

水工学シリーズ04-A-7

河川の土砂輸送と地形形成

東北大学大学院工学研究科 助教授

泉 典 洋

土木学会
水工学委員会・海岸工学委員会
2004年7月

河川の土砂輸送と地形形成

Sediment Transport and Geomorphological Processes in Rivers

泉 典洋

Norihiro IZUMI

1 河川環境と河川地形

河川の土砂輸送とそれによって形成される様々な地形は、長年にわたって河川工学における最も重要な研究テーマの一つであった。河川環境の重要性が叫ばれる昨今、河川工学上の中心的な関心事も治水や利水から環境へと変化し、土砂輸送や河川地形に関する研究の重要性はほとんど失われてしまったと思われるかもしれない。しかし生物が主体の自然環境について考えるとき、環境を決定する最も重要な要素の一つが各種河川地形であることを忘れてはならない。瀬や淵、よどみやワンドなど河道内に形成される微地形は魚類や昆虫など小型の生物のハビタットとして重要な役割を演じている [1]。また上流から下流に至る各地点ではそれぞれ特徴をもった河川地形が見られ、それに対応した生物が生息している。川幅程度のスケールから流域規模のスケールにいたる様々な階層で見られる地形とそれに付随した流速や水深の空間的非一様性が様々な生物を育む多様な生息環境を創出していると言っても過言ではないだろう。河川環境を考えるにあたっては、このような河川地形の空間的非一様性がいかにして形成されるのか、河川地形の特性を決めている条件は何か、外的条件の変化によって河川地形はどのように変化するのかといったことを明らかにすることが重要となる。

地形の空間的非一様性は、流れと移動床の相互作用によって自律的に形成される。そしてその際、流れと移動床間に生じる界面不安定によって周期性を持った空間構造（パターン）が形成されることがある。河川の土砂輸送と地形形成の問題は、これら流れと移動床間に生じる自律形成現象とその際現れる界面不安定現象に他ならない。ここでは以上のような観点から次の三つの河川地形を取り上げる。

- ガリの形成と土砂生産
- 交互砂州と複列砂州
- 自律形成河道と植生の影響

2 ガリの形成と土砂生産

2.1 ガリの発生機構と従来の研究

地表面は降雨により発生した表面流や浸透流によって絶えず侵食を受けている。その侵食活動は地表の高さが海水準面に達するまで止むことはない。侵食によって地表面から剝離された土砂は流水によって下流域へと輸送され、堆積と再侵食を繰り返しながら河道内の地形のみならず平野や三角州といった沖積地形全体を形成している。上流域で発生する地表面の侵食過程は、流域全体において地形をはじめ土砂がもたらす様々な環境に対し決定的な影響を与えているのである。

侵食が生じる際、地表面は一樣に侵食を受けることはない。流れの集中によって局所的な侵食が生じると、そこにはさらに流れが集中する。それによってさらなる侵食が生じ、地表面高さの違いは一層強調されること

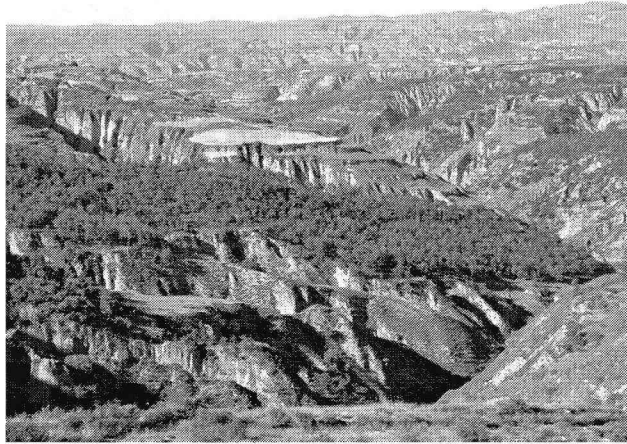


図 1: 発達したガリに覆われた黄土高原. 真野 明氏撮影.

になる. このように流れの集中によって斜面下流端に形成された初期水路はガリと呼ばれている. 一旦ガリが形成されると流れの集中によって侵食量は劇的に増加することになる.

図 1 は中国の黄土高原の写真である. 台地の表面が発達したガリに覆われている様子がうかがわれる. この地域は長年にわたる樹木の伐採によって地表面の侵食が急激に進んだ地域である. 表層を覆っていた肥沃な土壌が失われたため農業生産性も低く, 中国国内でも最も貧しい地域の一つであると言われている. また黄土高原における土砂生産によって黄河の流れは大量の土砂を含んでおり, その堆積によって黄河河口周辺のデルタは活発な流路変動を起こすことが知られている. ここ黄土高原でも侵食を飛躍的に増大させたのは表面に見られる無数のガリであることが推測される. したがって, このような急激な土壌侵食を防止し, 下流への土砂供給量を制御するためには, ガリの形成機構を知ることが必要不可欠となる.

このようなガリ (あるいは初期水路) の形成機構について最初に理論的な研究を行ったのは Smith and Bretherton[2] であろう. 彼らは平坦で一様勾配を持った斜面を考え, 斜面上に横断方向にサイン型を有する微小擾乱を与え, その発達を調べる線形安定解析の手法を用いて水路群の形成機構を説明しようとした. しかし彼らの結果によると発達率が最大となる波長 (卓越波長) は無限小となる. これは実際に斜面上に発達する水路の間隔が非常に小さくなることを意味しており, 有限の水路間隔が観察される実際の現象を説明することはできない. その後も Smith and Bretherton にならっていくつもの理論が提案されたが, 何れも有限の卓越波長を得られていない [3, 4]. また水路網の形成過程に関する数値シミュレーションモデルもいくつか提案されているが, 現れる水路網形状のスケールは初期に与えた擾乱に強く依存し, 実現象で自律的に決定される水路間隔を合理的に再現できてはいない [5, 6].

この原因は用いられたモデルにあると考えられる. Smith and Bretherton をはじめとする従来の理論では流速は斜面勾配にのみに依存する非常に単純なものとなっている. そこで泉 [7], Izumi and Parker[8] はより厳密な流れのモデルとして浅水流方程式を用い, 粘性土砂などのように侵食が卓越する斜面上におけるガリ群の形成理論を提案している. また泉, 藤井 [9] は一旦侵食された土砂が再堆積する過程を無視できない火山灰のような粘性の弱い土砂で構成された斜面上に形成されるガリ群へ理論を拡張している. ここでは泉 [7] の理論についてその概要を述べる.

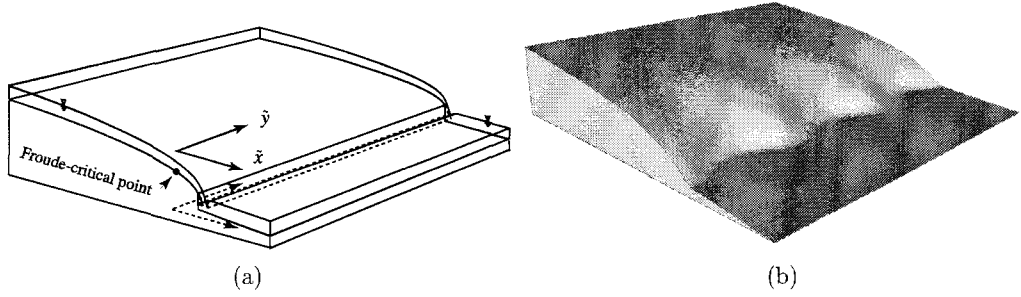


図 2: (a) 下流端に段差を有する斜面. (b) 斜面下流端に与えられた微小擾乱.

2.2 水路群形成の線型安定解析

図 2a に示したような斜面を考える. 斜面上流側では流れが常流になるような緩い一様勾配を有しており, 下流に行くにしたがって勾配が急になり, 下流端近傍のある点で流れは常流から射流に遷移する (フルード数が 1 となる) とする. このような斜面下流端付近に図 2b に示したような擾乱を与える. 斜面上流側で流れが常流であれば, 流れは下流端に与えられた擾乱の影響を感じ, 標高の低い部分に集まることになる.

斜面上の表面流は次の浅水流方程式によって表される.

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{(u^2 + v^2)^{1/2} u}{h} \quad (1)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{(u^2 + v^2)^{1/2} v}{h} \quad (2)$$

$$\frac{\partial u h}{\partial x} + \frac{\partial v h}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

ここで x および y はそれぞれ流下方向および横断方向の座標であり, x の原点は斜面下流端付近に現れるフルード限界点にとっている. また, u および v はそれぞれ x および y 方向の流速成分, h および η は水深および斜面高さである.

粘性性材料などのように侵食が卓越する場合, 斜面高さの時間変化は次式で表わされる.

