

ブシネスクモデルによる波浪変形計算の精度と現地適用性

Applicability of Boussinesq-type Wave Transformation Model

平 山 克 也
Katsuya HIRAYAMA

1. はじめに

波による水平流速の鉛直分布関数を仮定して導出されたさまざまな非線形分散性波動方程式は、港湾や海岸周辺の比較的広い浅海域で生じる波浪変形を高精度に記述することができる。なかでも豊富なバリエーションを有するブシネスク方程式に対しては、実海域への適用を想定して提案されたさまざまな境界処理法とともにブシネスクモデルが構築され、すでに港湾設計等の実務にも供されている。そこで本講ではこの発展と活用の現状、および課題を概説する。

まず2章では、ブシネスク方程式の発展とその種類を紹介するとともに、代表的なブシネスク方程式について非線形分散波の記述精度を述べる。つぎに3章では、水面波の記述精度と差分計算を行う際の取り扱いの容易さの観点から選定したブシネスク方程式を用いて、現地の港湾や海岸を対象とした波浪変形計算を実施するために必要な、さまざまな境界処理法とその妥当性について述べる。さらに4章では、すでに、一部の港湾設計等の実務で実際に使用されているブシネスクモデルの適用事例や活用法を紹介する。最後に、5章においてまとめを行う。

2. ブシネスク方程式の発展

2. 1 ブシネスク方程式以前

ブシネスク方程式の特長は、浅海波の非線形（波峰を急峻にする）効果と分散（波峰をなだらかにする）効果を記述できることである。すでに19世紀半ばには、これらがバランスしたときにみられる孤立波がRussel (1844) によって発見され、その後19世紀終わりには、Korteweg and de Vries (1895) によってこれを説明するKdV方程式が導出された。一方、Boussinesq (1871) は、このときすでに、伝播とともに変形する波の取り扱いをも可能とする研究を行っていた。しかし、今日我々が通常「ブシネスク方程式」と呼んでいる、初期のブシネスク方程式がPeregrine (1967) やAbbott et al. (1978) によって示されたのは、それから約100年も後のことであった。なお、これらの歴史的変遷については、木田 (1994) や合田 (1999) に比較的詳しく紹介されている。

2. 2 初期のブシネスク方程式

(1) Peregrine (1967), Abbott et al. (1978) によるブシネスク方程式

基礎的なものとして通常よく引用されるブシネスク方程式は、水深が変化する場を対象としたPeregrine (1967) の式や一様水深を仮定したAbbott et al. (1978) の式である。

$$\text{連続式} \quad : \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \cdot [(h + \varepsilon \eta) \bar{u}] = 0 \quad (1)$$

運動方程式

$$\text{Peregrine (1967)} : \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \varepsilon \bar{u} \nabla \bar{u} + g \nabla \eta = \mu^2 \left(\frac{h}{2} \nabla [\nabla \cdot (h \bar{u}_t)] - \frac{h^2}{6} \nabla [\nabla \cdot u_t] \right) \quad (2)$$

$$\text{Abbott et al. (1978)} : \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \varepsilon \bar{u} \nabla \bar{u} + g \nabla \eta = \mu^2 \frac{h^2}{3} \nabla [\nabla \cdot u_t] \quad (3)$$

ここに、 η は水位、 $\bar{u}$ は水深平均流速ベクトル、 h は静水深、 ε 、 μ は摂動パラメータ

これらの方程式は、長波から浅海波にかけての非線形分散波の時空間での波形変化を直接算定することができるが、その適用範囲は、相対水深で $0 < h/L < 0.06$ 程度の浅い海域に限られる。

なお、Mei (1989) はオイラーの連続式と運動方程式で表される完全流体に非回転の条件を課し、速度ポテンシャル表示したこれらの式と、水底面における運動学的境界条件、および水表面における運動学的および力学的境界条件に対して、級数展開された速度ポテンシャルを代入することにより、式(1)と式(2)あるいは式(3)を誘導できることを示している。

(2) ブシネスク方程式の流量フラックス表示

x , y 方向の線流量フラックスをそれぞれ P , Q とすると、それらは水深平均流速を鉛直方向に底面から水面まで積分して与えられる。式(1)～(3)に示した Peregrine (1967) や Abbott et al. (1978) によるブシネスク方程式は、このような流量フラックスを用いて記述されることもある。なお、摂動パラメータ ε , μ の次数に着目すると、式(1)～(3)は弱非線形、弱分散性の波動方程式に分類される。また、これらの式において $O(\varepsilon)$ オーダーまでを残すと非線形長波方程式が、 $O(\varepsilon)$, $O(\mu^2)$ オーダー以降をすべて無視すると線形長波方程式がそれぞれ導かれる。これらは、沖から浅海域にかけての津波伝播計算などに従来からよく用いられている。

2. 3 さまざまなブシネスク方程式

喜岡 (1999) は、鉛直積分型の非線形分散波動方程式を、まず流速場（または圧力場）の表示方法によって分類し、次に非線形分散波に対する近似度に着目して各々のブシネスク方程式の特徴を整理した。この詳細は文献をご参照いただくとして、ここでは、流速場の表示に代表流速（または流量フラックス）を用いるブシネスク方程式系について、その概要を以下に述べる。

(1) 分散項が補正されたブシネスク方程式

Madsen et al. (1991) あるいは Madsen and Sørensen (1992) は、長波近似を用いた基礎的なブシネスク方程式の3階微分の分散項に対して補正項を導入し、浅海域から深海域にかけての分散特性が改善されることを示した。この方法では、後述するように、分散項の微分次数を高めることなく波の非線形性に対する近似精度を向上させることができるので、境界処理が比較的簡便に行えるなど、差分計算上有利である。

線形長波の運動方程式を利用して導出された分散特性の補正項を Peregrine(1967)の式に付加して整理すると、次のような Madsen and Sørensen (1992) による運動方程式が得られる。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial P}{\partial t} + gD \frac{\partial \eta}{\partial x} + \varepsilon \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{P^2}{D} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{PQ}{D} \right) \right\} \\ x \text{ 方向 : } & = \mu^2 \left[\left(B + \frac{1}{3} \right) h^2 \left(\frac{\partial^3 P}{\partial x^2 \partial t} + \frac{\partial^3 Q}{\partial x \partial y \partial t} \right) + Bgh^3 \left(\frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \eta}{\partial x \partial y^2} \right) \right. \\ & \quad \left. + h \frac{\partial h}{\partial y} \left(\frac{1}{6} \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial t} + Bgh \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} \right) + h \frac{\partial h}{\partial x} \left(\frac{1}{3} \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial t} + \frac{1}{6} \frac{\partial^2 Q}{\partial y \partial t} + 2Bgh \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + Bgh \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \right) \right] \quad (4) \\ & \frac{\partial Q}{\partial t} + gD \frac{\partial \eta}{\partial y} + \varepsilon \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{PQ}{D} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{Q^2}{D} \right) \right\} \end{aligned}$$

$$y \text{ 方向: } = \mu^2 \left[\left(B + \frac{1}{3} \right) h^2 \left(\frac{\partial^3 P}{\partial x \partial y \partial t} + \frac{\partial^3 Q}{\partial y^2 \partial t} \right) + Bgh^3 \left(\frac{\partial^3 \eta}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \eta}{\partial y^3} \right) \right. \\ \left. + h \frac{\partial h}{\partial x} \left(\frac{1}{6} \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial t} + Bgh \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} \right) + h \frac{\partial h}{\partial y} \left(\frac{1}{6} \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial t} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 Q}{\partial y \partial t} + Bgh \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + 2Bgh \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \right) \right] \quad (5)$$

このときの分散項の補正係数は $B=1/15$ が良いとされている。

また、一様水深を仮定すると、水深 h の空間微分がゼロとなることより式(4), (5)から容易に Madsen et al. (1991) の式を得る。なお、このときの分散項の補正係数は $B=1/21$ が良いとされている。

一方、Beji and Nadaoka (1996) は、Peregrine (1967) の式(2)の分散項を部分的に「置き換え」ることで、完全なエネルギー保存特性を有したまま分散特性が改善されることを示している。

(2) 任意深度の水平流速を用いたブシネスク方程式

Nwogu (1993) は、任意深度 $z=z_\alpha$ での水平流速ベクトル u_α を代表流速に用い、これによって得られる流速場と圧力場の表現式を、断面積分した連続式とオイラーの運動方程式に代入することで、次のようなブシネスク方程式を導いている。

$$\text{連続式} : \eta_t + \nabla \cdot [(h + \varepsilon \eta) u_\alpha] + \mu^2 \nabla \cdot \left\{ \left(\frac{z_\alpha^2}{2} - \frac{h^2}{6} \right) h \nabla (\nabla \cdot u_\alpha) + \left(z_\alpha + \frac{h}{2} \right) h \nabla [\nabla \cdot (h u_\alpha)] \right\} = 0 \quad (6)$$

$$\text{運動方程式} : u_{\alpha t} + \nabla \eta + \varepsilon (u_\alpha \cdot \nabla) u_\alpha + \mu^2 \left\{ \frac{z_\alpha^2}{2} \nabla (\nabla \cdot u_\alpha) + z_\alpha \nabla [\nabla \cdot (h u_\alpha)] \right\} = 0 \quad (7)$$

代表深度 z_α は、分散特性が最適となるように設定される。ここで、代表流速 u_α を定義する水深 z_α に対するパラメータを α とし、次式で定義する。

$$\alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{z_\alpha}{h} \right)^2 + \frac{z_\alpha}{h} \quad \text{または、} \quad \alpha = \frac{1}{2} \alpha'^2 + \alpha' \quad \text{ただし、} \quad \alpha' = \frac{z_\alpha}{h} \quad (8)$$

なお、Nwogu (1993) の式で分散特性が最適となるのは、 $\alpha=-0.390$ としたときである。

(4) 高次摂動展開されたブシネスク方程式

ブシネスク方程式において水面波の非線形性や分散性に関する近似精度を高める方法の一つに、摂動パラメータ ε , μ の次数を高めた高次ブシネスク方程式を誘導する方法が挙げられる。喜岡・柏原 (1995) は、Nwogu の式を拡張して $O(\varepsilon^2)$, $O(\varepsilon \mu^2)$, $O(\mu^4)$ までは考慮した高次ブシネスク方程式を導き、非線形性のみしか持たない $O(\varepsilon^m)$ ($m>2$) の非線形項は $O(\varepsilon)$ と $O(\mu^2)$ の近似バランスにいかなる仮定を設けても現れないことを示した。つまり、高次の非線形性パラメータ ε^m を有する非線形項は、すべて分散性パラメータ μ^2 が乗じられた項となっているため、分散性の近似精度を高めない限り高次の非線形性に関するブシネスク方程式の精度は向上されない。一方、中嶋ら (2002) は、無限級数を用いて高次ブシネスク方程式の一般形を誘導している。

(5) 近似度を改善したその他の非線形波動方程式

金山 (1997) は、水深方向に分割した各層にブシネスク方程式を適用した多層モデルを構築することにより、強分散性の波動方程式を提案している。ここで、 N 個に分割した各層に適用されるブシネスク方程式は、水平流速の層内鉛直平均値を代表流速に用いた波動方程式として捉えることができる。これらに含まれる鉛直流速の鉛直分布を与える必要はあるものの、各深度の水平流速は鉛直方向に連続な基本モードに支配されないため、水平流速のさまざまな鉛直分布 (圧力分布) を算定することができる。また、没水平板や透過潜堤などの境界条件を比較的容易に取り込むことが可能である。

