

水工学シリーズ 04-A-1

流出解析モデルと計算手法

北海学園大学工学部 教授

嵯 峨 浩

土木学会
水工学委員会・海岸工学委員会
2004年7月

流出解析モデルと計算手法

Runoff model and numerical calculation

嵯峨 浩

Hiroshi SAGA

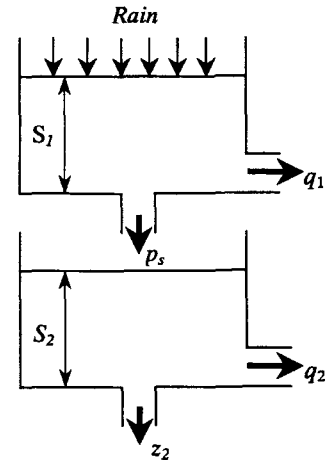
1. はじめに

一般に、集中型の流出解析モデルとして解析精度の高い木村の貯留関数法や菅原のタンクモデルが多用されている。貯留関数法は有効降雨と直接流出成分の分離作業が必要であり、タンクモデルは観測雨量・観測流量をそのまま扱うことが可能なモデルであるが、未知パラメーターの数が多くその同定には多大なる経験と労を要する。理想的な流出解析モデルとして、観測データをそのまま使い、実用上十分な解析精度を保ちながら未知パラメーターの数が少ないモデルが挙げられる。田中ら¹⁾によって考案された損失機構を含む貯留関数法をタンクモデルのように直列に並べることによって、貯留関数法とタンクモデルの長所を兼ね備えたモデルに仕上げることはできないかと考えたのが、ここで紹介する流出解析モデルである。

モデル自体は非常に単純なものであるが、その数値解法と未知パラメーターを数学的に最適化する方法を特に詳しく、時にはくどい位に記述してある。ここではモデルの構成、未知パラメーターを既定値として扱う工夫の仕方、システム方程式の数値解法および未知パラメーターの数学的最適化手法をポイントとして読んでいただければ幸いである。これらの考え方は、カルマンフィルターとカップリングした予測モデルや他の流出解析手法にも充分応用が期待できるものと考えているからである。

2. 流出解析モデル

二段タンク型貯留関数モデルを図一1 に示す。本質的な特徴は、従来のタンクモデルの側方流出孔の高さを貯留関数法の貯留効果で表現し、未知パラメーターの数を少なくしたことである。上段タンクと下段タンクの支配方程式は(1)式と(2)式で示される。



図一1 二段タンク型貯留関数モデル

$$\begin{cases} \frac{dS_1}{dt} = r - q_1 - p_s \\ S_1 = k_1 q_1^{p_1} + k_2 \frac{d}{dt}(q_1^{p_2}) \\ p_s = \alpha_1 q_1 \end{cases} \quad \cdots(1)$$

$$\begin{cases} \frac{dS_2}{dt} = p_s - q_2 - z_2 \\ S_2 = k_4 q_2 + k_5 \frac{dq_2}{dt} \\ z_2 = \alpha_2 q_2 \end{cases} \quad \cdots(2)$$

$$q = q_1 + q_2 \quad \cdots(3)$$

ここに、 $S_1 \cdot S_2$ ：貯留高 (mm)、 r ：観測雨量 (mm/hr)、 $q_1 \cdot q_2$ ：側方流出高(mm/hr)、 q ：流出高(mm/hr)、 $p_1 \cdot p_2$ ：浸透量 (mm/hr)、 $k_1 \cdot k_2 \cdot k_4 \cdot k_5$ ：貯留係数、 $\alpha_1 \cdot \alpha_2$ ：損失係数、 $p_1 \cdot p_2$ ：貯留指数である。貯留指数 p_1 、 p_2 は星⁷⁾により、流れがマニング則に従うとそれぞれ0.6および0.4648になることが知られている。したがって、決定すべき未知パラメーターは k_1 、 k_2 、 α_1 、 k_4 、 k_5 、 α_2 の6個である。貯留係数は流域面積や降雨強度などによって変化することはよく知られた事実である。未知パラメーターからこれらの影響を排除し、独立に評価するために星らの研究結果⁹⁾から次のような関係式を導入した。 c_1 、 c_2 、 c_3 が新たに導入された未知パラメーターとなる。

$$\begin{cases} k_1 = c_1 A^{0.24} \\ k_2 = c_2 k_1^2 (\bar{r})^{-0.2648} \\ c_3 = 1 + \alpha_1 \end{cases} \quad \cdots(4)$$

ここに、 A ：流域面積 (km^2)、 $\bar{r}$ ：平均降雨強度(mm/hr)

なお、観測流量 q_{ob} をそのまま扱うのが理想であるが、後述の理論展開でゼロ初期条件を必要とするので、以下のように基底流出成分を分離⁸⁾する。

$$q^*(t) = q_{ob}(t) - Q_B \exp(-\lambda t) \quad \cdots(5)$$

ここに、 Q_B ：初期流出高 (mm/hr)、 λ ：減水係数

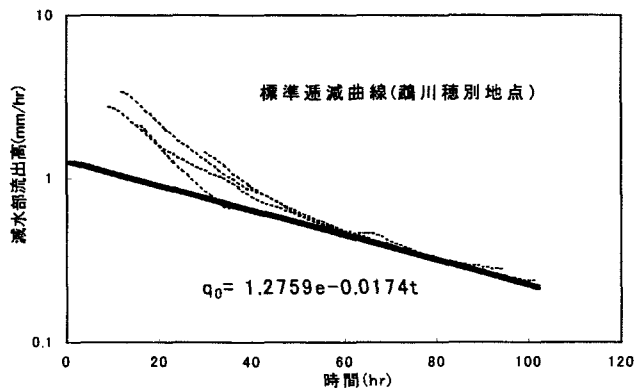
以後、(5)式の処理をした流量 q^* を実測流量として扱う。もちろん、計算後はこの基底流出成分を加えて元に戻すことを忘れてはならない。減衰係数については、以下のとおりである。