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + c \frac{\partial \eta}{\partial x} + E - b = 0 \quad (4)$$

$$E(\tau) = \begin{cases} (\tau - \psi)^\gamma, & \tau \geq \psi \\ 0, & \tau < \psi \end{cases}, \quad \tau = u^2 + v^2 \quad (5)$$

ここで E は侵食速度を表わす関数, γ は斜面構成材料に依存する経験的定数でありここでは 1.5 とする. また ψ は侵食が始まる限界底面剪断力である.

上記変数は何れも次のように無次元化されている.

$$(\tilde{x}, \tilde{y}) = \frac{D_c}{C_f} (x^*, y), \quad (\tilde{u}, \tilde{v}) = U_c (u, v), \quad (\tilde{h}, \tilde{\eta}) = D_c (h, \eta^*), \quad \tilde{t} = \frac{D_c}{\alpha T_c^\gamma} t^*, \quad \tilde{E} = \alpha T_c^\gamma E. \quad (6a, b, c, d, e)$$

ここで $\tilde{\cdot}$ は次元量を表わし, C_f は抵抗係数, α は侵食関数の経験定数, U_c および D_c , T_c はそれぞれフルード限界点における流速および水深, 底面剪断力を表わす. また上式では次の座標変換を行っている.

$$x = x^* + ct^*, \quad \eta = \eta^* - bt^*, \quad t = t^* \quad (7a, b, c)$$

上式の座標変換は水平方向上流側および鉛直上方にそれぞれ c および b で移動する移動座標系への変換を意味している。流水による侵食が生じている斜面は絶えず形状を変化させるため定常な斜面形状は存在しない。しかし線型安定解析を行うためには擾乱を与える以前の基本解が定常でないに変数分離ができなくなり、正式な線型安定解析が不可能となる。ここでは侵食によって形状を変化させず一定速度で上流側へ移動するような準定常な斜面形状を考え、それを基本解として解析を行う。そのような準定常な斜面形状は、適当な c および b の値を選ぶことによって定常となる。適当な c および b の値は次のように求められる。

$$c = \frac{E(1) - E(u_n^2)}{1 - \sigma}, \quad b = \frac{\sigma E(1) - E(u_n^2)}{1 - \sigma}. \quad (8a, b)$$

ここで σ は正規化された上流側無限遠点での斜面勾配 ($= S/C_f$) であり、 u_n は上流側無限遠点での等流流速である。

底面剪断力が局所的に大きくなり、活発な侵食が発生する。このとき斜面形状に対し図 2b に示したような横断方向にサイン型の擾乱を与える。斜面上に形成されるガリ群の形状から擾乱は上流側無限遠点においてゼロに漸近するような形状を持つものとする。このような微小擾乱の成長率を求めることによって擾乱が成長するか否かを調べる。また擾乱の成長率が波長の関数となるような場合、最も大きな成長率に対応する波長（卓越波長）を有する擾乱が他の波長を有する擾乱に卓越して成長することが予想される。したがって卓越波長が実際に現れるガリの形成間隔に対応するものと考えられる。擾乱は次のように表わされるものとする。

$$(u, h, \eta) = (u_0(x), h_0(x), \eta_0(x)) + A(u_1(x), h_1(x), \eta_1(x)) e^{\Omega t} \cos ky, \quad v = Av_1(x) e^{\Omega t} \sin ky, \quad (9a, b)$$

ここで A および Ω はそれぞれ擾乱の振幅および増幅率である。線形安定解析では A を無限小と仮定し方程式を線形化することによって Ω を求める。求められた Ω の正負がそれぞれ基準状態の不安定・安定に対応している。上式を式 (1)-(5) に代入し、 A のオーダーで整理すると、 $O(1)$ において次式が得られる。

$$u_0 \frac{du_0}{dx} + \frac{dh_0}{dx} + \frac{d\eta_0}{dx} + \frac{u_0^2}{h_0} = 0 \quad (10)$$

$$u_0 h_0 = 1 \quad (11)$$

$$c \frac{d\eta_0}{dx} + b + E(u_0^2) = 0 \quad (12)$$

$O(A)$ では次式が得られる。

$$\frac{du_1}{dx} = \frac{(u_0^2 + u_0^{-1})u_0' + 2u_0^4 - c^{-1}E_u(u_0^2)u_0^2}{1 - u_0^3} u_1 - \frac{k}{1 - u_0^3} v_1 - \frac{u_0 u_0' + u_0^6}{1 - u_0^3} h_1 - \frac{c^{-1}\Omega u_0^2}{1 - u_0^3} \eta_1 \quad (13)$$

$$\frac{dv_1}{dx} = -u_0 v_1 + \frac{k}{u_0} h_1 + \frac{k}{u_0} \eta_1 \quad (14)$$

$$\frac{dh_1}{dx} = -\frac{2u_0' + 2u_0^2 - c^{-1}E_u(u_0^2)}{1 - u_0^3} u_1 + \frac{ku_0}{1 - u_0^3} v_1 + \frac{u_0^4 + u_0^2 u_0'}{1 - u_0^3} h_1 + \frac{c^{-1}\Omega}{1 - u_0^3} \eta_1 \quad (15)$$

$$\frac{d\eta_1}{dx} = -c^{-1}E_u(u_0^2)u_1 - c^{-1}\Omega \eta_1 \quad (16)$$

上式は次の境界条件および正則条件を用いて解かれる。段差の上流側無限遠点においては摂動は消滅し等流状態に漸近する。したがって次式が成り立つ。

$$u_1 = v_1 = h_1 = \eta_1 = 0 \quad (17)$$

またフルード限界点では $u_0 = 1$ となることから摂動方程式 (13) および (15) は特異性を持つことがわかる（実は $O(1)$ の方程式も同様の特異性を持っており、式 (8a) は基本状態の正則条件にもなっている）。フルード限界点で du_1/dx および dh_1/dx が無限大とならないためには次の正則条件が成り立つ必要がある。

$$[E_u(1) - 2c(p+1)]u_1 + kcv_1 + c(p+1)h_1 + \Omega \eta_1 = 0 \quad \text{at } x = 0 \quad (18)$$

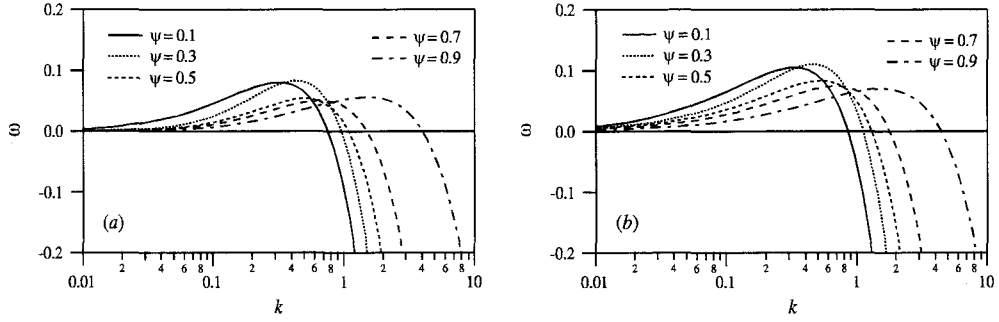


図 3: 擾乱の成長率 Ω の波数 k による変化. (a) $\sigma = 0.1$, (b) $\sigma = 0$.

ここで $p = u'_0(0)$ である. 式 (13)–(16) および境界条件 (17), (18) は Ω を固有値とする Sturm Lieuville 型の固有値問題を構成している. ここでは非線形二点境界値問題に帰着させ, 緩和法を用いて解きやすくするため, 次の正規化条件を与えて解くこととする.

$$\eta = 1 \quad \text{at} \quad x = 0 \quad (19)$$

得られた Ω を波数 k の関数として表したのが図 3 である. 図 3a および b はそれぞれ $\sigma = 0.1$ および $\sigma = 0$ の場合を表している. Ω は k の値が 0 に近づくときゼロに漸近していく. また概ね $k < 1 \sim 4$ の範囲で正の値をとるが, k の値がそれより大きくなると負の値をとり急激に減少していく. このことは $k < 1 \sim 4$ の波数を持つ擾乱のみが発達し, それ以外の波数の擾乱は減衰してしまうことを意味している. 波長 $\bar{\lambda}$ は次式で表される.

$$\bar{\lambda} = \frac{2\pi D_c}{k C_f} \quad (20)$$

また C_f は通常 0.01 のオーダーである. したがって $\bar{\lambda}$ が限界水深 D_c の 150 倍から 600 倍程度より大きい擾乱のみが発達し, それより小さい擾乱は発達できないことになる. また無次元卓越波数 (Ω を最大にする k) の平均値を 0.6 程度とすると, 実際に現れるガリ群の間隔に対応する $\bar{\lambda}_c$ の値は D_c の 1000 倍程度となる.

典型的なガリ (初期水路) の間隔は 10~100 m であることが知られている [10, 11, 12]. 理論の結果によればこの間隔に対応する水深は 1~10 cm である. ガリは極値的なイベントで急速に発達すると考えると, この程度の水深が生じる可能性は十分に考えられる. 本理論によって実際に見られるガリの間隔がほぼ説明できることがわかる.