これに対し、基礎的なブシネスク方程式を含む一般の非線形不規則波動方程式は、水平流速の鉛直分布関

数の自由度にはある程度の制約が課せられており、これが非線形分散波の近似精度を低下させる直接の原因となっている。しかしその一方で、Galerkin 法を用いて誘導された灘岡・中川（1993）による多成分連成法や変分原理を用いた磯部（1994）による非線形緩勾配波動方程式では、双曲線型や任意の鉛直依存性関数をそれぞれ重ね合わせて流速場を表現することで、水平流速の鉛直分布関数の自由度を大きく向上させることに成功している。そのため、これらの非線形不規則波動方程式では、強非線形や強分散性を有する波浪場の数値解析に適用することが可能であるが、一般に、境界条件の取り扱い是非常に複雑になると考えられる。なお、これらの方程式では、単一成分の鉛直分布関数を用い、かつ位相速度と群速度に適当な関係式を代入する、あるいは鉛直分布関数にべき乗級数を与えることにより、それぞれの波動方程式から単一成分のべき乗級数を鉛直分布関数とした通常の（基礎的な）ブシネスク方程式を誘導することができる。

2. 4 非線形分散波の記述精度

(1) 線形分散特性の記述精度

ここでは、2. 3 節で述べたさまざまなブシネスク方程式のうち、とくに弱非線形、弱分散性の波動方程式に分類されるものを中心として、それらの非線形項を無視し、水平床上を伝播する波浪場を考えることにより、それらの線形分散特性を検討する。

まず、Peregrine（1967）の式(2)、および Abbott（1978）の式(3)からそれぞれ導かれる線形分散関係式は、次のような同じ式で表される。

$$\frac{C}{\sqrt{gh}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{(kh)^2}{3}}} \quad (9)$$

一方、補正項によって浅海域から深海域にかけての分散特性が修正された、Madsen and Sørensen（1992）の式(4)、(5)および Madsen et al.（1991）の式からそれぞれ導かれる線形分散関係式も同じ次式となる。

$$\frac{C}{\sqrt{gh}} = \sqrt{\frac{1 + B(kh)^2}{1 + \left(B + \frac{1}{3}\right)(kh)^2}} \quad (10)$$

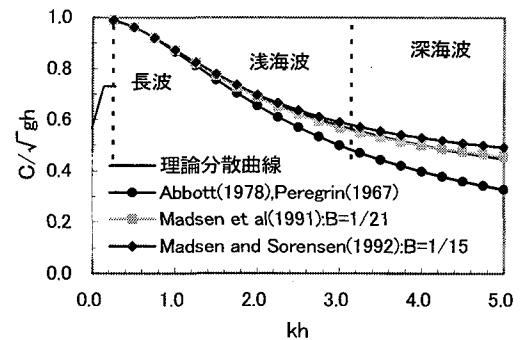


図-2.1 ブシネスク方程式の線形分散特性

ブシネスク方程式に対するこれらの線形分散関係式(9)、(10)による理論分散曲線の再現性を示すと図-2.1 のようになる。式(10)に対しては $B=1/15$ とした場合と $B=1/21$ とした場合について示し、それぞれ Madsen and Sørensen（1992）の式と Madsen et al.（1991）の式に対応している。長波の領域では、いずれの分散関係式も理論分散曲線によく一致する。ところが、分散特性を修正しない分散関係式(9)では、浅海波、深海波の領域になるにつれて理論分散曲線による値を大きく下回るのに対し、分散項に補正項を加えたブシネスク方程式の分散関係式(10)では、浅海波の領域でも理論分散曲線によく一致し、深海波の領域でも、 $B=1/15$ の場合には水深波長比 $h/L=0.5$ ($kh=3.1$) 程度まで、 $B=1/21$ の場合には $h/L=0.64$ ($kh=4.0$) 程度まで良い一致を示す。補正係数 B の最適値の選定にあたってはつぎの波の非線形性に関する議論を待たなければならないが、港湾設計において通常対象となる長波および浅海波の線形分散特性は、分散特性を修正したブシネスク方程式によって精度よく記述されることがわかる。

次に、Nwogu（1993）の式(6)、(7)の線形分散関係式は、次式で表される。

$$\frac{C}{\sqrt{gh}} = \sqrt{\frac{1 - \left(\alpha + \frac{1}{3}\right)(kh)^2}{1 - \alpha(kh)^2}} \quad (11)$$

この式は、 $\alpha=-1/3$ と置くと、基礎的なブシネスク方程式における線形分散関係式(9)に一致する。一方、 $\alpha=-2/5$ と置くと、補正項により分散特性を修正したブシネスク方程式の線形分散関係式(10)において、 $B=1/15$ とした Madsen and Sørensen (1992) の式の分散特性を表すようになる。なお、Nwogu (1993) が提案する α の最適値は前述のように $\alpha=-0.390$ であるから、これらの分散特性はよく似ていると考えられる。

なお、喜岡・柏原 (1995) による高次ブシネスク方程式では、 $\alpha'=-0.625$ ($\alpha=-0.4297$) (式(8)参照) とすると、波速に関して深海における適用性が最も改善されるようである。ここで、 $B=1/15$ とした Madsen and Sørensen (1992) の式において α' を求めると、 $\alpha'=-0.553$ が得られる。すなわち、この式において代表流速が設定された深度は、 $z_a=-0.553h$ であったことがわかる。また、水深方向に分割した各層にブシネスク方程式を適用した多層モデルの分散特性は、層数 N の増加とともに理論曲線に漸近することが、金山ら(2000)によって確認されている。

(2) 2次非線形波の記述精度

波の非線形性に対する非線形波動方程式の近似精度は、一般に、2次の伝達関数をストークス第2近似解と比較することで評価される。ここでは、2.3節で述べたさまざまなブシネスク方程式のうち、とくに弱非線形、弱分散性の波動方程式に対し、水平床上を伝播する単一成成分波の2次波の近似精度を検討する。

ブシネスク方程式(4)、(5)による2次近似波形は次式で表される。

$$\eta = \frac{H}{2} \cos \psi + \left(\frac{H}{2} \right)^2 \frac{\eta^{(2)}}{(\eta^{(1)})^2} \cos 2\psi \quad (12)$$

ここで、

$$\frac{\eta^{(2)}}{(\eta^{(1)})^2} = \frac{\frac{1}{4h} \frac{\omega^2}{kh} \left\{ 3 + 8 \left(B + \frac{1}{3} \right) (kh)^2 \right\}}{\frac{\omega^2}{kh} \left\{ 1 + 4 \left(B + \frac{1}{3} \right) (kh)^2 \right\} - gk \{ 1 + 4B(kh)^2 \}} \quad (13)$$

一方、ストークス理論による2次近似波形は次式で与えられる。

$$\eta = \frac{H}{2} \cos \psi + \left(\frac{H}{2} \right)^2 k \frac{\cosh kh (\cosh 2kh + 2)}{4(\sinh kh)^3} \cos 2\psi \quad (14)$$

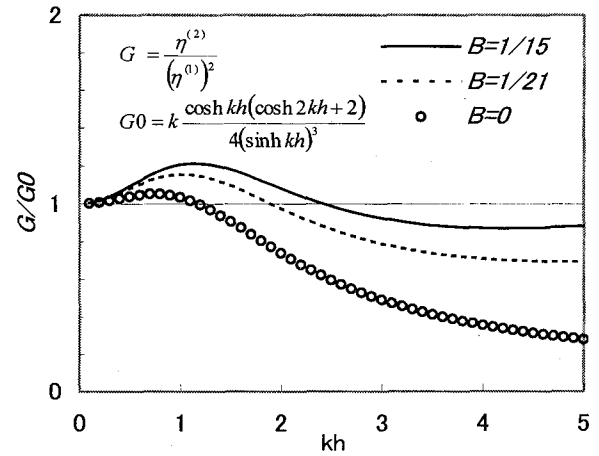


図-2.2 ブシネスク方程式の2次波の近似精度

式(12)と(14)のうち、それぞれの第2項を比較することにより、ブシネスク方程式による2次の非線形性の精度が検証される。両式における $\cos 2\psi$ の係数について比較した結果を図-2.2 に示す。ここで、 $\eta^{(1)}/h=0.1$ とした。図中、 $B=0$ は基礎的なブシネスク方程式 (Peregrine (1967) あるいは Abbott (1978)) に、 $B=1/15$ は Madsen and Sørensen (1992) の式に、 $B=1/21$ は Madsen et al. (1991) の式にそれぞれ対応している。とくに $B=1/15$ とすると、浅海域から深海域に至る広い範囲にわたって、2次の非線形性に対する計算精度が向上されることがわかる。

(3) ブシネスクモデルの基礎式の選定

ブシネスク方程式において、波の分散性は圧力場を記述する分散項によって表現されている。そして、この記述精度を向上させるためには、オイラーの式を鉛直積分する際に用いる水平流速の鉛直分布関数の自由度を、極力高める必要がある。しかしながら、この自由度の増加に伴い、導出される波動方程式の形状はさらに複雑になる傾向にある。例えば、強分散性の波動方程式である金山 (1997) による多層モデルや、灘岡・中川 (1993) による多成分連成法、あるいは磯部 (1994) による非線形緩勾配波動方程式などはこの例であろう。したがって、これらを基礎式を用いた波浪変形計算モデルを開発する際には、これまで開発されたさまざまな境界処理法をそのまま活用することが困難な場合もみられる。

一方、ブシネスク方程式の誘導過程において、摂動パラメータ ε , μ^2 の次数を上げることで波の非線形性を高める方法が考えられる。喜岡・柏原（1995）による式をはじめ、このような考えに基づいた高次ブシネスク方程式がすでに数多く提案されている。ところが、これらの方程式では空間に対して高階の導関数が含まれるため、現実の港湾を対象とする場合など、さまざまな境界条件の設定が必要な数値計算では、差分式の取り扱いが非常に複雑なものとなる。このため、基礎方程式の近似精度に見合った高精度の境界処理を行うことが困難となる。

これらのことを考慮すると、現在のところ、現地港湾や海岸などの波浪場の計算に適用し得るブシネスク方程式の非線形分散波に対する近似精度は、基礎的なブシネスク方程式と同じ $O(\varepsilon, \mu^2)$ 程度であろうと考えられる。その中で、分散特性に関して見かけ上の近似精度が向上された、Nwogu（1993）の式やMadsen and Sørensen（1992）の式における実務への適用性は、極めて高いと考えられる。実際、これらの方程式は、研究面や実用面で広く用いられるなかで、水の粘性により生じる底面摩擦や砕波に伴う乱れによる渦動粘性の効果の取り扱いや、開境界や陸境界における波の透過や反射に対する計算法などのさまざまな境界処理法が提案され、多くの計算事例が蓄積されている。

ブシネスク方程式における工学的な課題は、港湾設計で対象とする波浪場の数値計算において、現地に存在する複雑な自然地形やさまざまな港湾構造物の影響を考慮し、かつ実用上、信頼できる計算結果を得ることである。したがって、非線形分散波の影響を港湾設計に反映させる一つの方策として、弱非線形、弱分散性のブシネスク方程式の適用限界を十分認識しながら、さらに計算事例の蓄積に努める一方、適用範囲外とされている波浪条件や、いまだ計算法が確立されていない境界条件の処理法について検討をすすめ、ブシネスク方程式の適用範囲を拡張していくことが有効であると思われる。