無降雨期間が長く流域内に大きな変化がない場合、ハイドログラフの減水部特性は流域固有のものである。この流出減水部を複数個、時間軸に平行移動して集めると末端部を中心に共通部分を有することが知られている。この外挿曲線を1次の標準減水曲線⁸⁾といい、次式で表される。

$$q_0(t) = Q_B \exp(-\lambda t) \quad \cdots(6)$$

ここに、 q_0 は基底流出高をあらわす。図—2 は鶴川水系穂別地点で観測された出水の減水部とそれから得られる第1次標準減水曲線である。この結果、この減水曲線は次式で与えられ、減水係数は $\lambda = 0.0174$ となる。

$$q_0(t) = 1.2759 \exp(-0.0174t) \quad \cdots(7)$$



図—2 鶴川穂別地点の減水係数

3. 数値計算手法

3.1 AR フィルター法による下段タンク未知パラメーターの推定

上述のモデルを容易に計算するためには、未知パラメーターの数を1つでも減らす方が有利である。本研究では日野・長谷部によるAR フィルター法¹²⁾の理論を二段タンク型貯留関数法に適用し、ハイドログラフ減水特性や流域特性などの情報から確定値として扱う方法を検討した。具体的には、上段タンク、下段タンクとも3個の未知パラメーターを有するが、結果的に下段タンク2つの未知パラメーターを固定し、上段タンクにおける3個および下段タンクの1個の未知パラメーター、計4個を数学的に最適化する流出モデルを構築した。

上段タンクにおける未知パラメーター c_1, c_2, c_3 の3個は数学的最適化手法により同定され、下段タンクにおける未知パラメーターの取り扱いは以下になる。

(2)式より次式の下段タンク支配方程式を得る。

$$\frac{d^2 q_2}{dt^2} + c_6 \frac{dq_2}{dt} + c_5 q_2 = c_4 p, \quad \cdots(8)$$

$$\text{ここに、} \begin{cases} c_4 = 1/k_5 \\ c_5 = (1 + \alpha_2)/k_5 \\ c_6 = k_4/k_5 \end{cases} \quad \cdots(9)$$

(8)式で示されるシステム方程式のゲイン G は次式である。

$$G = \frac{c_4}{c_5} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left\{1 - \left(\omega/\sqrt{c_5}\right)^2\right\}^2 + (c_6/c_5)^2 \cdot \omega^2}} \quad \cdots(10)$$

$\omega = 2\pi f$ として整理すると

$$G = \frac{c_4}{c_5} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left\{1 - (f/f_c)^2\right\}^2 + \delta^2 \cdot (f/f_c)^2}} \quad \cdots(11)$$

$$\text{ここに、} \begin{cases} f_c = 1/(2\pi) \cdot \sqrt{c_5} \\ \delta = c_6/\sqrt{c_5} \end{cases} \quad \cdots(12)$$

(8)式が非振動型の解を持つための条件から

$$c_6^2/4 - c_5 \geq 0, \quad \therefore c_6/\sqrt{c_5} = \delta \geq 2 \quad \cdots(13)$$

δ は無次元減衰係数で、日野・長谷部のAR フィルター理論によると2~3程度の範囲である。

一方、ハイドログラフ減水部は、次式で与えられる。

$$y(t) = y_0 \exp(-t/T_c) \quad \cdots(14)$$

y_0 は任意の流出量である。(8)式で入力 p_s が消滅し、時間が十分に経過したとき、 q_2 の変化が緩やかになって高次の微分項を無視することができる。

$$c_6 \frac{dq_2}{dt} + c_5 q_2 = 0, \quad \therefore q_2 = q_B \exp\left(-\frac{c_5}{c_6} t\right) \quad \cdots(15)$$

ここで、 q_B は y_0 と同様である。(14)式と(15)式から

$$T_c = c_6/c_5 \quad \cdots(16)$$

T_c はハイドログラフ減水曲線のうち一番低減率が小さいところの時定数である。以上より、未知パラメーター c_5, c_6 を次のように表すことができる。

$$\begin{cases} c_5 = (\delta / T_c)^2 \\ c_6 = \delta^2 / T_c \end{cases} \quad \cdots(17)$$

また、 j を虚数単位とすると(8)式の伝達関数は次式で表される。

$$H(\omega) = \frac{\int_0^\infty q_2(t) \cos \omega t dt - j \int_0^\infty q_2(t) \sin \omega t dt}{\int_0^\infty p_s(t) \cos \omega t dt - j \int_0^\infty p_s(t) \sin \omega t dt} \quad \cdots(18)$$

上式で $\omega = 2\pi f = 0$ とすると、(11)式との関係から次式が得られる。

$$c_4 / c_5 = \sum q_2(t) / \sum p_s(t) \quad \cdots(19)$$

(19)式のように、未知パラメーター c_4 と c_5 の比は解析期間内の総中間流出量と総浸透量の比で表される。自然現象の総入力と総出力の比であるから、当然

$$c_4 / c_5 = \text{Ratio} < 1 \quad \cdots(20)$$

となる。 c_5 を決定すると(20)式から c_4 も決めることができるが、*Ratio* をどの程度に見積もるかの問題が残る。ここで、 c_4 、 c_5 は、(9)式の関係があるから、

$$\text{Ratio} = c_4 / c_5 = \frac{1}{k_s} \frac{k_s}{1 + \alpha_2} = \frac{1}{1 + \alpha_2} \quad \cdots(21)$$

