無堤河川などである。

Nays2DFlood では図-11 に示すように計算領域の上流側および計算領域の両側面から各 5 箇所計 15 箇所までの範囲で任意の箇所からの流入を設定することができる。各流入箇所について、それぞれ流量の時系列データを設定することができる。任意の箇所からの流入条件を容易に設定できる点が本ソルバーの特徴である。

3. 3 Nays2DFlood による計算事例

Nays2DFlood は非常に簡便な氾濫流解析モデルではあるが、中小河川の氾濫解析、発展途上国の氾濫解析や原始状態の河川の氾濫現象解明などに適用されている。ここでは、原始状態における石狩川の氾濫現象の解明¹⁶⁾に適用した計算例を紹介する。

地形データは現在の LP データを用いた。ただし、捷水路や堤防など人工的に整備された河道のデータは取り除き、周辺のデータで補間したものを原始状態の氾濫原の地形データとして用いた。石狩川では、河川整備開始以前の明治 37 年に大洪水が発生し、この時、岡崎文吉によって詳細な流量観測が行われた。本計算例では、この時の流量観測データを用いて、本川および主な 3 つの支川から流入条件を設定して計算を行った。図-12 に明治 37 年洪水の実績浸水図を示し、図-13 に氾濫解析結果を示す。図は本川の洪水がピーク時の流況結果をしており、石狩川本川の水の流れと夕張川からの水の流れをパーティクルによって表わしている。計算結果の示す氾濫域は浸水図を良好に再現しているのがわかる。また、本川の洪水ピーク時には夕張川の流れは本川に流れ込めずに、千歳川流域へと逆流し氾濫流が停滞しているのがわかる。この計算では千歳川からの流入を設定していないにもかかわらず、逆流によって千歳川流域は広く浸水する結果となった。