3. ブシネスクモデルの構築

波の非線形性と分散性を考慮でき、かつ屈折系と回折系の波浪変形を同時に計算できる汎用的な数値計算モデルを開発して、研究や実務における波浪変形問題の解決に役立てる取組が世界中で行われている※。これらの基礎式にはNwogu（1993）の式を拡張したWei et al.（1995）やMadsen and Sørensen（1992）のブシネスク方程式が使用されているが、このうち本講では後者を基礎式に用いたブシネスクモデル：NOWT-PARIを例に、現地港湾等を対象とした波浪変形計算を行うために導入されたさまざまな境界処理法とそれらの妥当性について述べる。

3. 1 基本的なブシネスクモデル

(1) 基礎方程式と差分計算法

NOWT-PARIの基礎方程式は式(4)、(5)に示したMadsen and Sørensen（1992）による修正ブシネスク方程式である。そして、この離散化にはADI差分法を適用し、空間差分に対してはスタッガード格子を用いた中央差分法、時間差分に対しては前進差分法を用いている。

(2) 境界処理法

ブシネスク方程式は無限に広がる完全流体からなる波浪場を対象として、水表面および水底面の力学的、

※ 例えば、デラウェア大学のKirbyらは、Wei et al.（1995）の式を基礎式としたブシネスクモデル：FUNWAVEを開発し、Web上で公開している。また、DHIは、Madsenらが開発したブシネスクモデル（初期の基礎式はMadsen and Sørensen（1992））を組み込んだ統合沿岸域解析ソフトウェアを開発・販売しているが、プログラムは公開されていない。一方、港湾空港技術研究所の平山らは、Madsen and Sørensen（1992）の式やこれを透水層内に拡張した式（平山，2001）を用いたブシネスクモデル：NOWT-PARIを開発している。このうち基本プログラムは、有志による勉強会等を通じて関係者に公開されている。

運動学的境界条件を用いて誘導されたものである。したがって、陸地や構造物が存在する沿岸域の波浪場や、水の粘性や水面の不連続性等が問題となる現象へ適用する際には、それらによる波の変形を取り扱うための境界処理法の導入が不可欠となる。ここでは、現地の港湾や海岸を計算対象とする際に最低限必要と思われるこれらの境界処理法について、その概要を述べる。なお、これらを導入して行うブシネスクモデルによる波浪変形計算のイメージを図-3.1に示す。

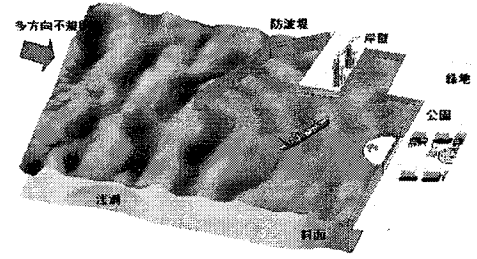


図-3.1 波浪変形計算のイメージ

a) 造波境界

時間発展的に解を得るブシネスクモデルでは、差分計算の各時刻で水位や流速などの物理量が算定される。これはちょうど、平面実験水槽で造波した際に、水位や流速の変動を観察したり計測機器で測定したりするようすに似ている。このことからわかるように、ブシネスクモデルによる造波には、平面実験水槽における造波理論を援用することができる。NOWT-PARI では、サーペント型造波装置と同様に、与えられた沖波の方向スペクトル関数から多方向不規則波を造波する機能が組み込まれている。

さらに、実験水槽でもそうであるように、水槽や計算領域からの反射波が造波境界に到達する以前に造波を終了できない場合（不規則波を造波する場合など）には、造波境界において反射波を吸収したり沖へ透過させたりすることが必要である。実験水槽では前者が行われるが、NOWT-PARI では後者によって反射波の再反射を抑制している。すなわち、このモデルに導入された石井ら（1993）による線境界入射法では、造波境界を跨ぐ差分式を計算する際に、沖側、岸側それぞれの領域において入射波の水平流速や水位を加減することにより、反射波を沖側へ透過させながら入射波を岸側方向のみへ造波することができる。さらに、沖側へ透過された反射波を後述するスポンジ層によって消波することにより、吸収造波境界を実現している。このような無反射造波境界を実現する方法として、このほか、造波ソースによるわき出し法（Larsen and Dancy, 1983, 大山・灘岡, 1991）などが提案されている。

b) 反射境界

直立壁からなる防波堤や護岸の反射率はほぼ1と考えられ、この場合には完全反射境界が設定できる。一方、海域から計算領域を切り取る開境界では、計算領域を伝播した波が自由に透過し、反射率が0となるように設定しなければならない。NOWT-PARI では、スポンジ層とよばれるエネルギー吸収帯を設定することでこれを実現している。すなわち、スポンジ層内の差分計算では、運動方程式(4)、(5)の左辺に付加した抵抗項によって波エネルギーを減衰させて消波する。エネルギー吸収係数にはCruzら（1993）の提案式を用いた。なお、当初導入されたエネルギー減衰項では波の分散特性によって吸収効率が異なり、少なくとも2波長分のスポンジ層幅を必要としたが、平山（2001）による高次エネルギー減衰項（式(16)、(17)）は安定した吸収効率を発揮し、ほぼ1波長分のスポンジ層幅で無反射境界が実現できることが確認されている（図-3.2）。

$$\text{エネルギー減衰係数: } \sigma(x) = \frac{r\sigma_m}{2(\sinh r - r)} \left[\cosh\left(\frac{rx}{F}\right) - 1 \right] \quad F = 2 \sim 3 \text{ 波長, } \sigma_m = \theta \sqrt{g/h}, \quad r = 3, \quad \theta = 1.0 \quad (15)$$

高次エネルギー減衰項

$$x \text{ 方向: } \sigma \left[P - \mu^2 \left\{ \left(B + \frac{1}{3} \right) h^2 \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} \right) + \frac{h}{6} \frac{\partial h}{\partial x} \left(2 \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) + \frac{h}{6} \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial Q}{\partial x} \right\} \right] \quad (16)$$

$$y \text{ 方向: } \sigma \left[Q - \mu^2 \left\{ \left(B + \frac{1}{3} \right) h^2 \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} \right) + \frac{h}{6} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{h}{6} \frac{\partial h}{\partial y} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + 2 \frac{\partial Q}{\partial y} \right) \right\} \right] \quad (17)$$

ところで、現地海域を対象とする場合には、加えて消波工や自然地形による波の反射率を任意に設定する必要がある。その方法の1つに、無反射境界に用いたスポンジ層の幅を調整して、目標とする反射率を得る方法が考えられる。平山・平石（2002）は、上述の高次型スポンジ層を用いた部分反射境界による反射率が、スポンジ層幅と入射波長の比（相対幅： F/L ）と良い相関があることを示し、次式を提案した。

$$K_r = 1 / \cosh\left(\frac{1}{a} \frac{F}{L}\right) \quad \text{ここで, } a=0.2 \quad (18)$$

また、目標反射率を得るために設定すべきスポンジ層の幅 F は次式で与えられる。

$$F = aL \cdot \ln(1/K_r + \sqrt{(1/K_r)^2 - 1}) \quad (19)$$

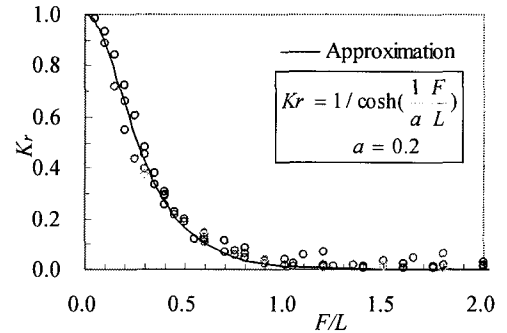


図-3.2 高次スポンジ層の反射率

c) 底面摩擦境界

海底摩擦は、主に海底面付近における鉛直渦動粘性により生じると考えられる。そこで、これが波浪変形に与える影響を考慮するために、完全流体を仮定して誘導される修正ブシネスク方程式(4), (5)の左辺に対して、次式で表される底面摩擦項を付加する。すなわち、レイノルズ数が非常に大きく乱流とみなせる場合には、摩擦抵抗は流速の2乗に比例する。

$$x \text{ 方向: } \frac{f}{2D} P \sqrt{\left(\frac{P}{D}\right)^2 + \left(\frac{Q}{D}\right)^2} \quad y \text{ 方向: } \frac{f}{2D} Q \sqrt{\left(\frac{P}{D}\right)^2 + \left(\frac{Q}{D}\right)^2} \quad (20)$$

d) 砕波計算

水面（自由表面）において砕波変形が生じている状況では、ブシネスク方程式の誘導過程で用いた水面の運動学的境界条件、すなわち、水粒子が水表面を飛び出さないという仮定を満足しない。さらに、砕波によって生じるジェット流が水面に突入する場合には、水面での圧力が大気圧と等しいという水面における力学的境界条件も満たされない。つまりブシネスク方程式では、砕波変形を厳密に記述することは不可能である。

そこで、ブシネスクモデルにおいて砕波変形を計算するためには、砕波する条件と砕波後のエネルギー逸散効果を運動方程式に反映させる砕波モデルの構築が必要となる。このうち、NOWT-PARI の基本プログラムでは、比較的取り扱いが簡便でかつ多くの計算事例を有する、Watanabe et al. (1984) による砕波判定指標と佐藤・Kabiling (1993) による運動量拡散項による砕波モデルを導入した。なお3.2節では、これに代わる新たな砕波モデルについて述べる。

砕波判定指標には、次に示す水表面における水粒子速度と波速の比を用いた。

$$\sqrt{u_s^2 + v_s^2} / \sqrt{gh} \geq \gamma_b \quad (21)$$

ここで、 u_s および v_s は水表面の水粒子速度の x および y 方向成分であり、それぞれ次式で与えられる。

$$x \text{ 方向: } u_s = u - \left(\frac{D^2}{2} - \frac{h^2}{6} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad y \text{ 方向: } v_s = v - \left(\frac{D^2}{2} - \frac{h^2}{6} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \quad (22)$$

また、 γ_b は砕波が生じる限界の流速波速比であり、0.8~1.0 とすれば実験結果との整合性が比較的良好ことが示されている（有川・磯部, 1997）。

つぎに、砕波によるエネルギー逸散は、砕波によって生じる乱れの運動量の割合を渦動粘性係数 ν_t で表した、次式に示す運動量拡散項を運動方程式(4), (5)の左辺に付加することによって表現した。

$$x \text{ 方向: } -v_t \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} \right) \quad y \text{ 方向: } -v_t \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} \right) \quad (23)$$

なお、ここで用いる渦動粘性係数は次式で定義されている。

$$v_t = \frac{\alpha_D s g d}{\sigma^2} \sqrt{\frac{g}{d} \frac{\hat{Q} - Q_r}{Q_s - Q_r}} \quad Q_s = 0.4(0.57 + 5.3s) \sqrt{g d^3} \quad Q_r = 0.135 \sqrt{g d^3} \quad (24)$$

ここで、 d は平均水深、 s は海底勾配、 $\hat{Q}$ は線流量の振幅である。 α_D は碎波点で 5、碎波帯外に向かって 1 波長の間は線形に減少し、1 波長離れた地点で 0 となる値である。