すなわち、下段タンクの損失係数 α_2 を数学的に最適同定すると客観的に未知パラメーターを全て決定することが可能である。

3.2 支配方程式の数値計算

(1)式および(2)式を連立して解くことが正攻法であるが、ここで一工夫して上段タンクからの浸透量 p_s は、 k_1, k_2, c_3 が指定されると一義的に決定されるので、 p_s は降雨と同様に既知量として取り扱う。その結果、上段タンクと下段タンクの支配方程式はそれぞれ独立して解くことができ、計算上非常に有利になる。特に、後述するが感度係数の伝達においては、その効果が顕著である。上段タンクの支配方程式(1)式を用いて側方流出高を求めるには、以下のような変数変換を行う。

$$y_1 = q_1^{p_2}, \quad y_2 = \frac{d}{dt}(q_1^{p_2}) \quad \cdots(22)$$

その結果、

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = y_2 \\ \frac{dy_2}{dt} = -\frac{k_1}{k_2} \frac{p_1}{p_2} y_1^{\frac{p_1-1}{p_2}} y_2 - \frac{(1+\alpha_1)}{k_2} y_1^{\frac{1}{p_2}} + \frac{r}{k_2} \end{cases} \quad \cdots(23)$$

上式の非線形連立微分方程式は、種々の数値解法を利用して解くことができるが、次に述べるように線形化して解くと便利である。特に、洪水予測においてカルマンフィルターとカップリングさせる場合等に有利である。

3.2.1 線形方程式への変換¹⁰⁾

非線形関数 $F(Y)$ をあらかじめ既知な $Y=Y^*$ において、Taylor 級数展開を用いて線形化すると、

$$\begin{aligned} F(Y) &= F(Y^*) + A(Y^*)(Y - Y^*) \\ &= A(Y^*)Y + \{F(Y^*) - A(Y^*)Y^*\} \\ &= A(Y^*)Y + B(Y^*) \end{aligned} \quad \cdots(24)$$

ここで、 $A(Y^*)$ は Jacobian 行列であり、(23)式の場合次式で示される。

$$A(Y^*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2}{\partial y_2} \end{bmatrix} \quad \cdots(25)$$

なお、 Y^* をどう扱うかという問題があるが、任意の時刻($k+1$)の Y_{k+1} を計算しようとするれば、 k 時刻の Y_k は計算済みで既知であるから、 $Y^*=Y_k$ とすべきであろう。

(23)式をマトリックス表示すると、

$$\frac{dY}{dt} = F(Y) \quad \cdots(26)$$

$$\text{ここで、} \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad F(Y) = \begin{bmatrix} f_1(y_1, y_2) \\ f_2(y_1, y_2) \end{bmatrix} \quad \cdots(27)$$

(25)式の *Jacobian* 行列の各要素を計算すると、

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} = 0 & , & \frac{\partial f_1}{\partial y_2} = 1 \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1} = -\frac{k_1}{k_2} \frac{p_1}{p_2} \left(\frac{p_1}{p_2} - 1 \right) y_1^{\frac{p_1}{p_2}-2} y_2^{\frac{1}{p_2}} - \frac{c_3}{k_2} \frac{1}{p_2} y_1^{\frac{1}{p_2}-1} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_2} = -\frac{k_1}{k_2} \frac{p_1}{p_2} y_1^{\frac{p_1}{p_2}-1} \end{cases} \quad \cdots(28)$$

$$\text{したがって、} \quad A(Y^*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2}{\partial y_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix} \quad \cdots(29)$$

$$\begin{cases} a_1 = -\frac{k_1}{k_2} \frac{p_1}{p_2} \left(\frac{p_1}{p_2} - 1 \right) y_1^{\frac{p_1}{p_2}-2} y_2^{\frac{1}{p_2}} - \frac{c_3}{k_2} \frac{1}{p_2} y_1^{\frac{1}{p_2}-1} \\ a_2 = -\frac{k_1}{k_2} \frac{p_1}{p_2} y_1^{\frac{p_1}{p_2}-1} \end{cases} \quad \cdots(30)$$

また、(24)式の $B(Y^*)$ は、

$$\begin{aligned} B(Y^*) &= F(Y^*) - A(Y^*)Y^* \\ &= \begin{bmatrix} f_1(y_1^*, y_2^*) \\ f_2(y_1^*, y_2^*) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1^* \\ y_2^* \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ d_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad \cdots(31)$$

ここに、

$$d_2 = \frac{k_1}{k_2} \frac{p_1}{p_2} \left(\frac{p_1}{p_2} - 1 \right) y_1^{\frac{p_1}{p_2}-1} y_2^{\frac{1}{p_2}} + \frac{c_3}{k_2} \left(\frac{1}{p_2} - 1 \right) y_1^{\frac{1}{p_2}} + \frac{r}{k_2} \quad \cdots(32)$$

この結果、次のようなシステム方程式を得る。このように、いかなる非線形微分方程式も、近似解として(33)式のような線形微分方程式に変換することが可能である。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ d_2 \end{bmatrix} \quad \cdots(33)$$