2.3 ガリ形成間隔選択のメカニズム

図 4 に $\sigma = 0.1$ および $\psi = 0.5$ の時の u_0 および $\eta_0, u_1, v_1, h_1, \eta_1$ の分布形を示す. a と b はそれぞれ増幅率が最大値 $\Omega = 0.426$ をとる $k = 0.5$ のケースと負の値 $\Omega = -1.25$ をとる $k = 5.0$ のケースに対応している. 原点付近における摂動流速 u_1 や v_1 , 摂動流量 $u_1 + h_1$ は波数 k の大きい b のケースの方が若干大きくなっているのに対して, k の小さい a の方がより上流から流れの集中が始まっている様子がうかがわれる. 原点周辺に限れば k が大きく波長の長い擾乱の方がより多くの流れを集め得るが, k が小さく波長の長い擾乱の方がより広い範囲に擾乱の影響を及ぼし得る. したがってこれら二つの効果のバランスによって, 極端に大きくも小さくもない k の値で全体としての擾乱の発達速度が最大となり, 卓越波数が $k = 0.4 \sim 0.8$ 付近に現れるものと考えられる.

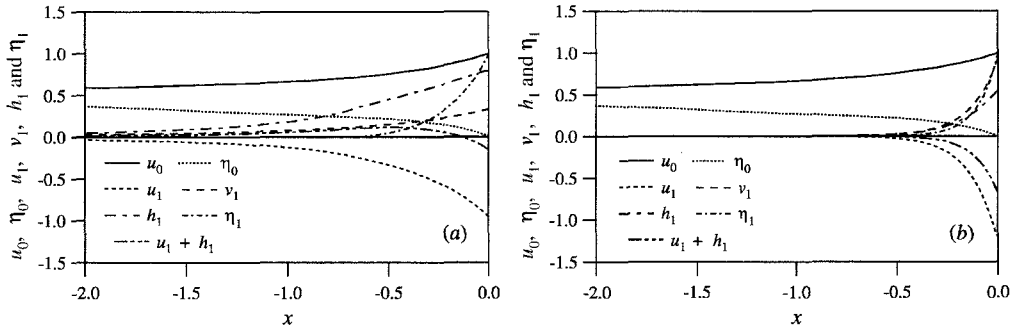


図 4: u_0 および η_0 , u_1 , v_1 , h_1 , η_1 の x 方向分布. $\sigma = 0.1$, $\psi = 0.5$, (a) $k = 0.5$, $\Omega = 0.426$, (最大の増幅率に対応), (b) $k = 5.0$, $\Omega = -1.25$, (負の増幅率に対応).

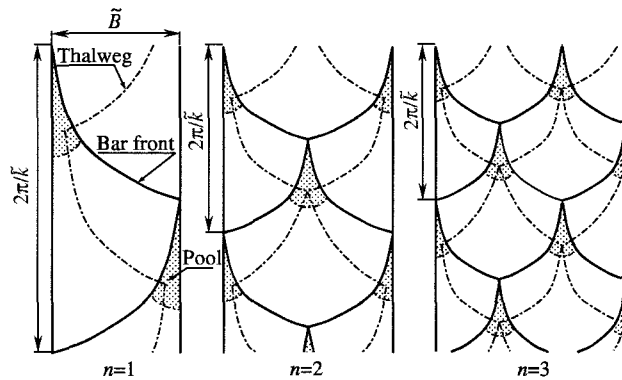


図 5: 単列交互砂州 ($n = 1$) と複列砂州 ($n = 2, 3$).

3 交互砂州と複列砂州

3.1 砂州に関する従来の研究

砂州とは、河道内において川幅の数倍から数十倍スケールで河床高の変化が横断方向および流下方向に周期的に繰り返される河床形態である。中でも横断方向波数が 1 のものを交互砂州、2 以上のものを複列砂州と呼んでいる（図 5 参照）。図 6 に北海道利別川に見られる典型的な交互砂州の空中写真を示す。流下方向および横断方向に周期的な形状を有していることがわかる。砂州は高水時に形成される。砂州が形成された状態で水位が低下すると、流れは砂州の形状に規定され、河道内において横断方向に蛇行しながら流下方向に緩勾配の部分と急勾配の部分の繰り返しながら流れることになる。この緩勾配部と急勾配部がそれぞれ淵と瀬に対応しており、河川環境の多様性に大きな役割を演じている。

砂州の発生を線形安定解析の手法を用いて理論的に説明した Hansen[13], Callander[14] の研究を端緒として、その後数々の理論的研究が行われてきた [15, 16, 17, 18, 19, 20]。近年の研究の中心は線形領域を越えて、有限の振幅を持つにいたった砂州の挙動特性に関する研究に移っている [21, 22, 23, 24, 25]。

砂州の発生をコントロールしているパラメータはアスペクト比（川幅水深比）である。この値が臨界値を超えると平坦床は不安定となり、砂州の形成が引き起こされる。この際の単列交互砂州の発生における臨界ア

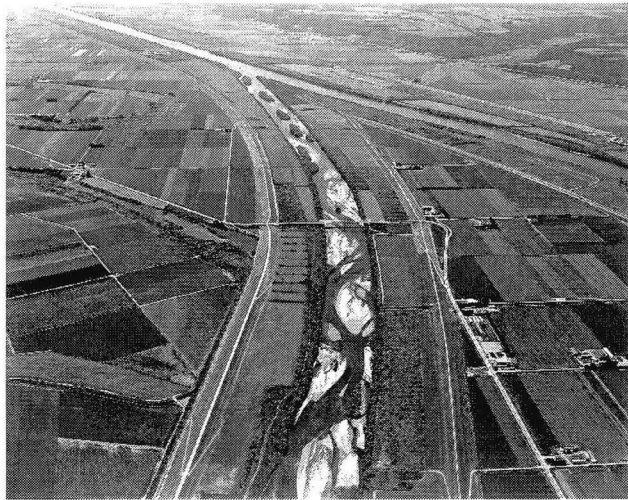


図 6: 利別川に見られる交互砂州. 北海道開発局提供.

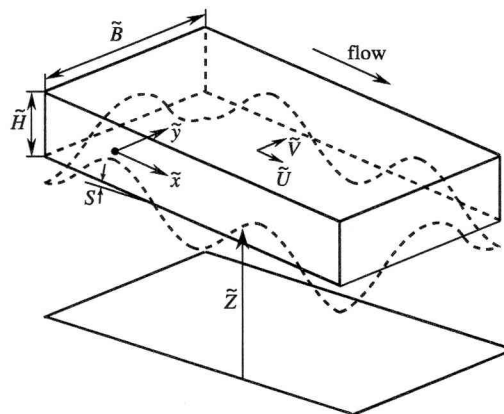


図 7: 座標系と変数の定義.

スペクトル比は約 10 のオーダーであり，臨界における波長は川幅の数倍から数十倍程度であることが線形解析によって明らかになっている．また非線形解析による結果として，不安定性の発生時に見られる分岐の形態は supercritical bifurcation（超臨界分岐）であり，アスペクト比が臨界値を超えた時点で，有限な振幅を持った河床横断方向および流下方向に対する周期解に移行することが明らかとなっている [23]．またその際，サイドバンド不安定が発生すること，さらにそこで導かれる Ginzburg-Landau 方程式の解は準周期解となり得ることがわかっている [25]．次節以降では泉，Adichai[26] の理論を例に，砂州の線形・非線形理論の概要を解説する．

3.2 砂州の線形理論

固定壁と移動床を有する幅 $\tilde{B}$ の広幅矩形水路に流れが存在する状況を考える（図 7 参照）．基準状態では流れは等流であり，等流状態での流速および水深をそれぞれ $\tilde{U}_n$ および $\tilde{H}_n$ と表すことにする．またこのとき河

床は勾配 S を有する平坦床であるとする。この基準等流状態における河床に対して微小振幅の擾乱を与えることを考える。

準定常の仮定を用い、河床形状の時間変化は流れの時間変化に比較して十分に遅く、流れの時間微分項は十分に小さくなり無視できると仮定する。そのとき幅一定の直線水路内における流れは次の浅水流方程式および連続式を用いて表される。

$$\tilde{U} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{V} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{y}} = -g \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{x}} - g \frac{\partial \tilde{Z}}{\partial \tilde{x}} - \frac{\tilde{\tau}_{bx}}{\rho \tilde{H}} \quad (21)$$

$$\tilde{U} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{V} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \tilde{y}} = -g \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{y}} - g \frac{\partial \tilde{Z}}{\partial \tilde{y}} - \frac{\tilde{\tau}_{by}}{\rho \tilde{H}} \quad (22)$$

$$\frac{\partial \tilde{U} \tilde{H}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{V} \tilde{H}}{\partial \tilde{y}} = 0 \quad (23)$$