3. 2 応用的なブシネスクモデル

前節で述べた基本的なブシネスクモデルは、現実の港湾や海岸で生じるさまざまな波浪変形問題に対してすでに数多くの適用実績を有するなど、エネルギー平衡方程式法や高山法などの従来の線形モデルによる波浪変形計算を補完する高精度波浪変形計算法として、港湾設計の実務等で今後も広く活用されることが期待されている。ところが、消波ブロック被覆堤による波の部分反射や複雑な海岸地形やリーフ上の碎波や遡上、あるいは防波堤や護岸上の越波をより客観的に算定するためには、新たな境界処理法の開発・導入が不可欠である。そこで本節では、最新の NOWT-PARI において整備されているこれらの概要について述べる。

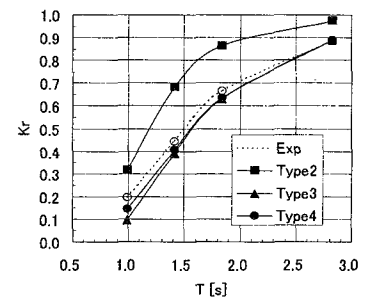
(1) 透水層を用いた任意反射計算

スポンジ層の幅を調整して目標とする波の反射率を実現する部分反射境界では、現実の消波工による物理的な運動量損失を考慮していないので、消波構造物による実際の波反射特性を再現することはできない。そこで、平山 (2001)、平山・平石 (2001) は、消波工内部で生じる層流・乱流抵抗係数を消波材の形状や積み方、空隙率などの工学的パラメータを用いて客観的に与えるとともに、Darcy 流速と Dupuit-Forchheimer の抵抗則を適用して、Madsen and Sørensen (1992) の式を透水層内に拡張した新たなブシネスク方程式を導出し、消波工に見立てた透水層内部の波浪変形現象を算定する任意反射境界処理法を開発した。なお、透水層内の空隙率を $\lambda=1$ (消波材がない) とすると、透水層による抵抗係数 $\alpha=\beta=0$ 、慣性力係数 $\tau=1$ となり、これらの透水層内ブシネスク方程式は、元の Madsen and Sørensen (1992) の式に完全に一致する。

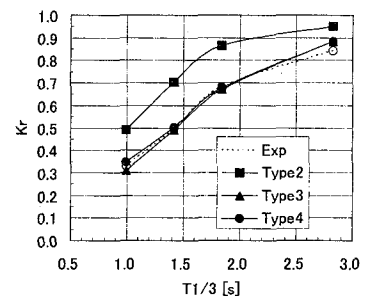
消波ブロック被覆堤による波の部分反射計算では、入射波は透水層内を伝播する過程で減衰した後、堤体直立壁面で完全反射し、反射波は透水層を伝播する過程で再び減衰するというプロセスが再現される。したがって消波工をモデル化した透水層では、波に消波材の抵抗が作用する距離や大きさ、すなわち消波工の設置幅や法面勾配がよく表現されなければならない。そこで透水層幅： B_W は消波工幅と同様とし、透水層の空隙率は消波工の法面勾配に応じて式(25)のように変化させた (λ_0 は消波工内の空隙率)。これを Type2 とする。

$$\lambda = \lambda_0 + (1 - \lambda_0) \frac{x}{B_W} \quad (0 \leq x \leq B_W) \quad (25)$$

その後、西井ら (2005) は、消波工内の空隙率の空間分布をより正確に与えることにより、反射率の再現性を向上させることができることを示した。そこで平山 (2006) は、斜面を非常に密な透水層とみなして遡上境界処理を実現した Madsen ら (1997) の研究を参考にこれを改良し、消波工の法面高さと空隙率の鉛直分布から、空隙率の空間分布を客観的



(a) 規則波, $H=3\text{cm}$, $h=0.35\text{m}$



(b) 不規則波, $H_{1/3}=3\text{cm}$, $h=0.35\text{m}$

図-3.3 透水層モデルの反射率

に算定する手法を提案した．すなわち，各計算格子上で空隙率の鉛直分布； $\lambda_v(z)$ が与えられたとき，その計算格子の透水層内の空隙率は次式で算定される．なお， $F(k,z)$ は水平流速の鉛直分布関数であり，透水層内の空隙率がこれに依存しない ($F(k,z)=1$) 通常の場合を Type3，依存する場合を Type4 とした．

$$\lambda = \frac{1}{\eta + h} \int_{-h}^{\eta} \lambda_v(z) \cdot F(k,z) dz \quad \lambda_v(z) ; \text{空隙率の鉛直分布}, F(k,z) ; \text{鉛直依存性関数} (k \text{ は波数}) \quad (26)$$

造波水路内に設置した消波ブロック被覆堤模型に対して透水層モデルをこのように設定し，模型実験で得られた波の反射率を数値計算で再現した結果を図-3.3 に示す．実験では，法面勾配 1:3/4 のテトラポッド乱積み消波工 ($\lambda_0=0.45$, $h=0.35\text{m}$) に，波高 3cm の規則波および不規則波を入射させた．再現計算の結果，いずれの場合も Type2 の透水層モデルでは，実験値に比べ 0.1~0.2 程度，反射率が過大に見積もられていたのに対し，Type3 および Type4 では，計算値は実験値を非常によく再現できることが確認できた．なお Type4 では，周期が短い (kh が大きい) 場合のみ，Type3 に比べ実験値により近い反射率が算定された．

一方，喜岡ら (1996) は，Nowgu (1993) の方程式を透水層中の流体運動に拡張した式を用い，構造物前面に透水層を配置することにより任意の反射率を設定した．しかし，所定の反射率を得るために空隙率と透水層幅を調整するなど，部分反射計算の考え方はスポンジ層による部分反射境界と同様であったようである．

(2) 乱流モデルに基づく砕波計算

NOWT-PARI の基本プログラムで導入した砕波モデルは，斜面上の砕波変形に対して佐藤・Kabiling (1993) が用いた運動量拡散項によるものであり，砕波による渦動粘性係数の算定には，比較的良好な計算結果を与える経験式が用いられていた．このほか，ブシネスク方程式を対象とした砕波モデルとしては，大規模渦の発生などの砕波構造を Surface roller の考え方を用いてモデル化した Schaffer et al. (1993) や，1 方程式乱流モデルを用いて乱れの生成や逸散過程を考慮した大山・長谷部 (2001) の研究などが知られている．また，Kennedy et. al. (2000)，Chen et. al. (2000) や平山・原 (2003) は，開水路の段波によるエネルギー逸散が海の波の砕波減衰を近似的によく表すことに着目して，時間発展型の Bore モデルを提案している．

NOWT-PARI における砕波計算の精度や適用性の向上を図るために，平山・平石 (2004, 2005) は，乱れエネルギーの生成項に時間発展型の Bore モデルを適用した，乱流モデルに基づく砕波モデルを提案した．すなわち，砕波による乱れエネルギーの生成・逸散過程は水深方向に平均した乱流方程式(27)によって算定され，その結果は渦動粘性係数を介してブシネスク方程式に追加した運動量拡散項に反映される．

$$\frac{\partial K}{\partial t} + (\bar{q} \cdot \nabla) K = P^* - \varepsilon + \nabla \cdot \left(\frac{\nu_t}{\sigma^*} \nabla K \right) \quad (27)$$

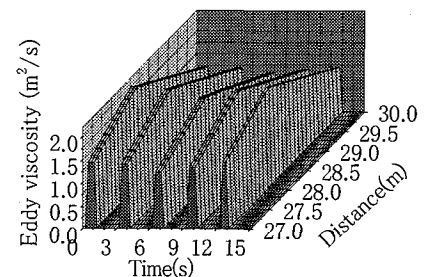
ここで， $\varepsilon = C_u K^{3/2} / l^*$ ，定数 $C_u=0.09$ ， $\sigma^*=1.0$

また， K は乱れエネルギー， $\bar{q} = (u, v)$ は水深平均流速ベクトルである． $l^*[\text{m}]$ は乱れスケールで， $l^* = 1.5H_0$ (H_0 は沖波波高)， ν_t は渦動粘性係数であり，次式で与えられる．

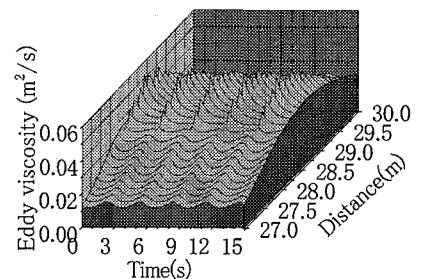
$$\nu_t = K^{1/2} l^* \quad (28)$$

さらに， P^* は x 方向あるいは y 方向の砕波による乱れエネルギー生成項であり，Bore 前後の単位時間・単位長さあたりのエネルギー逸散率に等しいとして，次式で表される．

$$P^* = P_g \frac{\partial E}{\partial x} / l^* \quad \text{or} \quad Q_g \frac{\partial E}{\partial y} / l^* \quad (29)$$



(a) 佐藤・Kabiling (1993)



(b) 平山・平石 (2004, 2005)

図-3.4 渦動粘性係数の分布

NOWT-PARI に導入された新旧の砕波モデル（式(24)および式(28)）によって算定された渦動粘性係数の時空間分布を図-3.4 に示す。この計算における砕波点は1次元水平リーフ地形のリーフエッジに当たる水平距離 28.3m 付近であるが、佐藤・Kabiling（1993）による砕波モデルでは、砕波時刻に集中した渦動粘性係数の空間分布のみを表現し、砕波に伴う波浪減衰が時間的に継続する現象は再現されない。一方、平山・平石（2004, 2005）による砕波モデルで算定される渦動粘性係数は、通過波の水位変動にも反応しながら時空間平面に比較的滑らかに広がり、砕波後も乱れが継続していることがわかる。

一方、砕波判定に関して NOWT-PARI の基本プログラムでは、式(21)に示した流速波速比を砕波判定指標に用いていた。これに対し新たな砕波判定法では、灘岡ら（1996）が提案した水表面での鉛直方向圧力勾配式にブシネスク近似を導入して得た式(30)を用い、大山・長谷部（2001）と同様に、これが 0.5 を下回るとき砕波と判定される。

$$\text{ブシネスク近似された鉛直方向圧力勾配式：} \quad -\frac{1}{\rho g} \frac{\partial p}{\partial z} \bigg|_{z=\eta} = 1 - \frac{1}{g} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{P}{D} \right) - \frac{D}{g} \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \left(\frac{P}{D} \right) \quad (30)$$

なお、ブシネスク方程式の弱非線形性による判定精度の低下を補うために、さらに斜面勾配をゼロとした合田（1973）による砕波限界波高の下限値を超えた波を砕波判定の対象としている。これは、各計算格子において砕波が生じる代表波の最小出現波高を予め規定することに等しいが、この条件を満たす波が実際に砕波するかどうかは式(30)による判定結果に従う。

(3) 越流公式を援用した遡上計算

平山・平石（2004, 2005）の遡上モデルは、水で覆われた水域格子と全水深が十分に小さい陸域格子との間の水位差を越流公式に代入して遡上・流下フラックス（以下ではまとめて越流フラックスと呼ぶ）を算定し、連続式の計算によって各計算格子の水位が更新されると水塊の遡上・流下が完了するというものである。ここで、水域と陸域の区別は全水深 D の大きさで判定され、 $D > \varepsilon_{dry}$ のとき水域格子(D_{water})、 $D \leq \varepsilon_{dry}$ のとき陸域格子(D_{land})と定義される（最小浸水深 ε_{dry} は沖波波高の 1%）。これらの定義を図-3.5 に示す。すなわち、水域格子と陸域格子