下段タンクの支配方程式は線形微分方程式であるので、上述のような操作をすることなしに、直ちに次式を求めることができる。

$$y_3 = q_2, \quad y_4 = \frac{dq_2}{dt} = \frac{dy_3}{dt}, \quad \frac{dy_4}{dt} = \frac{d^2 q_2}{dt^2} \quad \cdots(34)$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -c_5 & -c_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ c_4 p_s \end{bmatrix} \quad \cdots(35)$$

3.2.2 線形方程式の差分方程式への変換¹⁰⁾

(33)式、(35)式は線形微分方程式であるが、これを次のような差分方程式に変換するとプログラミングが容易になる。いま、(36)式で示される任意の1階線形微分方程式を考える。

$$\frac{dx}{dt} = ax(t) + bu(t) \quad \cdots(36)$$

ここに、 a, b はいずれも定数である。微分方程式の解は、一般解と特解からなるが(36)式の一般解は、

$$\frac{dx}{dt} = ax(t) \quad \text{より} \quad x(t) = x_0 e^{at} \quad \cdots(37)$$

である。ここで、 x_0 は $x(t)$ の初期値を示す。次に特解を $x_q(t)$ とし、 $x_q(t) = q(t)e^{at}$ を仮定すると、

$$\frac{dx_q}{dt} = q(t) \frac{de^{at}}{dt} + e^{at} \frac{dq}{dt} = ae^{at} q(t) + e^{at} \frac{dq}{dt} \quad \cdots(38)$$

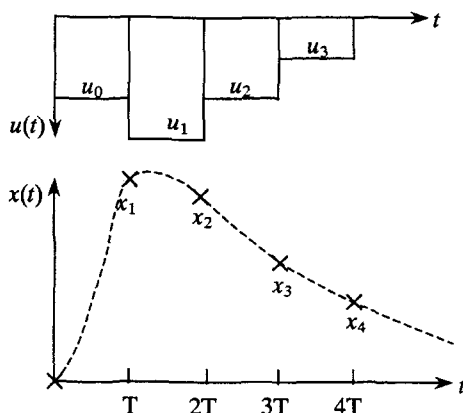
(38)式を(36)式に代入すると

$$\begin{aligned} ae^{at} q(t) + e^{at} \frac{dq}{dt} &= ae^{at} q(t) + bu(t) \\ \therefore \frac{dq}{dt} &= e^{-at} bu(t) \\ \therefore q(t) &= \int_0^t e^{-a\eta} bu(\eta) d\eta \end{aligned} \quad \cdots(39)$$

したがって、次のような(36)式の解を得る。

$$x(t) = x_0 e^{at} + e^{at} \int_0^t e^{-a\eta} u(\eta) d\eta \quad \cdots(40)$$

流出解析で入力となる降雨は、あるサンプリング間隔 T ごとの離散量であるから、(40)式ではまだ使い勝手が悪い。したがって、次の図を参考にしてこの積分形を漸化式に変換することを考える。



図—3 入力の離散化

一般解は、 $x_k = x(kT)$ として、

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 e^{at} \\ \therefore x_k &= x_0 e^{akT} \\ x_{k+1} &= x_0 e^{a(k+1)T} = x_0 e^{akT} e^{aT} = x_k e^{aT} \end{aligned} \quad \cdots(41)$$

特解は、 $u(t)$ が $0 < t < T$ において一定値であるから、 $b=1$ とすると、

$$e^{aT} \int_0^T e^{-a\eta} u(\eta) d\eta = e^{aT} u_0 \int_0^T e^{-a\eta} d\eta = u_0 a^{-1} [e^{aT} - 1] \quad \cdots(42)$$

上式を(40)式と同様に任意のサンプリング周期に拡張すると、(40)式は次式に変換されたことになる。

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \varphi x_k + \lambda u_k \\ \varphi &= e^{aT} \\ \lambda &= a^{-1} [e^{aT} - 1] \end{aligned} \quad \cdots(43)$$

(33)式および(35)式はマトリックスとなっているが、これらの式を解く場合(43)式を拡張して、次のようにすると良い。

e^{AT} は A が行列であれば、行列指数関数と呼ばれるが、その級数展開は次式となる

$$\begin{aligned} \Phi &= e^{AT} = I + AT + \frac{1}{2} A^2 T^2 + \frac{1}{6} A^3 T^3 + \cdots + \frac{1}{m!} A^m T^m \\ \Gamma &= (e^{AT} - I) A^{-1} = [I + AT + \frac{1}{2} A^2 T^2 + \frac{1}{6} A^3 T^3 + \cdots + \frac{1}{m!} A^m T^m - I] A^{-1} \\ &= T [I + \frac{1}{2} AT + \frac{1}{6} A^2 T^2 + \cdots + \frac{1}{m!} A^{m-1} T^{m-1}] \end{aligned} \quad \cdots(44)$$

すなわち、解くべき各マトリックスの要素をそれに対応する(44)式の各要素で繰り返し計算してやれば良いことになる。また、(44)式において、 A の逆行列がなくなっていることがこの方法の大きな特徴である。説明がくどいようであるが、理解を深めるため(33)式の解法の仕方を具体的に示すと次のようになる。

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}_k + \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} 0 \\ d_2 \end{bmatrix}_k \quad \cdots(45)$$