ここで $\tilde{x}$ および $\tilde{y}$ はそれぞれ流下方向および横断方向の座標、 $\tilde{U}$ および $\tilde{V}$ はそれぞれ $\tilde{x}$ および $\tilde{y}$ 方向の流速、 $\tilde{H}$ は水深、 $\tilde{Z}$ は河床高さ、 g は重力加速度、 ρ は水の密度である。 $\tilde{\tau}_{bx}$ および $\tilde{\tau}_{by}$ は底面剪断力ベクトルであり、次式で表される。

$$(\tilde{\tau}_{bx}, \tilde{\tau}_{by}) = \tilde{\tau}_b (\tilde{U}^2 + \tilde{V}^2)^{-1/2} (\tilde{U}, \tilde{V}), \quad \tilde{\tau}_b = \rho C_f (\tilde{U}^2 + \tilde{V}^2) \quad (24a, b)$$

ここで C_f は河床の抵抗係数であり $C_f = [6 + 2.5 \ln (\tilde{H}/\tilde{k}_s)]^{-2}$ 、 $\tilde{k}_s$ は相当粗度である。

河床高さの時間変化は次のように表される。

$$\frac{\partial \tilde{Z}}{\partial \tilde{t}} = -\frac{1}{1 - \lambda_p} \left(\frac{\partial \tilde{Q}_{bx}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{Q}_{by}}{\partial \tilde{y}} \right) \quad (25)$$

ここで $\tilde{t}$ は時間、 λ_p は空隙率、 $\tilde{Q}_{bx}$ および $\tilde{Q}_{by}$ はそれぞれ掃流砂量の $\tilde{x}$ および $\tilde{y}$ 方向成分である。

掃流砂量公式としては、芦田・道上 [27] の提案式を、任意勾配を持った河床上の流砂量に拡張した Kovacs & Parker [28] の提案式を用いる。Kovacs & Parker の式を微小な勾配について線形化すると次式が得られる。

$$\frac{\tilde{Q}_{bx}}{(R_s g D_s)^{1/2} D_s} = \frac{\alpha^{1/2}}{\mu_C} \left[\tau^* - \tau_c^* \left(1 + \frac{1}{\mu_C} \frac{\partial \tilde{Z}}{\partial \tilde{x}} \right) \right] \left[\tau^{*1/2} - \tau_c^{*1/2} \left(1 + \frac{1}{2\mu_C} \frac{\partial \tilde{Z}}{\partial \tilde{x}} \right) \right] / \left(1 + \frac{1}{\mu_C} \frac{\partial \tilde{Z}}{\partial \tilde{x}} \right) \quad (26)$$

$$\frac{\tilde{Q}_{by}}{(R_s g D_s)^{1/2} D_s} = \frac{\alpha^{1/2}}{\mu_C} (\tau^* - \tau_c^*) \left(\tau^{*1/2} - \tau_c^{*1/2} \right) \left[\frac{\tilde{V}}{\tilde{U}} - \frac{1}{\mu_C} \left(\frac{\tau_c^*}{\tau^*} \right)^{1/2} \frac{\partial \tilde{Z}}{\partial \tilde{y}} \right] \quad (27)$$

ここで τ^* はシールズ数 ($= \tilde{\tau}_b / \rho R_s g D_s$) であり、 R_s は砂粒子の水中比重、 D_s は砂の粒径、 τ_c^* は平坦床における限界シールズ数、 α は底面付近での代表速度と摩擦速度の比、 μ_C はクーロン摩擦係数である。ここでは Kovacs & Parker にならって $\tau_c^* = 0.035$ 、 $\mu_C = 0.84$ 、 $\alpha = 11.9$ とする [28]。

次の無次元化を導入する。

$$(\tilde{x}, \tilde{y}) = \tilde{B}(x, y), \quad (\tilde{U}, \tilde{V}) = \tilde{U}_n(U, V), \quad (\tilde{H}, \tilde{Z}, \tilde{k}_s) = \tilde{H}_n(H, Z, k_s), \quad \tilde{t} = \frac{(1 - \lambda_p) \tilde{H}_n}{\tilde{Q}_{bn}} t \quad (28a, b, c, d)$$

ここで $\tilde{Q}_{bn}$ は勾配の影響を無視した等流状態における掃流砂量である。

上記の無次元化を用いると浅水流方程式および連続の式は次のように無次元化される。

$$F^2 \left(U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} \right) = -\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial Z}{\partial x} - \beta S \frac{(U^2 + V^2)^{1/2} U}{\left(1 + 2.5 C_{fn}^{1/2} \ln H \right)^2 H} \quad (29)$$

$$F^2 \left(U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} \right) = -\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial Z}{\partial y} - \beta S \frac{(U^2 + V^2)^{1/2} V}{\left(1 + 2.5 C_{fn}^{1/2} \ln H \right)^2 H} \quad (30)$$

$$\frac{\partial UH}{\partial x} + \frac{\partial VH}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{\partial Q_{bx}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{by}}{\partial y} = 0 \quad (31, 32)$$

ここで F は等流状態におけるフルード数, β はアスペクト (川幅水深) 比, C_{fn} は基準等流状態における抵抗係数である. また Q_{bx} および Q_{by} は無次元化された掃流砂ベクトルである.

等流状態に対して次のような摂動を与える.

$$(U, V, H, Z) = (1, 0, 1, -\beta Sx) + (U_1, V_1, H_1, Z_1) + (U_2, V_2, H_2, Z_2) + (U_3, V_3, H_3, Z_3) \quad (33)$$

ここで添字 1 および 2, 3 はそれぞれ $O(A)$ および $O(A^2, A^2A^*)$, $O(A^3, A^2A^*)$ の項を表している.

摂動の振幅 A が比較的小さい範囲では振幅 A の時間変化が, 振幅 A 自身を用いて次のように展開されると仮定できる.

$$\frac{dA}{dt} = \lambda_0 A + \lambda_1 A^2 A^* = \lambda_0 A + \lambda_1 |A|^2 A \quad (34)$$

ここで上付き添字として現れる $*$ はその項自体の複素共役を表している. 上式はランダウ方程式と呼ばれ, 振幅の非線形発展を表している. 式中の λ_0 は擾乱の線形増幅率であり, λ_1 はランダウ定数と呼ばれ解の分岐性状を決定するパラメータである.

式 (33) および (34) を (29)–(32) に代入すると, A の一次のオーダーについて次のような式が得られる.

$$F^2 \frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial H_1}{\partial x} + \frac{\partial Z_1}{\partial x} + 2\beta S U_1 - \beta S \left(1 + 5C_{fn}^{\frac{1}{2}}\right) H_1 = 0 \quad (35)$$

$$F^2 \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial H_1}{\partial y} + \frac{\partial Z_1}{\partial y} + \beta S V_1 = 0 \quad (36)$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial H_1}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y} = 0 \quad (37)$$

$$\frac{\partial Z_1}{\partial t} + \theta_{1,0} \frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y} - \frac{5}{2} C_{fn}^{\frac{1}{2}} \theta_{1,0} \frac{\partial H_1}{\partial x} - \frac{1}{2} \theta_{3,1} \frac{\partial^2 Z_1}{\partial x^2} - \theta_{2,1} \frac{\partial^2 Z_1}{\partial y^2} = 0 \quad (38)$$

ここで

$$\theta_{1,0} = \frac{3 + \Theta}{1 - \Theta}, \quad \theta_{3,1} = \frac{2 + \Theta^{1/2} + \Theta}{\mu_C \beta (1 - \Theta)}, \quad \theta_{2,1} = \frac{\Theta^{1/2}}{\mu_C \beta} \quad (39a, b, c)$$

式 (35)–(38) は次の形の解を持つ.

$$(U_1, H_1, Z_1) = A E_1 C_n (u_{111}, h_{111}, z_{111}) + *, \quad V_1 = A E_1 S_n v_{111} + * \quad (40a, b, c, d)$$

ここで単独で現れる $*$ はその前の項の複素共役を表している. また E_n および C_n , S_n は次のように表される.

$$E_n = \exp ni(kx - \omega t), \quad C_n = \cos n\pi y, \quad S_n = \sin n\pi y \quad (41a, b, c)$$

式 (40) および (41) を式 (35)–(38) に代入すると次式が得られる.

$$\mathbf{L}_{111} \begin{bmatrix} u_{111} \\ v_{111} \\ h_{111} \\ z_{111} \end{bmatrix} = 0 \quad (42)$$

ここで

$$\mathbf{L}_{abc} = \begin{bmatrix} 2\beta S + ibkF^2 & 0 & ibk - \beta S \left(1 + 5C_{fn}^{\frac{1}{2}}\right) & ibk \\ 0 & \beta S + ibkF^2 & -cn\pi & -cn\pi \\ ibk & cn\pi & ibk & 0 \\ ibk\theta_{1,0} & cn\pi & -\frac{5}{2} ibk C_{fn}^{\frac{1}{2}} \theta_{1,0} & a\lambda_0 - ib\omega + \theta_{2,1} (cn\pi)^2 + \frac{1}{2} \theta_{3,1} (bk)^2 \end{bmatrix} \quad (43)$$