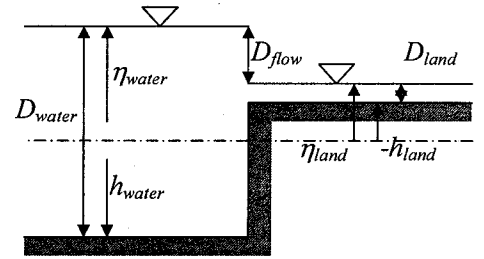


図-3.5 越流フラックスの定義

子の境界において、計算格子座標の正方向の越流フラックスは、越流水深 D_{flow} を用いて式(31)のように算定される。なお、越流係数は広頂ぜきに対する値などを参考に $C_0=0.6$ とされた。一方、負方向の越流フラックスは、式(31)の右辺に-1 を乗じて算定される。また、越流水深は直前の水域格子の全水深を越えないものとし、逆に、越流水深が最小浸水深 ε_{dry} 以下となるときは遡上・流下が生じず、通常、 $P_{flow}=0$ として扱われる。

$$\text{越流フラックス（正方向）：} \quad \text{if } D \leq \varepsilon_{dry}; \quad P_{flow} = \begin{cases} C_0 \frac{2}{3} \sqrt{2g} (D_{flow})^{3/2} & (D_{flow} > \varepsilon_{dry}) \\ 0 & (D_{flow} \leq \varepsilon_{dry}) \end{cases} \quad (31)$$

この遡上モデルの基本的な性能は、1/25 勾配の一樣斜面上で計算された非砕波の波の水平遡上距離を、非線形長波理論に基づく Carrier・Greenspan(1958)による理論値と比較することにより検証されている。図-3.6 は、入射波高 0.006m、周期 10s の規則波を対象として、分散項を除いた非線形長波モデルによる遡上計算結果を示したものである（計算格子幅 $\Delta x=0.05\text{m}$ 、差分時間 $\Delta t=0.05\text{s}$ ）。この遡上モデルでは差分格子毎に水域と陸域の判定がなされるため、計算された水平遡上距離の変化は階段状になるものの、最大遡上距離に対する誤差はたかだか 1 計算格子程度である。しかし、計算では遡上波の到達時刻に若干の遅れがみられるので、本モデルを津波の遡上計算などへ適用する場合には注意を要する。

さらに、このような遡上モデルでは、引き波時にリーフエッジが露出する場合でも発散することなく安定

に計算を進めることができる。すなわち、露出部分は陸域格子とみなされ、水陸格子間の水位差から算定される越流フラックスによって次にリーフ上水塊の沖への流下や沖からリーフ上への波の遡上が生じるまで、運動方程式は計算されない。不連続水面の境界で生じる流れも簡便な手法を用いて近似的に取り扱えることもこの遡上モデルの大きな特長である。式(31)では x 方向の越流フラックスを示したが、ADI 差分法を用いた NOWT-PARI では、別途、 y 方向も同様に算定されるので、平面 2 次元波浪場への適用も容易である。

一方、Madsen et al. (1997) は、ブシネスク方程式を用いて斜面上の波の遡上を安定に計算するために、次のような手法を提案した。すなわち、基準面より上方の斜面を非常に密な透水層とみなし、斜面より上の空隙率を 1、斜面より下の空隙率を非常に小さく設定することにより、汀線付近の計算格子でも有意な水深を確保できるよう工夫した。これに改良を加えた Kennedy et al. (2000) の研究では、有意な水深を確保するために斜面下に設ける仮想水深部分を "Porous" ではなく "Slot" と表記したうえで、斜面の高さ（言い換えると Slot 開口部の高さ）を固定せず、設定した Slot 幅や Slot 開口部の曲率に応じて最大遡上高を再現するための最適な高さを算定するように工夫されている。なお、赤川ら (2005) は、ブシネスクモデルによる航走波の波浪変形計算に対してこのモデルを適用し、波の遡上変形が概ね再現できることを確認している。さらに、透水層内の空隙率を式(29)で与える上述の透水層モデルも、やはり消波工内の空隙率を極端に小さく設定することにより、消波工法面を斜面とみなした波の遡上計算にも適用できることが確認されている（平山，2006）。

(5) 越波量算定の試み

計算機性能の向上や数値流体力学の発展に伴い、VOF 法や MARS 法、あるいは粒子法などの波動運動に関する直接解法を用いて、護岸上の水塊運動や越波量を直接的かつ高精度に計算することが可能になった。しかし、計算負荷が大きいため、不規則波による越波量の計算や平面波浪場への適用には依然として多大な労力を要する。一方、波動方程式により算定される護岸直前の水面波形を越流公式に代入して越波量を求める方法が開発され、その適用性が検討されている（例えば、森屋・水口，1996，佐貫ら，2001）。

さらに平山ら (2006) は、上述の越流フラックスを用いた遡上モデルに改良を加え、越流係数を護岸の相対天端高の関数とすることにより、護岸前面の斜面上で碎波が生じる場合にも適用可能な越波モデルを提案した。すなわち、合田 (1975) による碎波帯内の波高の略算式を用いた相対天端高 $h_c/(K_{sb}H_0')$ ($K_{sb}H_0'$ は碎波波高) に対して模型実験で得られた越流係数を整理し、図-3.7 を得た。ここで、相対天端高が約 2.5 以上の場合には越波飛沫が極めて顕著であり、もはや越流公式の適用が困難な状況にあるため、越流係数は仮に一定と仮定して、越流係数の推定式を次のように与えた。

$$C_0 = \begin{cases} 0.045 & : h_c/(K_{sb}H_0') > 2.5 \\ 0.47 - 0.17 h_c/(K_{sb}H_0') & : h_c/(K_{sb}H_0') \leq 2.5 \end{cases} \quad (32)$$

越流公式を用いて護岸越波量を推定する場合、計算精度に対し越流係数 C_0 とともに大きな影響を与えるものは、護岸前面水位 η である。ところが、弱非線形性のブシネスク方程式を離散化した本モデルでは、護岸前面の水深が浅い、あるいは周期が短いケースほど波の非線形化に対する誤差や差分誤差が顕著に現れるようになるが、これらの発生を十分に抑制することはそれほど容易ではない。そこで彼らは、越流公式を適用するときだけ仮想的に天端高を下げることににより、直立護

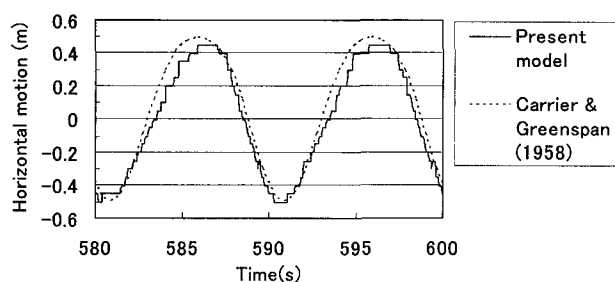


図-3.6 水平遡上距離の変化

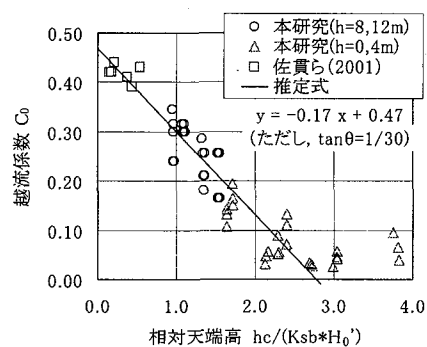


図-3.7 相対天端高と越流係数

岸上の越波計算を試みた。越波実験および再現計算で得られた護岸直前の水位変動と累積越波量の時系列変化を図-3.8に示す。両ケースの無次元越波流量はともに 1.0×10^{-3} 程度であるが、護岸前面水深、天端高、波形勾配（周期）はすべて異なる。ブシネスク計算で出力された護岸直前の水位変動は、実験結果と概ねよく一致しているものの、とくに実験値が天端高を越える時刻での水位は全体的に過小に算定されている。しかし先の工夫により、図-3.8(a)では、集水ますで直接計測した越波量 q_{box} 、計測水位に越流公式を適用して算出された q_{flow} 、ブシネスク計算で得られた越波量 q_{bsq} はともによく一致した。一方、図-3.8(b)のうち q_{flow} では、護岸前面の飛沫高さを水位として計測したために、短時間越波量の見積りを誤り、累積越波量の時系列変化に他との違いが生じている。これに比べ越波飛沫の発生を考慮しない q_{bsq} の変化傾向は q_{box} とよく一致している。

4. ブシネスクモデルの活用

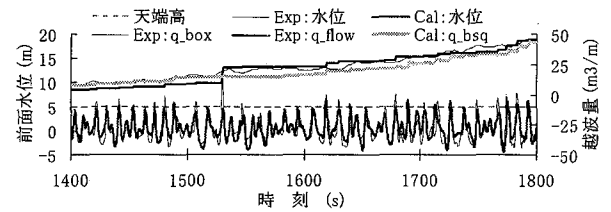
これまで紹介した NOWT-PARI などのブシネスクモデルは、港湾設計や災害調査における波浪外力の算定などにすでに広く活用されている。このような時間発展型の数値モデルでは、計算機の中に任意スケールの数値水槽を設定して実海域あるいは実験室内の造波水槽で生じる波浪変形をシミュレートすることにより、検証された適用範囲内で、現地観測や模型実験と同様、またはそれ以上の波浪データを得ることができる。以下では、NOWT-PARI が適用されたこれらの具体例を挙げ、港湾設計や災害調査等の実務におけるブシネスクモデル活用の現状と課題について述べる。

4. 1 港湾設計実務への活用

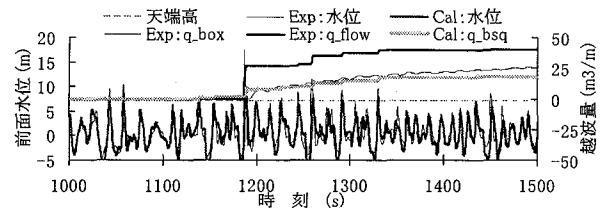
(1) 設計波の算定（波浪変形計算）

従来の港湾設計の実務等における設計波の算定は、港外では波の屈折・浅水変形を計算できるエネルギー平衡方程式法を、港内では波の回折・反射が計算できる高山法をそれぞれ適用して実施していた。しかし、波の屈折と回折が同時に生じる計算対象、例えば、海底地形が複雑な港湾や、離岸堤やヘッドランドで防護された海浜周辺などでは、いずれの計算法によっても現実の波浪変形を精度よく算定することは難しい。またエネルギー平衡方程式法では、波を位相平均したエネルギーとして捉えているために、防波堤や護岸前面の重複波や港内の副振動、あるいは波群に由来する長周期波の発生などが算定されないなど、多様化する実務に対する適用限界が指摘されるようになっていく。

一方、NOWT-PARI など、実海域への適用を想定して様々な境界処理法を具備したブシネスクモデルは、港内外の波浪変形を同時にかつ高精度に算定して、波高分布や任意地点の水位・流速変動などを算