下記のように係数マトリックス $A(Y^*)$ のべき乗に注意して、 $m=5$ まで採用すると、

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix}, & A^2 &= \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_1 a_2 & a_3 \end{bmatrix}, & A^3 &= \begin{bmatrix} a_1 a_2 & a_3 \\ a_1 a_3 & a_2 a_4 \end{bmatrix} \\ A^4 &= \begin{bmatrix} a_1 a_3 & a_2 a_4 \\ a_1 a_2 a_4 & a_5 \end{bmatrix}, & A^5 &= \begin{bmatrix} a_1 a_2 a_4 & a_5 \\ a_1 a_5 & a_1 a_2 a_4 + a_2 a_5 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad \dots(46)$$

$$\text{ここで、} \quad a_3 = a_1 + a_2^2, \quad a_4 = a_1 + a_3, \quad a_5 = a_1 a_3 + a_2^2 a_4 \quad \dots(47)$$

Φ の各要素は、以下のとおりである。

$$\begin{cases} \phi_{11} = 1.0 + \frac{1}{2} a_1 T^2 + \frac{1}{6} a_1 a_2 T^3 + \frac{1}{24} a_1 a_3 T^4 + \frac{1}{120} a_1 a_2 a_4 T^5 \\ \phi_{12} = T(1.0 + \frac{1}{2} a_2 T + \frac{1}{6} a_3 T^2 + \frac{1}{24} a_2 a_4 T^3 + \frac{1}{120} a_5 T^4) \\ \phi_{21} = a_1 T(1.0 + \frac{1}{2} a_2 T + \frac{1}{6} a_3 T^2 + \frac{1}{24} a_2 a_4 T^3 + \frac{1}{120} a_5 T^4) = a_1 \phi_{12} \\ \phi_{22} = 1.0 + a_2 T + \frac{1}{2} a_3 T^2 + \frac{1}{6} a_2 a_4 T^3 + \frac{1}{24} a_5 T^4 + \frac{1}{120} a_2 (a_1 a_4 + a_5) T^5 \end{cases} \quad \dots(48)$$

また、 Γ の各要素のうち γ_{11} と γ_{21} は必要ないから、

$$\begin{cases} \gamma_{12} = T^2(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} a_2 T + \frac{1}{24} a_3 T^2 + \frac{1}{120} a_2 a_4 T^3) \\ \gamma_{22} = T(1.0 + \frac{1}{2} a_2 T + \frac{1}{6} a_3 T^2 + \frac{1}{24} a_2 a_4 T^3 + \frac{1}{120} a_5 T^4) = \phi_{12} \end{cases} \quad \dots(49)$$

以上で上段タンクの支配方程式を解法することができる。

また、下段タンクは次式において、

$$\begin{bmatrix} y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}_k + \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} 0 \\ c_4 p_s \end{bmatrix}_k \quad \dots(50)$$

$a_1 = -(\delta/T_c)^2$, $a_2 = -\delta^2/T_c$, $c_4 p_s = -Ratio \cdot a_1 \cdot p_s$ と置き換えてやると同じ計算で求めることができる。

以上より、これらのシステム方程式を解くと計算流量 q は次式となる。

$$q = q_1 + q_2 = y_1 \frac{1}{p_s} + y_3 \quad \dots(51)$$

p_s を既知量として扱う方法とそうでない場合の違いを以下に示す。

3.2.3 浸透量 p_s を伝達する意味

浸透量 p_s を既知量としない場合は、(1)式、(2)式を連立して解くことになる。これまでと同様に線形化手法を用いるとシステム方程式は次式で与えられる。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_3 & 0 & a_4 & a_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b_2 \\ 0 \\ b_4 \end{bmatrix} \quad \cdots(52)$$

ここに、

$$\begin{cases} a_1 = -\frac{k_1}{k_2} \frac{p_1}{p_2} \left(\frac{p_1}{p_2} - 1 \right) y_1^{\left(\frac{p_1-2}{p_2} \right)} y_2^{\cdot} - \frac{(1+\alpha_1)}{k_2} \frac{1}{p_2} y_1^{\left(\frac{1}{p_2}-1 \right)} \\ a_2 = -\frac{k_1}{k_2} \frac{p_1}{p_2} y_1^{\left(\frac{p_1-1}{p_2} \right)} \\ a_3 = \frac{\alpha_1}{k_5} \frac{1}{p_2} y_1^{\left(\frac{1}{p_2}-1 \right)} \\ a_4 = -\frac{(1+\alpha_2)}{k_5} \\ a_5 = -\frac{k_4}{k_5} \end{cases} \quad \cdots(53)$$

$$\begin{cases} b_2 = \frac{k_1}{k_2} \frac{p_1}{p_2} \left(\frac{p_1}{p_2} - 1 \right) y_1^{\left(\frac{p_1-1}{p_2} \right)} y_2^{\cdot} + \frac{(1+\alpha_1)}{k_2} \left(\frac{1}{p_2} - 1 \right) y_1^{\left(\frac{1}{p_2} \right)} + \frac{r}{k_2} \\ b_4 = \frac{\alpha_1}{k_5} \left(1 - \frac{1}{p_2} \right) y_1^{\left(\frac{1}{p_2} \right)} \end{cases} \quad \cdots(54)$$

一方、浸透量 p_s を既知量とする場合のシステム方程式は、既に上段タンクは(33)式、下段タンクは(35)式で示されているが、比較のため記号を変えて下段タンクのシステム方程式を再記すると次式となる。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_4 & a_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b_4' \end{bmatrix} \quad \cdots(55)$$

ここに、

$$\begin{cases} a_4 = -\frac{(1+\alpha_2)}{k_5} \\ a_5 = -\frac{k_4}{k_5} \\ b_4' = \frac{p_s}{k_5} \end{cases} \quad \cdots(56)$$