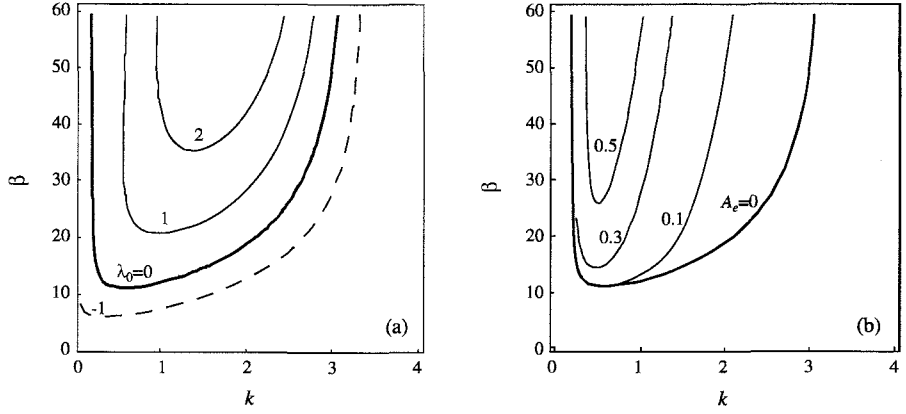


図 8: 単列交互砂州 ($n = 1$) の (a) 線形増幅率 λ_0 および (b) 平衡振幅 A_e . $S = 0.005$, $F = 0.7$, $\Theta = 0.5$.

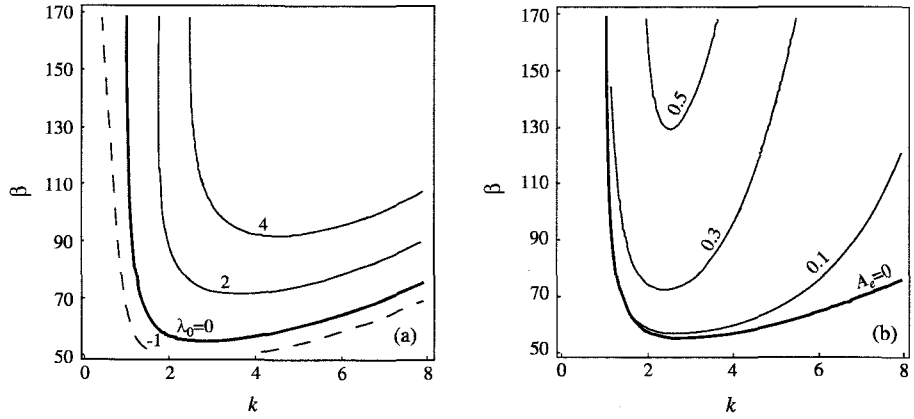


図 9: 複列砂州 ($n = 5$) の (a) 線形増幅率 λ_0 および (b) 平衡振幅 A_e . $S = 0.005$, $F = 0.7$, $\Theta = 0.5$.

式 (43) が自明でない解 (0 以外の解) を持つためには次の可解条件を満たす必要がある.

$$\det \mathbf{L}_{111} = |\mathbf{L}_{111}| = 0 \quad (44)$$

式 (44) より λ_0 は次式のように表されることがわかる.

$$\lambda_0 = \lambda_0(k, n, \beta; S, \Theta, F) \quad (45)$$

3.3 砂州の非線形解析

さらに $O(A^2, AA^*)$, $O(A^2 A^*)$ のオーダーまで計算を進めると, それぞれのオーダーで次のような式が得られる.

$$\mathbf{L}_{2ij} \begin{bmatrix} u_{2ij} \\ v_{2ij} \\ h_{2ij} \\ z_{2ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{2ij} \\ q_{2ij} \\ r_{2ij} \\ s_{2ij} \end{bmatrix}, \quad i, j = 0, 2, \quad \mathbf{L}_{3ij} \begin{bmatrix} u_{3ij} \\ v_{3ij} \\ h_{3ij} \\ z_{3ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{3ij} \\ q_{3ij} \\ r_{3ij} \\ s_{3ij} \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} i, j = 1, 3 \\ (i = j = 1 \text{ を除く}) \end{matrix} \quad (46)$$

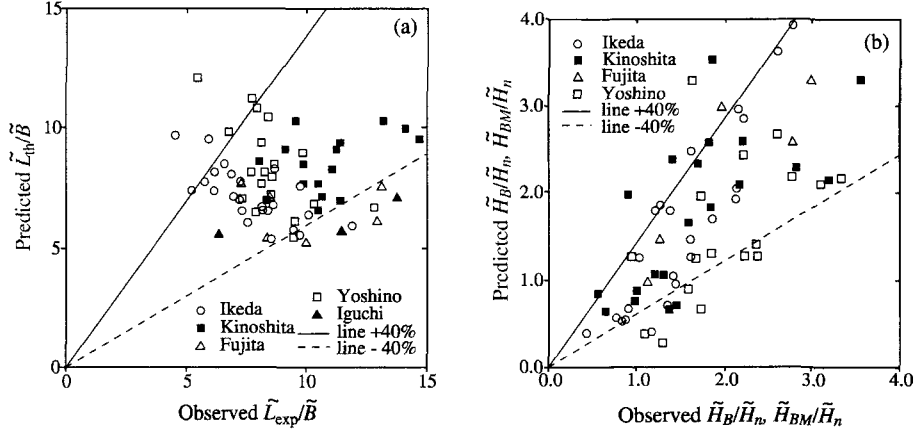


図 10: 単列交互砂州における (a) 無次元波長と (b) 無次元波高の理論値と実験値の比較。

$O(A^2 A^*)$ で $i = j = 1$ の時は次式が得られる。

$$\mathbf{L}_{311} \begin{bmatrix} u_{311} \\ v_{311} \\ h_{311} \\ z_{311} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{311} \\ q_{311} \\ r_{311} \\ s_{311} - z_{111} \lambda_1 \end{bmatrix} \quad (47)$$

ここで Herbert[29] に倣って基本擾乱 ($E_1 C_n$ の変動) の振幅を A と再定義し, $z_{111} = 1$ および $z_{311} = 0$ という正規化条件を用いる。するとランダウ定数 λ_1 が導かれる。 λ_1 は臨界アスペクト比付近における解の分岐性状を決定するパラメータであり, 平坦床から砂州発生への分岐は λ_1 が負となる超臨界分岐である。超臨界分岐のとき擾乱の平衡振幅 A_e が存在し, 次のように求められる。

$$A_e = \sqrt{-\frac{\lambda_0}{\lambda_1}} \quad (48)$$

3.4 砂州の波長と波高

理論より導かれた単列交互砂州および複列砂州の線形増幅率 λ_0 および平衡波高 A_e をそれぞれ図 8 および図 9 に示す。 λ_0 および A_e いずれも波数 k とアスペクト比 β の関数であるので, k - β 平面上にコンター図として示されている。図より n が大きくなって複列砂州になると全体的に高波数側にずれる様子がわかる。また単列交互砂州, 複列砂州いずれの場合も, 平衡波高がピークをとる波数と線形増幅率がピークをとる波数は必ずしも一致しておらず, 平衡波高がピークをとる波数の方が低波数側にずれる傾向が見られる。

図 10 および図 11 に無次元波長と無次元波高の理論値と実験値を比較した図を示す。いずれもばらつきが大きいものの, $\pm 40\%$ 以内にはほぼ入っていることがわかる。

図 12 に本理論で得られた砂州の幾何形状について典型的な例を示した。(a) が単列交互砂州であり, (b) が $n = 5$ の複列砂州である。コンタを描くに当たっては A の三次のオーダーまでの解を用いてある。(a) の単列交互砂州では砂州前縁部や深掘部の形状など実験室で見られるような理想的な状況下で作られる単列交互砂州の幾何学的特徴を非常に良く表しているのがわかる。また複列砂州は上流方向に開口した三日月型の形状を有することが実験水路や実際の河川で観察されているが, その幾何学的特徴が良く表されている。

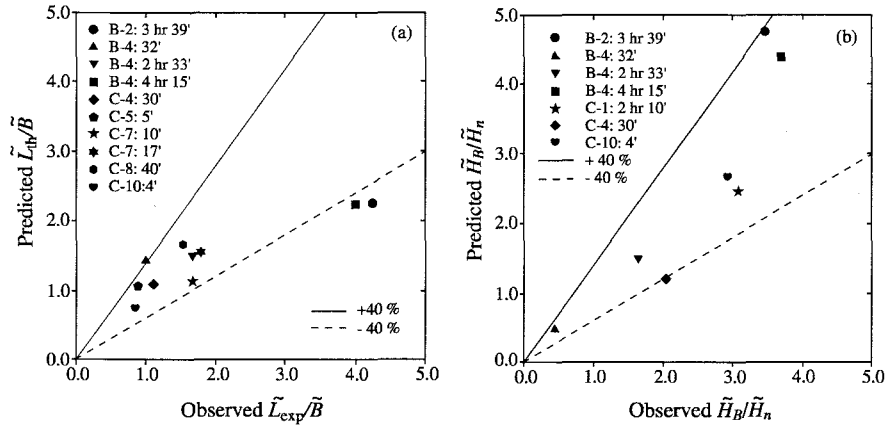


図 11: 複列砂州における (a) 無次元波長と (b) 無次元波高の理論値と実験値の比較.