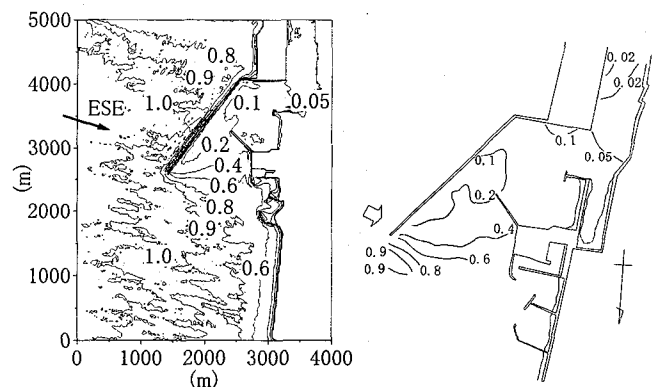


(a) $h=8\text{m}$, $h_c=5\text{m}$, $H_0'=5\text{m}$, $T=8.9\text{s}$



(b) $h=12\text{m}$, $h_c=7\text{m}$, $H_0'=5\text{m}$, $T=12\text{s}$

図-3.8 護岸前面波形と累積越波量変化



(a) 数値計算（風波） (b) 模型実験（風波）

図-4.1 実港湾を対象とした波浪変形計算（波高比）

定することができる。この適用例として、前述の透水層モデルを用い消波ブロック被覆工が設置された防波堤・護岸による波の反射特性を客観的に評価（予め反射率を設定せず入射波や消波工の諸元に応じて適切な反射波を算定する）して、風波に対する港内外の波高比分布を算定した結果を実験結果とともに図-4.1に示す（平山・上原，2002）。計算結果は、実験結果を非常によく再現している。また長周期波に対しては、消波構造物や海浜による反射率がより大きく算定されるために、風波に比べ、港内波高比が増大する計算結果が得られた。なお、このように波の非線形変形や砕波が考慮された任意地点の波高の計算結果から沖での設計波高を算定する方法については、例えば平山（2007）を参照されたい。

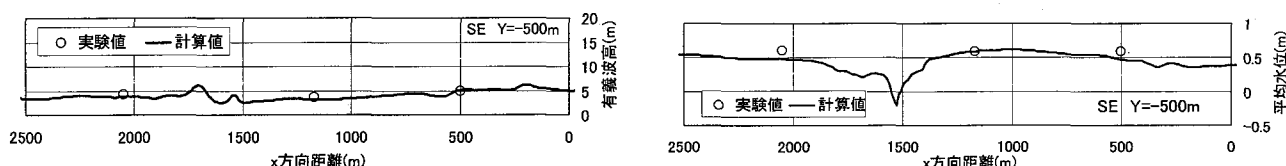
(2) 港内静穏度の算定

港湾設計の実務において防波堤延伸や消波工設置の効果を定量評価し、安全で使い易い港湾を計画するための指標として、港内静穏度および荷役稼働率が定義されている。これらの算定法については「港湾の施設の技術上の基準・同解説」（社団法人日本港湾協会，1999）にも示されており、さらに平成16年8月に刊行された「港内長周期波影響評価マニュアル」（財団法人沿岸技術研究センター，2004）でも詳しく述べられている。とくに後者では、対象岸壁を利用する対象船型および岸壁入射波の周期や波向に応じて、荷役限界波高を変化させるという荷役稼働率の「標準解析法」を提案している。

これらの基本となる港内波高（比）分布の算定には、多くの計算ケースを短時間で処理できる高山法を用いることがこれまで一般的であった。しかし近年では、港内の複雑な海底地形に対応するために、風波や長周期波による港内波高の算定にNOWT-PARIなどのブシネスクモデルを用いた例もみられるようになっている。ところが、港内静穏度の算定にブシネスクモデルを適用する真のメリットを引き出すためには、単に高山法に代えてブシネスクモデルを適用するだけでは不十分である。すなわち、対象岸壁における港内波浪出現頻度分布の算定法は高山法の計算特性をベースに構築されているため、ブシネスクモデルで算定される入射波の波高や波形勾配による港内波高比の変化を、港内静穏度および荷役稼働率の算定結果に反映させるプロセスが導入されていない。そこで平山（2007）は、ブシネスクモデルをベースとし、とくに海底地形が複雑な港湾への適用を想定した「高精度港内静穏度解析法」を提案している。

(3) 海浜・リーフ周辺の波・流れ場の算定

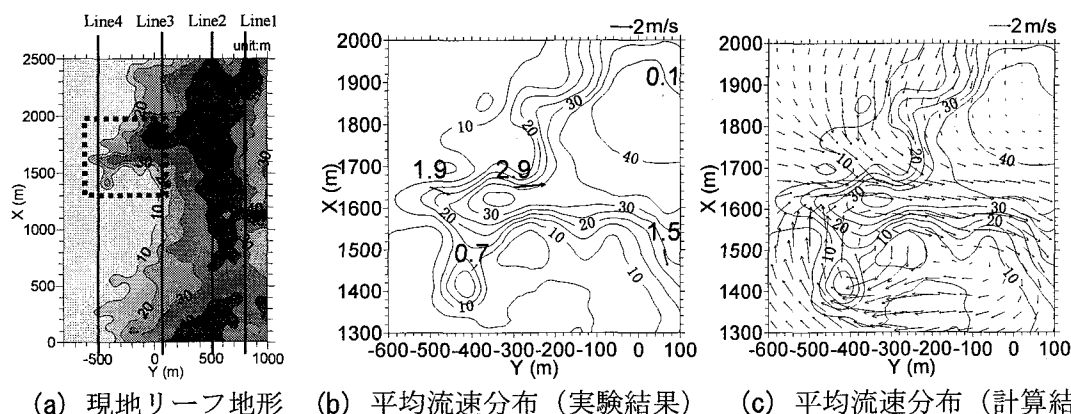
申ら（1999）は、海浜地形の沖合に設置された不透過の離岸堤背後に形成される流れ場の再現計算を行い、



(a) 波高分布の比較

(b) 平均水位の比較

図-4.2 現地リーフ上の波浪変形実験に対する再現計算結果（Line4）



(a) 現地リーフ地形

(b) 平均流速分布（実験結果）

(c) 平均流速分布（計算結果）

図-4.3 現地リーフ上の波浪変形実験に対する再現計算結果（平均流速ベクトル）

波の遡上を考慮しないブシネスクモデルを用いた場合には、水平流速ベクトルを時間平均して得られる平均流よりも、平面波高分布の計算結果から算定したラディエーション応力を用いて別途推定される流れのほうが、模型実験で計測された流れの分布特性をよく説明できることを示した。一方、平山ら（2006）は、浅海域での波の碎波と遡上変形を計算できる最新の NOWT-PARI を用いて、碎波による波高減衰と平均水位上昇、および波の遡上変形を汀線付近までより正確に算定することにより、ブシネスク計算で直接算定される平均流速分布が、申ら（1999）の模型実験結果を比較的よく再現できることを示した。

さらに彼らは、複雑な現地リーフ地形上の波浪変形を対象とした模型実験に対する再現計算を行い、リーフ内で生じる波高減衰と平均水位上昇、およびそれらの分布により発生するリーフ内やリーフ切れ目付近の流れ場をいずれも良好に再現できることを示した。沿岸方向測線上の波高分布と平均水位分布を図-4.2 に、現地リーフ地形の等深線図とリーフ切れ目付近の流れ場を図-4.3 に示す。なお、リーフ切れ目付近で計測された平均流速値（5地点）に対するこれらの再現率は、沖から 93%, 88%, 73%, 149%, 98%であった。

4. 2 波浪災害調査への活用

ここでは、2004年に各地で発生した高波災害のうち、海岸堤防の上部パラペットを崩壊させた海浜への波の打ち上げ、および複雑なケーソン転倒の原因になったと考えられる沖防波堤周辺の水面波形に着目し、最新の NOWT-PARI を活用して被災時における平面波浪場の推定を試みた事例を紹介する（平山ら、2005）。

(1) 防波堤・護岸への作用波の算定

台風23号により被災した海岸堤防前面は1/5勾配の砂浜と岩礁からなる複雑な海底地形を有している。被災当時の入射波条件は10月20日14:00にNOWPHASで観測された、有義波高 $H_{1/3}=13.55\text{m}$ 、有義波周期 $T_{1/3}=15.8\text{s}$ 、波向SSWの多方向波とし、方向集中度は $S_{max}=75$ と仮定した。また、このときの潮位は室戸岬において20日14:39に気象庁が観測したT.P.+2.863mを採用した。菜生海岸とその周辺への波浪伝播状況を示した図-4.4をみると、水深が浅くなるにつれて、沖から伝播した多方向波が屈折変形して波の峰が揃った一方向波となるようすや、菜生海岸堤防の中央付近および隣接する室戸岬漁港の護岸で越波するようすが確認できる。実際、現地でもこれらの箇所では越波による被災がみられ、それぞれ上部パラペットの崩壊や護岸内緑地の損壊が生じていた。さらに、菜生海岸への来襲波の状況に着目した図-4.5では、海岸で碎波して段波状になった波が海岸堤防へ直接到達し、順に斜めに反射するようすが確認できる。

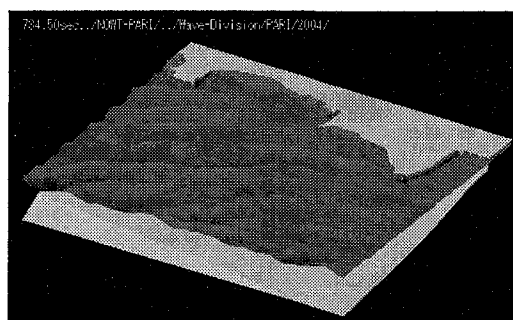


図-4.4 菜生海岸と周辺への波浪伝播状況

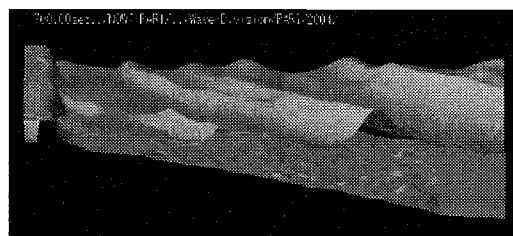


図-4.5 菜生海岸への波浪来襲状況

(2) 防波堤の転倒メカニズムの推定

台風18号により被災した函館港島防波堤は、開口部から港内へ侵入する南西よりの波を遮蔽するために、第一航路に沿って設置されている。島防波堤が転倒被災した時刻やそのときの沖波諸元を正確に知ることはできないが、別途実施された波浪推算結果より、被災時刻は波高と周期、潮位がともに最大となる9月8日9:00頃であり、そのときの波浪諸元は表-4.1のようであったと推測された。そこで、波浪変形計算ではこれらを沖波条件として設定した。

最新の NOWT-PARI で計算された被災波来襲時の島防波堤周辺の有義波高分布を図-4.6に示す。合わせて出力した水面波形のアニメーションをみると、島防波堤の前面では、沖波とそ

表-4.1 島防波堤被災時の沖波条件

2004/09/08 09:00 函館港沖		
沖波諸元	有義波高: $H_{1/3}$ [m]	6.68
	有義波周期: $T_{1/3}$ [s]	10.88
	主波向き: Dir	SW (北から221.7度)
	方向集中度: S_{max}	75
	成分波数: N	512
	入射水深: h_I [m]	49.89
潮位 T.P. [m]		0.49