以上より、浸透量 p_s を既知とするか、しないかの相違は (dy_4/dt) の項だけであることがわかる。

(52)式の (dy_4/dt) は、

$$\begin{aligned}\frac{dy_4}{dt} &= a_3y_1 + a_4y_3 + a_5y_4 + b_4 \\ &= \frac{p_s^*}{k_5} \left\{ \frac{1}{p_2} \left(\frac{y_1}{y_1^*} - 1 \right) + 1 \right\} - \frac{(1+\alpha_2)}{k_5} y_3 - \frac{k_4}{k_5} y_4\end{aligned}\quad \cdots(57)$$

ここで、 $p_s^* (= \alpha_1 y_1^{*1/p_2})$ は 1 ステップ前の浸透量を表す。また、(55)式より

$$\begin{aligned}\frac{dy_4}{dt} &= a_4y_3 + a_5y_4 + b_4 \\ &= -\frac{(1+\alpha_2)}{k_5} y_3 - \frac{k_4}{k_5} y_4 + \frac{p_s}{k_5}\end{aligned}\quad \cdots(58)$$

(57)式と(58)式が一致するためには

$$\begin{aligned}\frac{p_s^*}{k_5} \left\{ \frac{1}{p_2} \left(\frac{y_1}{y_1^*} - 1 \right) + 1 \right\} &= \frac{p_s}{k_5} \\ \therefore p_s &= p_s^* \left\{ \frac{1}{p_2} \left(\frac{y_1}{y_1^*} - 1 \right) + 1 \right\}\end{aligned}\quad \cdots(59)$$

(59)式は、浸透量 p_s を既知量とするか、しない場合の浸透量の関係を表している。すなわち、計算過程での p_s^* の補正を予め行なっている形式になっている。また、大きな利点はそれぞれのタンクで独立にシステム方程式を立てることができるため、システム方程式と後述の感度係数マトリックスの数値計算で行列数を大きく減らすことである。特に、感度係数を求める計算ではこの効果が大きく、 p_s を既知量としない場合[16×16]のマトリックスを解くことになるが、 p_s を既知量として扱うと[6×6]と[8×8]のマトリックス演算で済むことになる。

4. モデル定数の数学的最適化手法

モデル定数を数学的に最適化する方法として、感度係数を用いた *Newton* 法を採用する。目的関数は誤差の二乗和を最小とするカイ 2 乗基準を用いると次のように定義される。

$$MinJ = \sum_{j=1}^N \frac{[q_j^* - q_j(k_1, k_2, c_3, \alpha_2)]^2}{q_j^*} = \sum_{j=1}^N e_j^2 \quad \cdots(60)$$

ここに、 q_j^* ：実測流量系列、 q_j ：計算流量系列、 e_j ：誤差系列、 N ：流量標本数である。

$e_j^{m+1} = e_j(k_1^{m+1}, k_2^{m+1}, c_3^{m+1}, \alpha_2^{m+1})$ を 1 次の項まで Taylor 級数展開すると、

$$e_j^{m+1} = e_j^m + \frac{\partial e_j^m}{\partial k_1} \Delta k_1 + \frac{\partial e_j^m}{\partial k_2} \Delta k_2 + \frac{\partial e_j^m}{\partial c_3} \Delta c_3 + \frac{\partial e_j^m}{\partial \alpha_2} \Delta \alpha_2 \quad \cdots(61)$$

$$\text{ここに、} \begin{cases} \Delta k_1 = k_1^{m+1} - k_1^m \\ \Delta k_2 = k_2^{m+1} - k_2^m \\ \Delta c_3 = c_3^{m+1} - c_3^m \\ \Delta \alpha_2 = \alpha_2^{m+1} - \alpha_2^m \end{cases} \quad \cdots(62)$$

ここで、 m は計算過程におけるステップ数を、 j は任意の流量標本数である。 $\Delta k_1, \Delta k_2, \Delta c_3, \Delta \alpha_2$ は、それぞれ未知パラメーターの最適値に対する補正値を意味する。したがって、繰り返しこれらの補正値を求め、その値がある許容基準値より小さくなることでパラメーターの最適値とすることができる。目的関数のもとに $(m+1)$ ステップの各パラメーターを算出するが、 m ステップの値は求まっているから、評価基準は次のようになる。

$$\text{Min}J = \sum_{j=1}^N \left\{ e_j^m - x_{j1}\Delta k_1 - x_{j2}\Delta k_2 - x_{j3}\Delta c_3 - x_{j4}\Delta \alpha_2 \right\}^2 \quad \cdots(63)$$

ここで、

$$\begin{cases} \frac{\partial e_j^m}{\partial k_1} = -\frac{1}{\sqrt{q^*}} \frac{\partial q_j^m}{\partial k_1} = -x_{j1} \\ \frac{\partial e_j^m}{\partial k_2} = -\frac{1}{\sqrt{q^*}} \frac{\partial q_j^m}{\partial k_2} = -x_{j2} \\ \frac{\partial e_j^m}{\partial c_3} = -\frac{1}{\sqrt{q^*}} \frac{\partial q_j^m}{\partial c_3} = -x_{j3} \\ \frac{\partial e_j^m}{\partial \alpha_2} = -\frac{1}{\sqrt{q^*}} \frac{\partial q_j^m}{\partial \alpha_2} = -x_{j4} \end{cases} \quad \cdots(64)$$