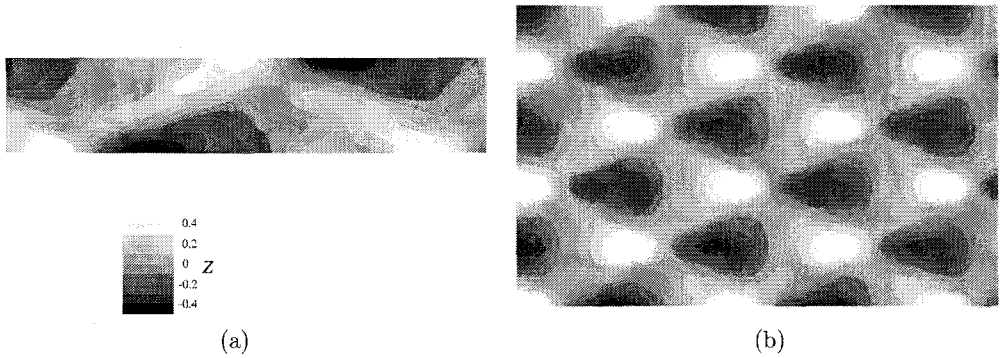


図 12: 三次までの非線形解から得られる典型的な砂州のコンタ. (a) 単列交互砂州 ($n = 1$), (b) 複列砂州 ($n = 5$). 図中, 明暗はそれぞれ河床の高低に対応している. また流れは左から右である.

4 自律形成河道と植生の影響

4.1 自律形成河道に関する従来の研究

移動床を有する流路の境界面は, 流水と河床材料との相互作用によって決定される. 境界面がどのような形状のときに安定となるかという問題は, 移動床水理学上の重要な課題の一つとして, 従来数多くの研究が行わ

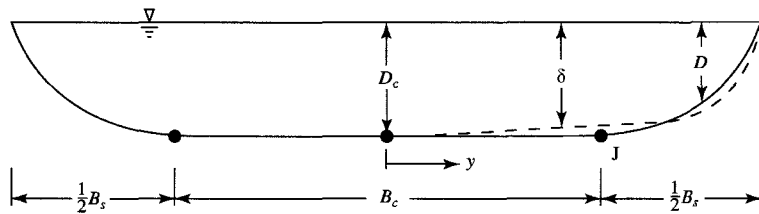


図 13: 自律形成河道の断面形状.

れてきた。Glover and Florey[30]は河床上の土砂に働く剪断力がいたるところで限界剪断力を下回り、土砂が動かないという条件から河床横断面形状を導いた。しかし彼の導いた断面形状は静的平衡状態に対応しており、土砂を輸送している実際の河道断面形状を説明するには至っていない。一方、平野[31]は、土砂を輸送しながら河道形状を変化させない動的平衡河道が存在し得ない次のような矛盾を指摘している。土砂が移動している河道中央部は平坦でなければならない。底面剪断力が水深に比例するとすれば、河道中央部での底面剪断力が限界剪断力を上回っているような場合、側岸部との接続部でも土砂の移動が生じることになり、側岸侵食は永遠に止まらないことになってしまう。これは動的平衡状態が存在し得ないことを意味している。この矛盾を初めて解決したのはParker[32]である。Parkerはこのような矛盾が生じた原因が底面剪断力の算出方法にあるとして、乱流による運動量拡散まで考慮した側岸部近傍の底面剪断力分布を導き、河道中央部と側岸部の接続点では運動量の小さい側岸部の影響のために水深による底面剪断力より若干小さくなることを明らかにしている。この理論によれば水深が一樣な河道中央部でも、側岸部近傍では乱流拡散によって剪断力が若干減少するため、底面剪断力は側岸部に向かって減少する。そうして河床が横断勾配を持ち始める中央部・側岸部境界で丁度限界掃流力になる。横断方向の底面剪断力分布が求まると、河道中央と接続点での底面剪断力の差から平衡状態における水深が導かれる。ここではParkerの理論をより一般化した泉、池田[33]の理論を用いて、その概要を述べる。

4.2 直線礫床河川の平衡横断面形状

動的平衡状態にある直線礫床河道では、河道中央部の水深は横断方向に一樣でなければならない（図13参照）。なぜなら、もし河床が横断方向に勾配を有するとすれば、輸送される土砂は勾配の影響によって横断方向に輸送されることになり、横断面形状は時間的に変化することになり平衡ではないからである。したがって河道中央付近の水深は次のように表される。

$$D = D_c \quad 0 \leq y \leq B_c/2 \quad (49)$$

ここで D_c は河道中央部における水深であり一定値をとる。また B_c は河道中央部の幅を表す。一方側岸部では、当然のことながら河床は横断方向に勾配を有している（そうでなければ側岸部ではない）。もし側岸部の土砂が移動しているとすれば、その土砂は横断方向の勾配のために河道中央部に向かって輸送されることになる。したがって側岸部は限界掃流力以下の静的平衡状態になければならない。Lane[34]は河床上の砂粒子に働く力の釣り合いから静的平衡な河床形状を表す式として次式を導いた。

$$\left(\frac{\delta}{\delta_c \cos \theta} \right)^2 + \left(\frac{1 + \mu\beta}{\mu} \right)^2 \left(\frac{dD}{dy} \right)^2 = \mu^2 \left(\frac{1 + \mu\beta}{\mu} - \beta \frac{\delta}{\delta_c \cos \theta} \right)^2 \quad (50)$$

ここで δ は水深の次元で表わした剪断力 ($= \tau / \rho g S$)、 τ は底面剪断力、 δ_c は河道中央部における δ 、 ρ は水の密度、 g は重力加速度、 S は河床勾配、 μ はクーロン静止摩擦係数、 β は砂粒子に働く揚力係数と抗力係数の比、 B は全川幅、 θ は河床の横断方向傾斜角である。以降、添え字 c および s はそれぞれ河道中央部および側岸部の値を表す。河床に働く剪断力は次のように表される。

$$\frac{\tau}{\cos \theta} = \frac{\rho C_f \bar{u}^2}{\cos \theta} = \rho g D S + \frac{d}{dy} \left(D \frac{d\bar{u}}{dy} \right) \quad (51)$$

ここで $\bar{u}$ は水深平均流下方向流速、 ϵ_z は横断方向への運動量拡散係数である。上式右辺2項目は乱流による運動量輸送を表している。上式は流速 $\bar{u}$ および D に関する微分方程式であり、式(50)と連立させて解くことにより横断面形状および剪断力分布が導かれる。しかしこれら二つの式を解析的に解くのは不可能である。したがってここでは、次のように近似的に解を求める。

式 (51) で乱流拡散の項を微小として無視すると次式が得られる。

$$\tau = \rho g D S \cos \theta \quad (52)$$

上式を式 (50) に代入すると次のような解が得られる。

$$\frac{D}{D_c} = s(\eta) = \frac{1}{1 - \mu\beta} \left[\cos \left(\eta \cos^{-1} \mu\beta \right) - \mu\beta \right], \quad (53)$$

ここで η は河道中央部と側岸部の接続点 J を原点とし側岸部幅で無次元化した横断方向座標であり、次式で表される。

$$\eta = \frac{y - B_c/2}{B_s/2} \quad (54)$$

式 (53) で表わされる側岸部の形状を用いて、式 (51) から底面剪断力分布を導くと次のようになる。

$$\frac{\bar{u}}{\bar{u}_c} = 1 - \nu \frac{\gamma}{4} \exp \left[\frac{\sqrt{2}\eta}{\nu^{1/2}} \right], \quad \eta \leq 0 \text{ (河道中央部)} \quad (55)$$

$$\frac{\bar{u}}{\bar{u}_c} = 1 + \nu \left\{ \frac{\gamma}{4} \exp \left[-\frac{\sqrt{2}\eta}{\nu^{1/2}} \right] - \frac{\gamma}{2} \left[\left(\frac{\eta}{\nu^{1/2}} \right)^2 + 1 \right] \right\}, \quad 0 \leq \eta \leq 1 \text{ (側岸部)} \quad (56)$$