の反射波により形成される重複波に西防波堤からの反射波が重畳し、これらの位相が揃ったときには瞬間的に水面が大きく上昇または下降する様子が確認できた。また、島防波堤の背後では、両端部からの回折波に越波伝達波と西防波堤からの反射波が重畳する様子が観察されたが、とくに西防波堤からの反射波による水位変動が目立った。この波はちょうど島防波堤の背後壁面にほぼ沿う方向に伝播するため、西防波堤から離れるほど、島防波堤背後で沿い波（ステム波）が発達していた。

つぎに、全長の9割以上に当たる約370mが被災した島防波堤の状況を図-4.7に示す。図-4.7(a)に示したケーソン転倒状況のうち、2, 19番のケーソンは被災後も転倒せずに残り、2番のケーソンは根固めブロックの飛散状況から港内側へ倒れる寸前であったことが確認されている。ところが、両側のケーソンは完全に転倒しているにもかかわらず、その間にある19番のケーソンだけは根固めブロックを含めほとんど被災していない。また、被災したブロックのほとんどは港内側へ転倒しているのに、14,15,16番のケーソンは港外側へ転倒している。図-4.7(b)で示したマルチビームによる海底探査結果はこれらの被災状況を立体的によく捉えている。平山ら（2005）は、被災当時の島防波堤周辺における水面波形の時系列変化を再現して、これらの被災原因および被災過程を推定した。このほか、久保ら（2005）は、実際に観測された水面の時系列データから得られる情報をもとに、波群特性を考慮した沖波波形を造波境界に直接与え、入出港時の操船に影響を与える港口部での波の連なりを数値計算により再現することを試みている。

4. 3 その他の活用事例

(1) 河口部周辺の波浪場の算定

河口に隣接した港湾では、導流堤に沿って港口部に達した河川流が波と干渉して局所的な波高増大が生じ、航行船舶の障害となることがある。このような波と流れの相互干渉を計算する試みとしては、例えば、Yoon and Liu（1989）、Chen et. al.（1998）、Mohammadら（2000）、沖ら（2003）の研究などが知られている。一方、間瀬ら（2004）は、ブシネスクモデルなどの位相解析モデルを適用したこれらの試みにおける問題点について理論的に考察した。そして、これらの問題点を回避するために、位相平均モデルに基づく流れの影響を考慮した波浪変形予測モデル（WABED）を構築して、離岸流を模したモデル場に入射する不規則波の有義波高が流れの強度に応じて増大する様子を再現した。また、平山ら（2004）は、流れを考慮した分散関係式に関する理論的考察を行い、Madsen型の弱非線形ブシネスク方程式を基礎とする位相解析モデルを用いて波と流れの相互干渉を計算した場合には、とくに流れを遡る波のせきあげ効果はごく浅い海域でのみ算定可能であり、 k_0h_0 値（ k_0 , h_0 はそれぞれ流れを考慮しない場合の波数、静水深）が少なくとも1.5より大きい場合には、波高増大の算定精度が急激に劣化する恐れがあることを示した。

そこで平山・峯村（2005）は、流れが波に与える影響のみに着目して、流れによる波高増大の概略値を得る方法を提案した。まず、通常のブシネスクモデルを用いて波浪変形計算を行い、（位相平均された）有義波高、平均周期および波速ベクトルの平面分布を抽出する。つぎに、流れを考慮した分散関係式と Wave Action

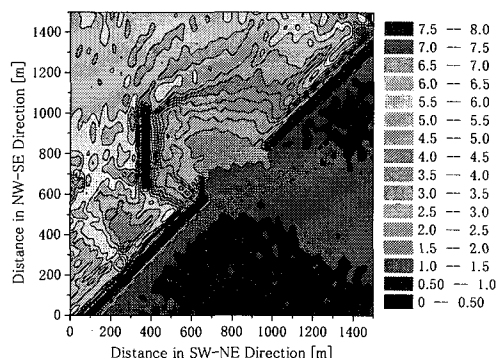
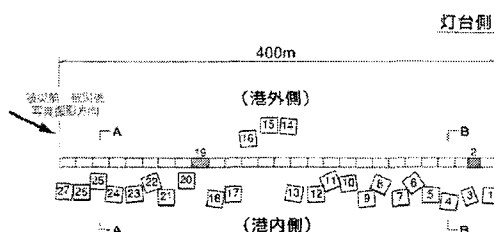
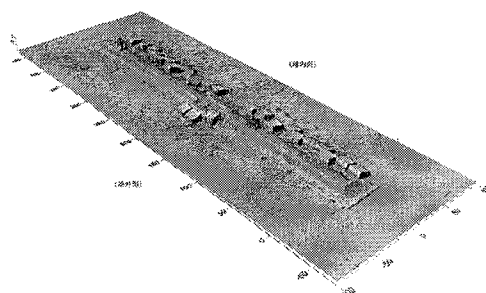


図-4.6 函館港島防波堤周辺の波高分布



(a) ケーソン転倒状況



(b) マルチビームによる海底探査結果

図-4.7 島防波堤被災状況

（国土交通省北海道開発局 HP より転載）

(波作用量) 保存式から得られる関係式に、波浪変形計算で算定された波速の分布、および別途実施した流れ計算で得られた流速分布等を代入して、各地点における波高増大率を算定する。最後に、流れを考慮せずに算定された各地点の有義波高に波高増大率を乗じることにより、流れによる波高変化を考慮した有義波高分布を簡易に算定する。このうち酒田港に隣接する最上川河口周辺を対象に推定された、河川流による波高増幅率の分布を図-4.8に示す(最上川流量; $1,158\text{m}^3/\text{s}$) (梅沢ら, 2005)。

(2) 遡上津波のソリトン分裂と波圧の算定

数値計算においてソリトン分裂波を取り扱うためには、波の分散性を考慮できる基礎方程式を用いる必要がある。また、珊瑚礁や海岸地形などの極浅海域を伝播・遡上する津波の変形計算には、波の非線形性を考慮することが一般的である。したがって、このような津波の伝播・変形計算には、この両者に対応できるブシネスク方程式を基礎式とし、砕波・遡上モデルを備えた最新の NOWT-PARI を適用することができる。平山ら (2007) は、安田ら (2006) が行った断面模型実験に対する再現計算を実施し、ソリトン分裂と砕波を伴う断面1次元リーフ地形上の津波変形の再現性を検証した。さらに、ブシネスク近似された圧力方程式が遡上波にも適用できることを仮定して、陸上構造物へ作用する波圧の変動波形を算定し、その再現性を検証した。これらのうち、 $a=3\text{cm}$ 、 $T=30\text{s}$ の津波がリーフ上水深 $h=10\text{cm}$ を伝播したときの津波波形を図-4.9、堤体へ作用する波圧の時間変動を図-4.10に示す。これらの図より、WG5の手前でソリトン分裂が発生し始め、海浜上のWG9と堤体直前のWG10の間で砕波することが計算波形でよく再現できていることがわかる。また、堤体には静水圧に加えて衝撃波圧が作用することが、その波圧レベルとともに計算でも非常によく再現できている。ただし、これらの再現計算に用いた差分格子間隔は、津波の基本波長に比べ、非常に細かく設定されていることに注意されたい。

5. おわりに

ブシネスク方程式に限らず波動方程式を用いた波浪変形計算法の開発と実用化に向けた取組においては、着目する水理学的な事象をいかに効率的かつ高精度に解くかを目標として、基礎方程式の厳密性や差分計算法、境界処理法の妥当性、計算実行の容易さなどの観点から、計算モデルの改良と検証が現在も続けられている。NS 方程式の直接解法も含め、実海域で生じるすべての水理現象を完全に再現する計算モデルは未だ開発されていないので、計算モデルを研究・開発したり、実務計算等へ応用したりする場合などは、計算モデルおよび結果の信頼性と計算に要するコストについて十分に熟知・考慮しつつ、課題に応じて計算モデルを適切に選択しなければならない。その際、本講の内容が少しでもお役に立てば幸いである。

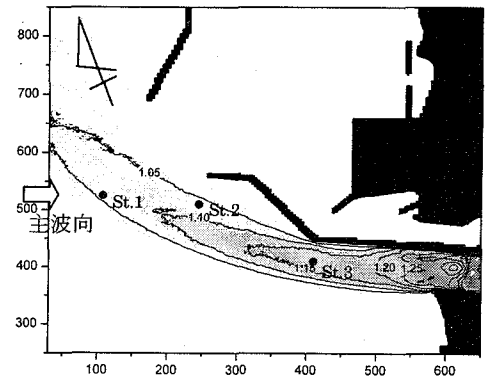


図-4.8 河川流による波高増大率分布

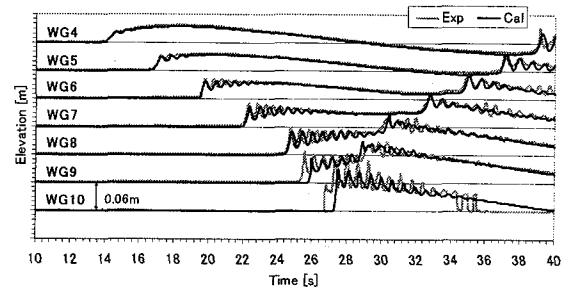
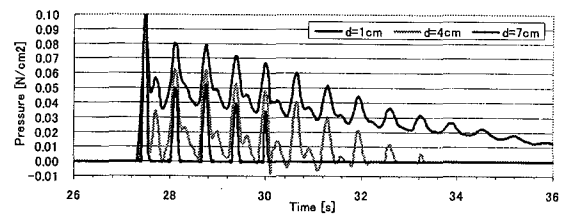
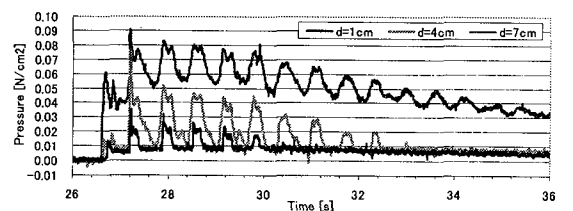


図-4.9 津波伝播波形の再現計算
($h=10\text{cm}$, $a=3\text{cm}$, $T=30\text{s}$)



(a) 計算結果



(b) 実験結果

図-4.10 陸上構造物へ作用する波圧変動
($h=10\text{cm}$, $a=3\text{cm}$, $T=30\text{s}$)