上式において、 $\left(\frac{\partial q_j^m}{\partial k_1} \right), \left(\frac{\partial q_j^m}{\partial k_2} \right), \left(\frac{\partial q_j^m}{\partial c_3} \right), \left(\frac{\partial q_j^m}{\partial \alpha_2} \right)$ は各パラメーターの計算流量に及ぼす影響を表しており、感度係数と呼ばれる。つまりパラメーターの影響度合いを考慮しながら計算を進めて行くことになり、収束を早めることが可能である。最小化は、(63)式を各パラメーターで偏微分して0とおけば良い。その結果を示す。

$$\begin{bmatrix} \sum_{j=1}^N x_{j1}^2 & \sum_{j=1}^N x_{j1}x_{j2} & \sum_{j=1}^N x_{j1}x_{j3} & \sum_{j=1}^N x_{j1}x_{j4} \\ \sum_{j=1}^N x_{j2}x_{j1} & \sum_{j=1}^N x_{j2}^2 & \sum_{j=1}^N x_{j2}x_{j3} & \sum_{j=1}^N x_{j2}x_{j4} \\ \sum_{j=1}^N x_{j3}x_{j1} & \sum_{j=1}^N x_{j3}x_{j2} & \sum_{j=1}^N x_{j3}^2 & \sum_{j=1}^N x_{j3}x_{j4} \\ \sum_{j=1}^N x_{j4}x_{j1} & \sum_{j=1}^N x_{j4}x_{j2} & \sum_{j=1}^N x_{j4}x_{j3} & \sum_{j=1}^N x_{j4}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta k_1 \\ \Delta k_2 \\ \Delta c_3 \\ \Delta \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^N e_j^m x_{j1} \\ \sum_{j=1}^N e_j^m x_{j2} \\ \sum_{j=1}^N e_j^m x_{j3} \\ \sum_{j=1}^N e_j^m x_{j4} \end{bmatrix} \quad \cdots(65)$$

複雑そうであるが、各要素を次のようなマトリックスで定義すると簡単な表現となる。

$$\left\{ \begin{array}{l} E = [e_1 \quad e_2 \quad \cdots \quad e_j \quad \cdots \quad e_N]^T \\ W_1 = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{j1} & x_{j2} & x_{j3} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{N1} & x_{N2} & x_{N3} \end{bmatrix} \\ W_2 = [x_{14} \quad x_{24} \quad \cdots \quad x_{j4} \quad \cdots \quad x_{N4}]^T \\ \Delta K_1 = [\Delta k_1 \quad \Delta k_2 \quad \Delta c_3]^T, \quad \Delta K_2 = [\Delta \alpha_2] \end{array} \right. \quad \cdots(66)$$

$$\begin{bmatrix} (W_1^T \ W_1) & (W_1^T \ W_2) \\ (W_2^T \ W_1) & (W_2^T \ W_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta K_1 \\ \Delta K_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_1^T E \\ W_2^T E \end{bmatrix} \quad \cdots(67)$$

$$\therefore \begin{bmatrix} \Delta K_1 \\ \Delta K_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (W_1^T \ W_1) & (W_1^T \ W_2) \\ (W_2^T \ W_1) & (W_2^T \ W_2) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} W_1^T E \\ W_2^T E \end{bmatrix} \quad \cdots(68)$$

ここで、 T は転置記号である。(68)式を解くにあたり、(69)式が成立した時、すなわち未知パラメータ一の補正值が十分小さくなったと判断された時収束とする。一般には、 ε は1%あるいは0.1%程度にとれば十分である。

$$\varepsilon > \left| \frac{\Delta K_j}{K_j} \right|_{(j=1,2)} \quad \cdots(69)$$

なお、本研究では *Cholesky* 法を用いて、 ΔK_j を効率良く算定できる成分回帰手法を併用した。なお、この手法については、参考文献 11) に詳しいので参照していただきたい。

5. 感度係数の算出

(64)式の感度係数 $\left(\frac{\partial q}{\partial K_1}\right), \left(\frac{\partial q}{\partial K_2}\right)$ を求めるためには、次式示されるように $\left(\frac{\partial y_1}{\partial K_1}\right), \left(\frac{\partial y_3}{\partial K_1}\right), \left(\frac{\partial y_3}{\partial K_2}\right)$ を算出すれば良い。

$$\begin{cases} \frac{\partial q}{\partial K_1} = \frac{\partial q_1}{\partial K_1} + \frac{\partial q_2}{\partial K_1} = \frac{1}{p_2} y_1^{\left(\frac{1}{p_2}-1\right)} \frac{\partial y_1}{\partial K_1} + \frac{\partial y_3}{\partial K_1} \\ \frac{\partial q}{\partial K_2} = \frac{\partial q_1}{\partial K_2} + \frac{\partial q_2}{\partial K_2} = \frac{\partial y_3}{\partial K_2} \end{cases} \quad \dots(70)$$

上段タンクからの浸透量 p_s は $p_s(k_1, k_2, c_3)$ となるので、(35)式からも明らかなように y_3 と y_4 も未知パラメーター(k_1, k_2, c_3)の変化に対応して変化する。また、下段タンクの損失係数 α_2 も最適化の対象としたため、 $y_3(k_1, k_2, c_3, \alpha_2), y_4(k_1, k_2, c_3, \alpha_2)$ となる。