ここで $\gamma = s_{\eta\eta}(0)$, $\nu = 0.13 C_f^{-1/2} (2D_c/B_s)^2$ であり、式 (25) 中で $\mu = 0.84$ および $\beta = 0.85$ とすると $\gamma = 1.05$, $\nu = 0.382$ となる。したがって河道中央部と側岸部の接続点 J における流速 $\bar{u}_j$ は次のように表される。

$$\frac{\bar{u}_j}{\bar{u}_c} = 1 - \frac{\nu\gamma}{4} = 0.900 \quad (57)$$

河道中央部と側岸部の接続点 J で限界掃流力となっていることから次式が得られる。

$$\frac{\tau_c^*}{\tau_{th}^*} = \left(\frac{\bar{u}_c}{\bar{u}_j} \right)^2 = 1.23 \quad (58)$$

河道中央におけるシールズストレスは $\tau_c^* = D_c S / (R_s m d_{50})$ と表されることから、限界シールズ数として Egiazaroff[35] の式を用いると、河道中央部の水深 D_c は次のように表される。

$$D_c = 0.0615 R_s [\log_{10} (19m)]^{-2} d_{50} m S^{-1} \quad (59)$$

ここで R_s は砂粒子の水中比重であり、 $m = d_{90}/d_{50}$ である。ここで重要なのは河道中央における水深 D_c が中央粒径 d_{50} に比例し、河床勾配 S に反比例することである。

上記理論に先立って、池田, Parker, 千代田, 木村 [36] は Parker[32] の理論に混合粒径の効果を取り入れた上式とほぼ同一の式を導き、流路全体の力のつりあいから平衡川幅を求めている。さらに理論より導かれた平衡水深および川幅は実験および実測の結果と良好に一致することを示している。

4.3 植生を有する直線礫床河川

古生代中期における陸生維管束植物の登場によって河川の形態は大きく変化したと言われている [37]。植物は流れを弱めることで侵食を防ぎ堆積を助長する。それまで一般的であった網状流路は減少し、明瞭な側岸部を持った河道が増加した可能性は十分にある。この説の真偽は定かではないが、植生が河道形態に大きな影響を与えているのは間違いない事実であろう。ここでは前節の理論を側岸に植生が存在する場合に拡張し、平衡横断面形状に対する植生の効果を考える。

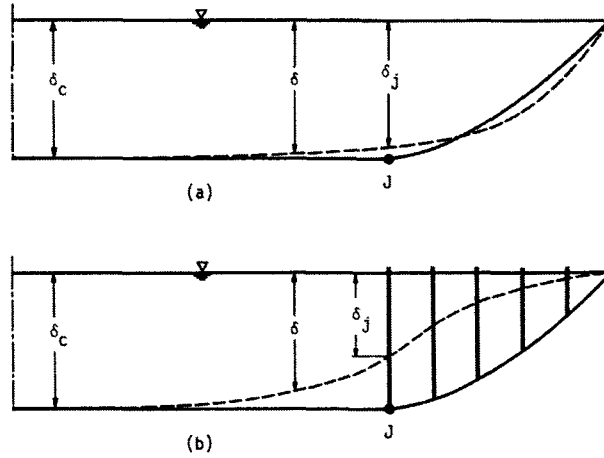


図 14: 横断方向剪断力分布の概念図. (a) 植生が存在しない場合, (b) 植生が存在する場合.

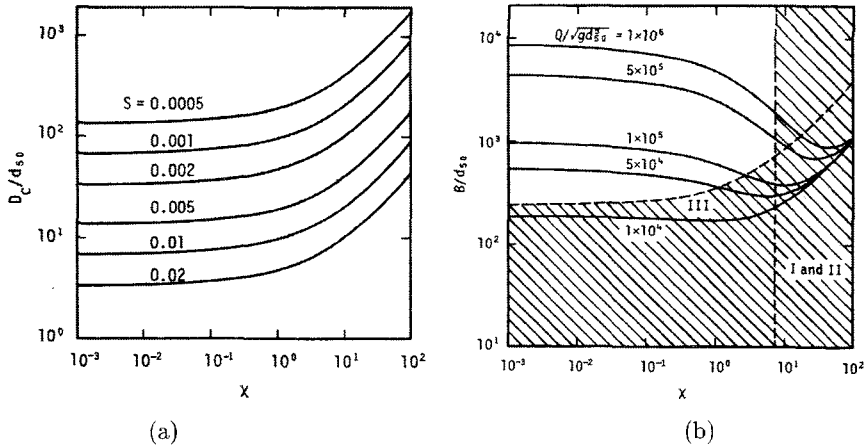


図 15: 植生の密生度 χ による (a) 平衡水深および (b) 平衡川幅の変化. 図中斜線部は理論の適用範囲外であることを示す.

前述したように側岸部は静的平衡状態にあり土砂が移動しないため、植生が存在することが可能である。一方、河道中央部は動的平衡状態にあり土砂は移動している。したがって植生は側岸部には存在できるものの、河道中央部に進出することはできない。そこで側岸部にのみ植生が存在するような状況を考える。植生は流れに対して抵抗となり底面剪断力の一部を受け持つ。そのとき植生を有する側岸部の底面剪断力分布は図 14b のようになる。植生が存在すると河道中央における底面剪断力と接統点 J における底面剪断力の違いが大きくなる。接統点 J では植生の有無にかかわらず限界剪断力が実現しているはずであるから、植生が存在する場合の河道中央での底面剪断力は植生がない場合に比べて大きくなることがわかる。これは河道中央部がより大きな水深でも平衡となることを意味している。

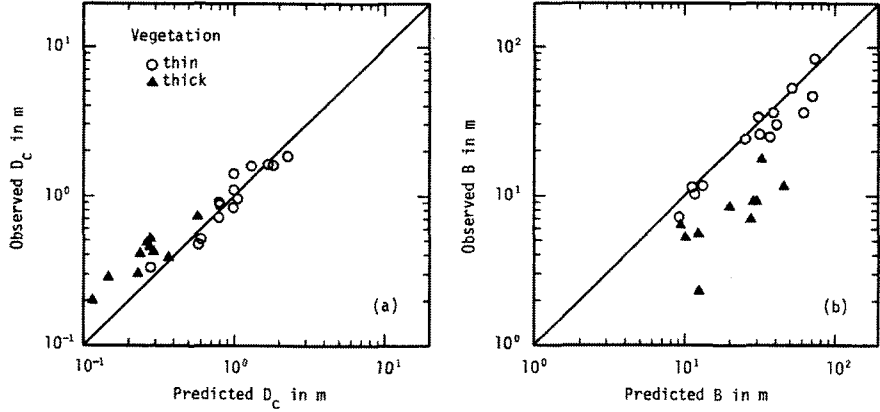


図 16: 理論値と実測値の比較. 植生の影響を考慮しない場合. (a) 中央水深 D_c . (b) 川幅 B .

泉, 池田 [33] は植生が存在する場合の底面剪断力分布を次式で表した.

$$\frac{\tau}{\cos \theta} = \frac{\rho C_f \bar{u}^2}{\cos \theta} = \rho g D S - D_r + \rho \epsilon_y \frac{d}{dy} \left(D \frac{d\bar{u}}{dy} \right) \quad (60)$$

ここで D_r は植生による抗力を表わしており, 抗力係数 C_D を用いて次式で表わされるとする.

$$D_r = \frac{1}{2} \rho C_D \frac{a}{\cos \theta} D \bar{u}^2 \quad (61)$$

ここで a は樹木の密度を表わすパラメータであり, 樹木の直径 d および横断方向および流下方向の樹木間隔 ℓ_x および ℓ_y を用いて $d/(\ell_x \ell_y)$ と表わされる. 河道中央部には植生が存在しないことから底面剪断力分布は前節の式 (51) で表される. 前節と同様に式 (51) と (60) を解き, 河道中央部でのシールズ数と限界シールズ数の比 (τ_c^*/τ_{th}^*) を導き, 平衡水深を植生の密度を表す無次元パラメータ $\chi = C_D a D_c / (2 C_f)$ の関数として示したのが図 15a である. χ が大きくなり植生密度が大きくなると水深が大きくなる様子がわかる. 流路全体の力の釣り合いから平衡川幅を求めたのが図 15b である. 植生密度が増加すると水深が増加することによって川幅も小さくなることわかる.

図 16 に植生の存在を考慮しない場合の理論値と実測値の比較を示す. 実測値は Andrews[38] によって測定された側岸部に植生を持つアメリカの河川におけるデータである. 植生密度が小さい (thin) データでは水深および川幅のいずれも理論値と良好に一致しているが, 植生密度が大きい (thick) データでは実測値の方が水深で大きく, 川幅で小さくなっていることがわかる. 植生密度の大きなデータについて植生の存在を考慮した理論値を用いて同様の比較を行ったのが図 17 である. どちらのデータも理論値と良好に一致するようになったことがわかる.