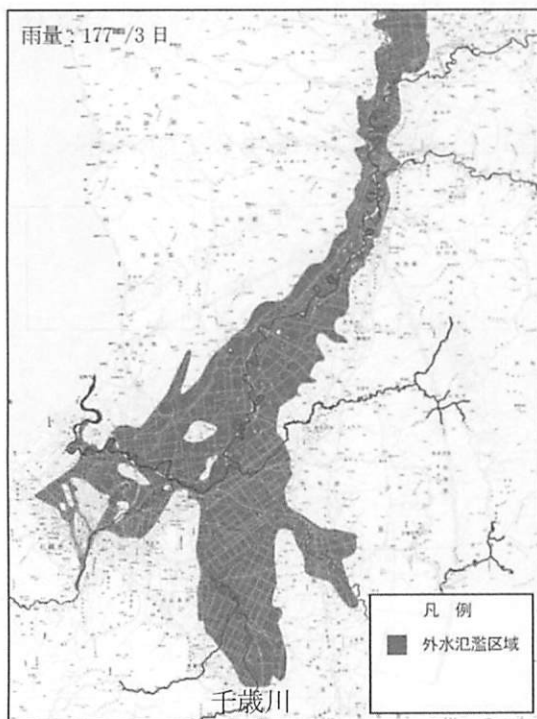


図-12 明治 37 年洪水 石狩川浸水図

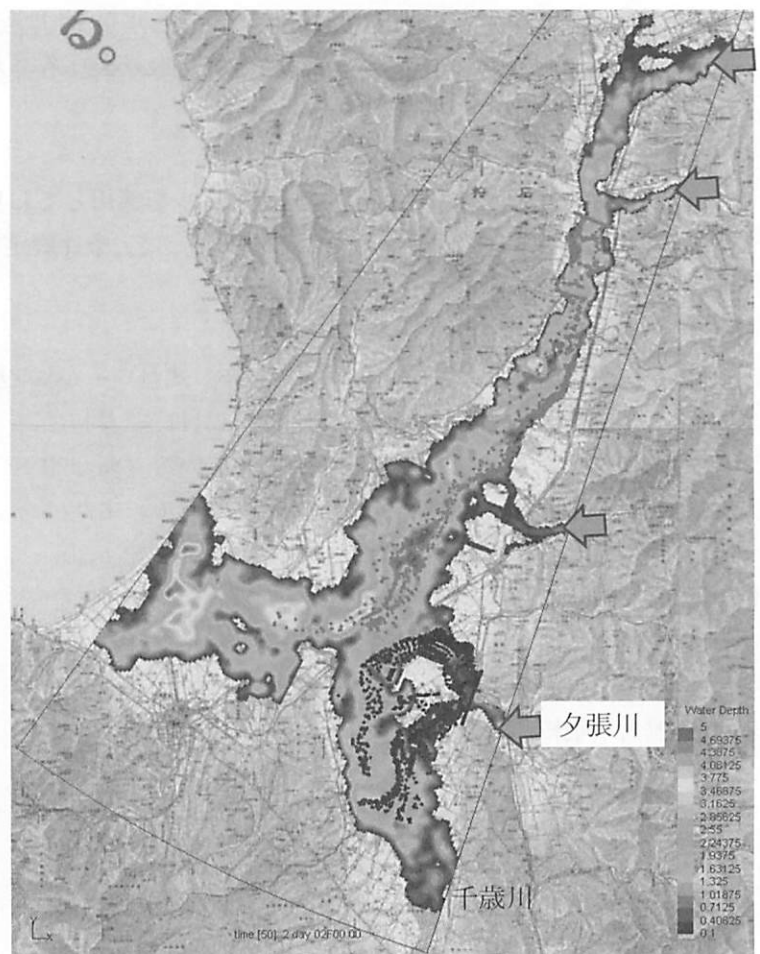


図-13 Nays2DFlood による計算事例

4. iRIC の今後の展開

本稿で紹介した計算事例の他にも最近では、平成 22 年 8 月に発生した忠別川上流水害調査、平成 23 年 9 月に発生した北海道音更川の河岸侵食災害、平成 23 年のタイ洪水での氾濫解析などにおいても iRIC を用いた分析・評価が行われている。今後も河川に関わる研究・実務に適応できるようソフトの充実・改善を図っていくところである。

また、今後の iRIC の発展にはユーザーの存在が最重要であることは開発者らの共通の認識であり、次のような事項でサポート体制の充実化が検討されている。

- ・ユーザー講習会の開催
- ・iRIC に関するテキストの発行
- ・ユーザーと開発者またはユーザー同士の交流（Web サイトの利用）
- ・バグ修正と維持管理対応
- ・新規ソルバーの追加

既にこれらの一環として、図-14 のように iRIC ホームページ (<http://i-ric.org/ja/>) ではソフトウェアに関連する情報を発信するとともに、ユーザーと開発者またはユーザー同士の交流の場としてユーザーコミュニティのサイトの整備・充実化を図っている。

iRIC の今後の展開で最も重要なのは、世界中の河川における課題に対してより広い視野で探求し続けることである。開発者・ユーザーに関わらず河川問題に関心のある者同士のコミュニティを拡張していくことによって、各個人の専門分野の枠を超えてより広い視野を持って河川問題に対する解決策を見い出していきたいというのが開発者らの iRIC に期待する将来像である。そのため、新たな計算ソルバーの開発・ユーザーサポートに加えて、河川問題について様々な観点から議論し合えるコミュニティの形成に貢献していくことも今後の展開として期待される。



図-14 iRIC の Web サイト

<参考文献>

- 1) Fisher, H.B.: Longitudinal Dispersion and Turbulent Mixing in Open-Channel Flow, Annual Review of Fluid Mechanics, Vol. 5, pp.59-78, 1973.
- 2) Webel, G., Schatzmann, M.: Transverse Mixing in Open Channel Flow, Journal of Hydraulic Engineering, Vol. 110, No. 4, pp. 423-435, 1984.
- 3) 清水義彦, 木葉竹重機・新船隆行: 樹林化河道の洪水流況と浮遊砂輸送に関する数値計算, 水工学論文集, 第44巻, pp.819-824, 2000.
- 4) 岩垣雄一: 限界掃流力の流体力学的研究, 土木学会論文集, 第41号, pp.1-21. 1956.
- 5) Meyer-Peter, E. and Müller, R. : Formulas for bed-load transport. Proceedings of 2nd Meeting, IAHR, Stockholm, Sweden, pp.39-64, 1948.
- 6) 芦田和男, 道上正規: 移動床流れの抵抗と掃流砂量に関する基礎的研究, 土木学会論文集, 第206号, pp. 59-69, 1972.
- 7) 渡邊明英, 福岡捷二, 安竹悠, 川口広司: 河道湾曲部における河床変動を抑制する樹木群水制の配置方法, 河川技術論文集, 第7巻, pp. 285-290, 2001.
- 8) 長谷川和義: 沖積蛇行の平面および河床形状と流れに関する水理学的研究, 北海道大学博士論文, pp. 1-184, 1984.
- 9) Engelund, F. : Flow and Bed Topography in Channel Bend, Jour. of Hydr. Div. , ASCE, Vol. 100. HY11, pp. 1631-1648, 1974.
- 10) Itakura, T. and Kishi, T. : Open channel flow with suspended sediments. *Proc. of ASCE, HY8*, pp. 1325-1343, 1980.
- 11) Rubey, W. W. : Settling velocity of gravel, sand and silt particles. *Amer. Jour. Sci*, 25, pp. 325-338, 1933.
- 12) 清水康行, 板倉忠興: 浮遊砂を考慮した河床変動計算手法, 土木試験所月報 No. 396, 北海道開発局土木試験所河川研究室, 1986.
- 13) 浅田宏・石川晴雄: 水流による河床砂礫の分級機構に関する研究 (III), 電力中央研究所報告, 第71015号, 1972.
- 14) 芦田和男・江頭進治・劉炳義・梅本正樹: 蛇行流路における Sorting 現象および平行河床形状に関する研究, 京都大学防災研究所年報, 第33号, B-2, pp. 261-279, 1990.
- 15) Yabe, T., Ishikawa, T. : A Numerical Cubic-Interpolated Pseudoparticle(CIP) Method without Time Splitting Technique for Hyperbolic Equations, Journal of the Physical Society of Japan, Col. 59, No. 7, pp. 2301-2304, 1990.
- 16) 鈴木英一, 山口里実・谷育美: 石狩川の最初の治水計画および効果の検証, 土木学会論文集 B1 (水工学) Vol. 68, No. 4, I_1507-I_1512, 2012.