参考文献

- Abbott, M. B., H. M. Petersen and O. Skovgaard (1978) : On the numerical modelling of short waves in shallow water, *Journal of Hydraulic Research*, 16, No.3, pp.173-204.
- Beji, S. and K. Nadaoka (1996) : A formal derivation and numerical modeling of the improved Boussinesq equations for varying depth, *Ocean Eng.*, Vol.23, No.8, pp.671-704.
- Boussinesq, J. (1871) : Theory de l'intumescence liquide appelee onde solitaire ou de translation se propageant dans un canal rectangulaire, *Instut de France, Academie de Science, Comptes Rendus*, Vol.72, p.755-
- Carrier, G.F. and H.P., Greenspan (1958): Water waves of finite amplitude on a sloping beach, *J. Fluid Mech.*4, pp.97-109.
- Chen, Q., Madsen, P. A., Schäffer, H. A. and Basco, D. R.: Wave-current interaction based on enhanced Boussinesq approach, *Coastal Eng.*, Vol.33, pp.11-39, 1998.
- Chen, Q., J.T. Kirby and R.A. Dalrymple, A.B. Kennedy, A. Chawla (2000): Boussinesq Modeling of Wave Transformation, Breaking, and Runup. II: 2D, *J. Wtrwy., Port, Coast., and Oc. Engrg.*, Vol.126, No.1, ASCE, pp.48-56.
- Kennedy, A.B., Q. Chen, J.T. Kirby and R.A. Dalrymple (2000): Boussinesq Modeling of Wave Transformation, Breaking, and Runup. I: 1D, *J. Wtrwy., Port, Coast., and Oc. Engrg.*, Vol.126, ASCE, pp.48-56.
- Korteweg, D. J. and de Vries, G. (1985) : On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves, *Phil. Mag. Series 5*, Vol.39, pp.422-443.
- Larsen, J. and H. Dancy (1983) : Open boundaries in short wave simulations - A new approach, *Coastal Eng.*, 7, pp.285-297.
- Madsen, Per A., Russel Murray and Ole R. Sørensen (1991) : A new form of the Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics, *Coastal Eng.*, 15, pp.371-388.
- Madsen, Per A. and Ole R. Sørensen (1992) : A new form of the Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics. Part2. A slowly-varying bathymetry, *Coastal Eng.*, 18, pp.183-204.
- Madsen, P.A., O.R. Sørensen and H.A. Schäffer : Surf zone dynamics simulated by a Boussinesq type model. Part II. Surf beat and swash oscillations for wave groups and irregular waves, *Coastal Eng.*, 32, pp.289-319, 1997.
- Mei, Chiang, C. (1989) : The applied dynamics of ocean surface waves, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., pp.505-604.
- Nwogu, Okey (1993) : Nonlinear transformation of multi- directional waves in water of variable depth, *J. Fluid Mech*, pp.1-31.
- Peregrine, D. H. (1967) : Long waves on a beach, *J. Fluid Mech*, Vol.27, part4, pp.815-827.
- Russel, J. S. (1844) : Report on Waves, *Report on the XIV meetings of the British Association of the Advancement of Science*, York.
- Schäffer, H.A., P.A. Madsen and R. Deigaard (1993): A Boussinesq model for waves breaking in shallow water, *Coast., Engng.*, 20, pp.185-202.
- Watanabe, A., T. Hara and K. Horikawa (1984) : Study on breaking condition for compound wave trains, *Coastal Eng. in Japan*, Vol.27, pp.71-82.
- Wei, G., J. T. Kirby, S. T. Grilli and R. Subramanya (1995) : A fully nonlinear Boussinesq model for surface wave. Part 1. Highly nonlinear unsteady waves, *J. Fluid Mech.*, Vol.294, pp.71-92.
- Yoon, S. B. and Liu, P. L.-F.: Interactions of currents and weakly nonlinear water waves in shallow water, *J. Fluid Mech.*, Vol.205, pp.397-419, 1989.
- 赤川嘉幸・Dam Khanh Toan・Nguyen Ba Thuy・Vu Hai Dang・谷本勝利：航走波の碎波を考慮した数値計算と

- 最大波高算定法, 海岸工学論文集, 第 52 巻, pp. 036-040, 2005.
- 有川太郎・磯部雅彦 (1997): 非線形緩勾配方程式を用いた砕波判定法の適用性, 海岸工学論文集, 第 44 巻, pp. 91-95.
- 石井敏雅・磯部雅彦・渡辺晃 (1993): 非定常緩勾配不規則波動方程式における境界条件の改良と実用化の試み, 海岸工学論文集, 第 40 巻, pp. 31-35.
- 磯部雅彦 (1994): 非線形緩勾配波動方程式の提案, 海岸工学論文集, 第 41 巻, pp. 1-5.
- 梅沢信敏・永井紀彦・平山克也・北村道夫・鈴木智浩・山田貴裕 (2005): 河川流による酒田港港口部の波浪場への影響について, 海洋開発論文集, 第21巻, pp. 319-324.
- Eric Cruz・横木裕宗・磯部雅彦・渡辺 晃 (1993): 非線形波動方程式に対する無反射境界条件について, 海岸工学論文集, 第 40 巻, pp. 46-50.
- 大山 巧・灘岡和夫 (1991): 非線形不規則波動場を対象とした数値波動水槽の開発, 土木学会論文集, No429, pp. 77-86.
- 大山巧・長谷部雅伸 (2001): 砕波による渦度供給を考慮した砕波帯内の波・流れ場のモデル化, 海岸工学論文集, 第 48 巻, pp. 121-125.
- 沖 和哉・酒井哲郎・芦谷淳志: 波と流れの相互干渉を考慮した Boussinesq 方程式による数値解析, 海洋開発論文集, 第 19 巻, 2003.
- 金山 進 (1997): 強分散性非線形平面波浪場に対する多層モデルの提案, 海岸工学論文集, 第 44 巻, pp. 41-45.
- 金山 進・田中 仁・首藤伸夫 (2000): 非線形分散多層波動モデルの改良と準 3 次元波動場への適用, 土木学会論文集, No. 642/II-50, pp. 77-86.
- 喜岡渉・柏原謙爾 (1995): 高次 Boussinesq 方程式とそのステップ地形への適用性, 海岸工学論文集, 第 42 巻, pp. 166-170.
- 喜岡渉・柏原謙爾・相川久紀・田中正博 (1996): 多方向不規則波による港内副振動の予測モデルとその適用性, 海岸工学論文集, 第 43 巻, pp. 196-200.
- 喜岡 渉 (1999): 平面構造物と波浪場, 1999 年度 (第 35 回) 水工学に関する夏期研修会講義集, B コース, B-7, 20p.
- 木田重雄 (1994): いまさら流体力学?, 丸善, 197p.
- 久保雅義・趙翼順・平山克也 (2005): 港口部における時系列波浪情報の予測に関する基礎的研究, 日本航海学会論文集, 第 112 号, pp.163-170.
- 合田良実 (1975): 浅海域における波浪の砕波変形, 港研報告, 第 14 巻, 第 3 号, pp. 59-106.
- 合田良実 (1999): 「波動問題」の歴史的変遷, 1999 年度 (第 35 回) 水工学に関する夏期研修会講義集, B コース, B-3, 14p.
- 佐藤慎司・M. Kabiling (1993): Boussinesq 方程式を用いた三次元海浜変形の数値計算, 海岸工学論文集, 第 40 巻, pp. 386-390.
- 佐貫宏・藤田龍・関本恒浩・清水琢三 (2001): 数値モデルによる越波量の評価に関する研究, 海岸工学論文集, 第 48 巻, pp. 736-740.
- 財団法人沿岸技術研究センター (2004): 港内長周期波影響評価マニュアル, 港内長周期波影響評価マニュアル検討委員会.
- 社団法人日本港湾協会 (1999): 港湾の施設の技術上の基準・同解説, 運輸省港湾局監修.
- 申 承鎬・高畑栄治・入江 功・吉田明徳: Boussinesq モデルを用いた沖合の構造物による波浪・海浜流の数値計算の適用性, 海工論文集, 第 46 巻, pp. 206-210, 1999.
- 中嶋光浩・由比政年・石田 啓 (2002): 高次ブシネスク方程式の一般形の導出と最適係数を用いた高精度数値モデルの開発, 海岸工学論文集, 第 49 巻, pp. 6-10.

- 灘岡和夫・中川康之 (1993) : 新しい非線形・分散性波動方程式による非線形波動解析の試み, 海岸工学論文集, 第 40 巻, pp. 6-10.
- 灘岡和夫・大野修史・栗原 礼 (1996) : 波動場の力学状態に基づく砕波過程の解析と砕波条件, 海岸工学論文集, 第 43 巻, pp. 81-85.
- 西井康浩・山崎耕嗣・吉田明德・山城賢・青木聡・吉田秀樹 (2005) : 任意反射境界処理法を用いたブシネスクモデルの反射波卓越海域への適用, 海洋開発論文集, Vol. 21, pp. 265-270.
- 平山克也 (2001) : ブシネスクモデルにおける透水層内の波浪減衰を考慮した任意反射境界処理法の開発, 海岸工学論文集, 第 48 巻, pp. 26-30.
- 平山克也・平石哲也 (2001) : ブシネスクモデルにおける透水層を用いた任意反射境界処理法の開発, 港湾技術研究所報告, 第 40 巻, 第 1 号, pp. 3-30.
- 平山克也・上原 功 (2002) : 消波構造物に作用する波浪の消波機構を考慮した港内波浪変形計算, 海岸工学論文集, 第 49 巻, pp. 671-675.
- 平山克也・平石哲也 (2002) : ブシネスクモデルにおける目標反射率の設定法とその港内波高分布計算に対する適用性, 海岸工学論文集, 第 49 巻, pp. 676-680.
- 平山克也 (2006) : 透水層を用いた任意反射境界処理法の高精度化と遡上計算への適用, 海洋開発論文集, 第 22 巻, pp. 241-246.
- 平山克也・原 信彦 (2003) : 時間発展型擬似段波モデルに基づく砕波モデルの開発, 港湾空港技術研究所報告, 第 42 巻, 第 1 号, pp. 27-45.
- 平山克也・平石哲也 (2004) : ブシネスクモデルによる砕波・遡上計算法とその適用性, 海講論文集, 第 51 巻, pp. 11-15.
- 平山克也・峯村浩治・平石哲也 (2004) : 流れによる波の変形計算に関する一考察, 第10回河口研究会.
- 平山克也・平石哲也 (2005) : 平面 2 次元ブシネスクモデルによる砕波・遡上計算法の開発と現地適用, 海岸工学論文集, 第 52 巻, pp. 11-15.
- 平山克也・南 靖彦・奥野光洋・峯村浩治・河合弘泰・平石哲也 (2005) : 2004 年に来襲した台風による波浪災害事例, 港空研資料, No. 1101, 42p.
- 平山克也・峯村浩治 (2005) : 河口部における波高増幅率の簡易算定手法, 海洋開発論文集, 第 21 巻, pp. 313-318.
- 平山克也・長谷川準三・長谷川巖 (2006) : 越流を考慮したブシネスクモデルによる不規則波の越波量に関する数値計算, 海岸工学論文集, 第 53 巻, pp. 706-710.
- 平山克也・長谷川準三・南 靖彦 (2006) : リーフ上とその周辺の波による流れ場の形成に関する数値計算とその検証, 海洋開発論文集, 第 22 巻, pp. 247-252.
- 平山克也 (2007) : ブシネスクモデル (NOWT-PARI) を用いた高精度港内静穏度解析法の提案, 港空研資料 (印刷中), 90p.
- 平山克也・高山知司・安田誠宏・平石哲也 (2007) : ソリトン分裂と砕波を伴う津波の変形と作用波圧に関する数値計算, 海洋開発論文集, 第 23 巻, pp. 171-176.
- 間瀬肇・由比政年・雨森洋司・高山知司 (2004) : 波・流れ共存場における砕波および回折効果を考慮した位相平均波浪変形予測モデルの構築, 海岸工学論文集, 第51巻, pp. 6-10.
- Mohammad Mohiuddin・富樫宏由・平山康志 : 波変形に対する流れの影響のモデル化, 海岸工学論文集, 第 47 巻, pp.16-20, 2000.
- 森屋陽一・水口優 (1996) : 回折散乱波を考慮した越波問題, 海岸工学論文集, 第 43 巻, pp. 711-715.
- 安田誠宏・高山知司・山本博紀 : 津波の変形および波力特性に及ぼす海岸断面地形の効果に関する実験的研究, 海洋開発論文集, 第 22 巻, pp. 529-534, 2006.