5 移動床水理学の勧め

以上, 本講義では河川における土砂輸送と地形形成という題で, 流れと移動床間の界面不安定によって生じるパターン形成の例としてガリ群の線形安定解析, 砂州の線形・非線形解析, 自律形成現象の例として自律形成河道の平衡横断面形状の理論について解説した. 流水と土砂輸送による地形形成は河川環境の見地からも重要であるばかりか, 数学的, 力学的にも魅力的な学問領域である. また流体力学の中でも特徴ある一分野を形

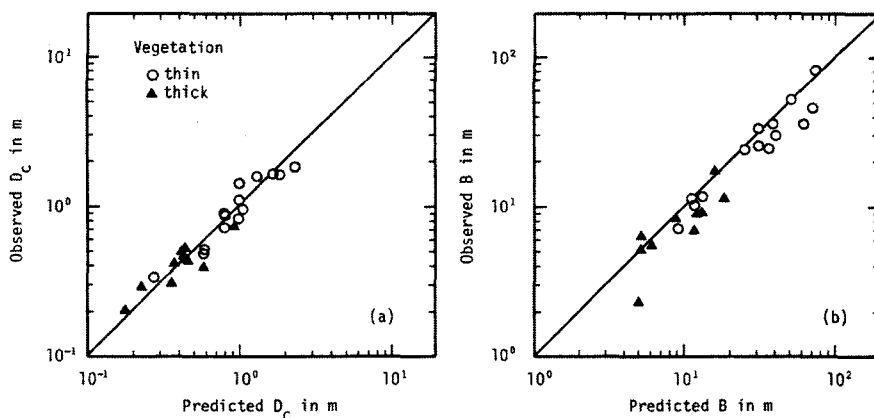


図 17: 理論値と実測値の比較. 植生の影響を考慮した場合. (a) 中央水深 D_c . (b) 川幅 B .

成しており、多分野の追従を許さない水工土木工学のお家芸的な分野であると言っても過言ではあるまい。移動床水理学の今後の発展を願いながら筆をおきたい。

参考文献

- [1] 島谷幸宏, 萱場祐一: 河川の自然環境とその特徴, 土と基礎, 45-1 (468), pp. 7-10, 1997.
- [2] Smith, T. and Bretherton, F. B.: Stability and the conservation of mass in drainage basin evolution, *Wat. Res. Res.*, Vol. 8, pp. 1506-1529, 1972.
- [3] Luke, J.: Special solutions for nonlinear erosion problems, *J. Geophys. Res.*, Vol. 79, pp. 4035-4040, 1974.
- [4] Loewenherz, D. S.: Stability and the initiation of channelized surface drainage: a reassessment of the short wavelength limit, *J. Geophys. Res.*, Vol. 96, pp. 8453-8464, 1991.
- [5] Willgoose, G., Bras, R. L., and Rodriguez-Iturbe, I.: A coupled channel network growth and hillslope evolution model. 1. Theory, *Wat. Resour. Res.*, Vol. 27, pp. 1671-1684, 1991.
- [6] Willgoose, G., Bras, R. L., and Rodriguez-Iturbe, I.: A coupled channel network growth and hillslope evolution model. 2. Nondimensionalization and applications, *Wat. Resour. Res.*, Vol. 27, pp. 1685-1696, 1991.
- [7] 泉 典洋: 水路群発生の線形安定論—斜面下流端からの発生理論—, 土木学会論文集, No. 614/II-46, pp. 65-75, 1999.
- [8] Izumi, N., and Parker, G.: Linear stability analysis of channel inception: downstream-driven theory, *J. Fluid Mech.*, Vol. 419, pp. 239-262, 2000.
- [9] 泉 典洋, 藤井健司: 粘着性の弱い細砂で構成された斜面上における水路形成の線型安定論, 土木学会論文集, No. 747/II-65, pp. 95-109, 2003.

- [10] Izumi, N. and Parker, G.: Inception of channellization and drainage basin formation: upstream-driven theory, *J. Fluid Mech.*, Vol. 283, pp. 341–363, 1995.
- [11] Montgomery, D. R. and Dietrich, W. E.: Source area, drainage density and channel initiation, *Wat. Resour. Res.*, Vol. 25, pp. 1907–1918, 1989.
- [12] Dietrich, W. E. and Dunne, T.: The channel head, In *Channel Networks Hydrology* (ed. K Berlin and M. J. Kirkby), Wiley, pp. 175–219, 1993.
- [13] Hansen, E.: The formation of meanders as a stability problem, *Basic Res. Prog. Rep.*, No. 13, Hydraul. Lab., Tech Univ. Denmark, pp. 9–13, 1967.
- [14] Callander, R. A.: Instability and river channels, *J. Fluid Mech.*, Vol. 36, pp. 465–480, 1969.
- [15] 林 泰造: 河川蛇行の成因についての研究, 土木学会論文報告集, 第 180 巻, pp. 61–70, 1970.
- [16] 鮭川 登: 河川蛇行の発生限界に関する研究, 土木学会論文報告集, 第 181 号, pp. 67–76, 1970.
- [17] Engelund, F. and Skovgaard, O.: On the origin of meandering and braiding in alluvial streams, *J. Fluid Mech.*, Vol. 57, pp. 289–302, 1973.
- [18] Parker, G.: On the cause and characteristic scales of meandering and braiding in rivers, *J. Fluid Mech.*, Vol. 76, Part 3, pp. 457–480, 1976.
- [19] Fredsøe, J.: Meandering and braiding of rivers, *J. Fluid Mech.*, Vol. 84, Part 4, pp. 609–624, 1978.
- [20] 渡邊康玄, Tubino, M.: 掃流砂・浮遊砂を伴う流れの交互砂州発生に関する研究, 水工学論文集, 第 36 巻, pp. 7–14, 1992.
- [21] 福岡捷二, 山坂昌成: 河床形状・流れ・流砂量の非線形関係を考慮した交互砂州の平衡波高の理論, 土木学会論文集, 第 357 号/II-4, pp. 45–54, 1985.
- [22] 福岡捷二, 山坂昌成, 清水義彦: 平衡形状に着目した中規模河床形態の卓越波数と形成領域区分, 土木学会論文集, 第 363 号/II-4, pp. 115–124, 1985.
- [23] Colombini, M., Seminara, G. and Tubino, M.: Finite amplitude alternate bars, *J. Fluid Mech.*, Vol. 150, pp. 150–260, 1987.
- [24] 黒木幹男, 石井千万太郎, 板倉忠興: 砂州波高に関する理論的研究, 水工学論文集, 第 36 巻, pp. 1–6, 1992.
- [25] Schielen, R., Doelman, A. and de Swart, H. E.: On the nonlinear dynamics of free bars in straight channels, *J. Fluid Mech.*, Vol. 252, pp. 325–356, 1993.
- [26] 泉 典洋, Pornprommin, A.: 振幅展開法を用いた砂州の弱非線形解析, 土木学会論文集, No. 712/II-60, pp. 73–86, 2002.
- [27] 芦田和男, 道上正規: 移動床流れの抵抗と掃流砂量に関する基礎的研究, 土木学会論文報告集, 第 206 号, pp. 59–69, 1972.
- [28] Kovacs, A. and Parker, G.: A new vectorial bedload formulation and its application to the time evolution of straight river channels, *J. Fluid Mech.*, Vol. 267, pp. 153–183, 1994.

- [29] Herbert, T.: On perturbation methods in nonlinear stability theory, *J. Fluid Mech.*, Vol. 126, pp. 167–186, 1983.
- [30] Glover, R. E. and Florey, Q. L.: Stable channel profiles, *U. S. Bur. Reclamation, Hydr.*, no. 325, 1951.
- [31] 平野宗夫: 拡幅を伴う流路変動について, 土木学会論文報告集, 第 210 号, pp. 13–20, 1973.
- [32] Parker, G.: Self-formed straight rivers with equilibrium banks and mobile bed. Part 2. The gravel river, *J. Fluid Mech.*, Vol. 89, Part 1, pp. 127–146, 1978.
- [33] 泉 典洋, 池田駿介: 側岸に樹木を有する直線礫床河川の安定横断河床形状, No. 411/II-12, pp. 151–160, 1989.
- [34] Lane, E. W.: Design of stable channels, *Trans. ASCE*, Vol. 120, pp. 1234–1279, 1955.
- [35] Egiazaroff, I. V.: Calculation of nonuniform sediment concentration, *J. Hydraul. Div., ASCE*, Vol. 91, No. HY1, pp. 1–21, 1964.
- [36] 池田駿介, Gary Parker, 千代田将明, 木村善孝: 直線礫床河川の動的安定横断形状とそのスケール, 土木学会論文集, No. 375/II-6, pp. 117–126, 1986.
- [37] シーバー, レイモンド (立石雅昭訳): 砂の科学, 東京化学同人, 240 p, 1995.
- [38] Andrews, E. E.: Bed-material entrainment and hydraulic geometry of gravel-bed rivers in *Colorado*, *Geol. Soc. America Bull.*, Vol. 95, pp. 371–378, 1984.