上段タンクの感度係数ベクトルは、(33)式で示される支配方程式と、未知パラメーターは dt 時間内に変化しないとすると、

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial y_1}{\partial k_1} \right) = \frac{\partial}{\partial k_1} \left(\frac{\partial y_1}{\partial t} \right) = \frac{\partial y_2}{\partial k_1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial y_1}{\partial k_2} \right) = \frac{\partial}{\partial k_2} \left(\frac{\partial y_1}{\partial t} \right) = \frac{\partial y_2}{\partial k_2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial y_1}{\partial c_3} \right) = \frac{\partial}{\partial c_3} \left(\frac{\partial y_1}{\partial t} \right) = \frac{\partial y_2}{\partial c_3}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial y_2}{\partial k_1} \right) = \frac{\partial}{\partial k_1} \left(\frac{\partial y_2}{\partial t} \right) = a_1 \frac{\partial y_1}{\partial k_1} + a_2 \frac{\partial y_2}{\partial k_1} + \frac{\partial a_1}{\partial k_1} y_1 + \frac{\partial a_2}{\partial k_1} y_2 + \frac{\partial d_2}{\partial k_1} = a_1 \frac{\partial y_1}{\partial k_1} + a_2 \frac{\partial y_2}{\partial k_1} + g_1$$

ここに、

$$\begin{cases} \frac{\partial a_1}{\partial k_1} = -\frac{1}{k_2} \frac{p_1}{p_2} \left(\frac{p_1}{p_2} - 1 \right) y_1^{\frac{p_1-2}{p_2}} y_2 \\ \frac{\partial a_2}{\partial k_1} = -\frac{1}{k_2} \frac{p_1}{p_2} y_1^{\frac{p_1-1}{p_2}} \\ \frac{\partial d_2}{\partial k_1} = \frac{1}{k_2} \frac{p_1}{p_2} \left(\frac{p_1}{p_2} - 1 \right) y_1^{\frac{p_1-2}{p_2}} y_2 \\ \therefore g_1 = -\frac{1}{k_2} \frac{p_1}{p_2} y_1^{\frac{p_1-1}{p_2}} \end{cases}$$

同様に、

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial y_2}{\partial k_2} \right) = a_1 \frac{\partial y_1}{\partial k_2} + a_2 \frac{\partial y_2}{\partial k_2} + g_2$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial y_2}{\partial c_3} \right) = a_1 \frac{\partial y_1}{\partial c_3} + a_2 \frac{\partial y_2}{\partial c_3} + g_3$$

したがって、

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial k_1} \\ \frac{\partial y_1}{\partial k_2} \\ \frac{\partial y_1}{\partial c_3} \\ \frac{\partial y_2}{\partial k_1} \\ \frac{\partial y_2}{\partial k_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial c_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline a_1 & 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & 0 & 0 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial k_1} \\ \frac{\partial y_1}{\partial k_2} \\ \frac{\partial y_1}{\partial c_3} \\ \frac{\partial y_2}{\partial k_1} \\ \frac{\partial y_2}{\partial k_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial c_3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix} \quad \cdots(71)$$

$$\text{ここに、} \begin{cases} g_1 = -\frac{1}{k_2} \frac{p_1}{p_2} y_1^{\frac{p_1-1}{p_2}} \\ g_2 = \frac{1}{k_2^2} \left(k_1 \frac{p_1}{p_2} y_1^{\frac{p_1-1}{p_2}} + c_3 y_1^{\frac{1}{p_2}} - r \right) \\ g_3 = -\frac{1}{k_2} y_1^{\frac{1}{p_2}} \end{cases} \quad \cdots(72)$$

$G_2 = [g_1 \ g_2 \ g_3]^T$ として、マトリックス表示すると

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial K_1} \\ \frac{\partial y_2}{\partial K_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_1 \\ \hline a_1 \mathbf{I}_1 & a_2 \mathbf{I}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial K_1} \\ \frac{\partial y_2}{\partial K_1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_1 \\ G_2 \end{bmatrix} \quad \cdots(73)$$

ここで、 $\mathbf{0}$ は $[3 \times 3]$ のゼロ行列、 $\mathbf{0}_1$ は $[3 \times 1]$ のゼロ行列、 $\mathbf{I}_1$ は $[3 \times 3]$ の単位行列である。

下段タンクの感度係数は、(73)式と同じように表示すると(74)式ようになる。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \frac{\partial y_3}{\partial K_1} \\ \frac{\partial y_3}{\partial K_2} \\ \frac{\partial y_4}{\partial K_1} \\ \frac{\partial y_4}{\partial K_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_2 & \mathbf{I}_2 \\ -c_5 \mathbf{I}_2 & -c_6 \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial y_3}{\partial K_1} \\ \frac{\partial y_3}{\partial K_2} \\ \frac{\partial y_4}{\partial K_1} \\ \frac{\partial y_4}{\partial K_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3 \\ c_4 \frac{\partial p_s}{\partial K_1} \\ g_8 \end{bmatrix} \quad \cdots(74)$$

$$g_8 = -\frac{c_5 p_s}{(1 + \alpha_2)^2} = -c_5 p_s \text{Ratio}^2 \quad \cdots(75)$$

ここで、 $\mathbf{0}_2$ は $[4 \times 4]$ のゼロ行列、 $\mathbf{0}_3$ は $[4 \times 1]$ のゼロ行列、 $\mathbf{I}_2$ は $[4 \times 4]$ の単位行列である。 q に関する感度係数は上式を解き(70)式に従って計算すれば良い。

(74)式のように、上段タンクの未知パラメーターの影響を浸透量の感度係数 $[c_4 \cdot \partial p_s / \partial K_1]$ によって下段タンクに伝達することで計算を容易にさせ、収束性を向上させることができる。この方法は河道洪水追跡手法や他の最適化手法にも適用が有効な計算手法である。

(73)式および(74)式の解法は、(33)式および(35)式のシステム方程式と同形式であるので、次のように変換される。

$$U_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial k_1} & \frac{\partial y_1}{\partial k_2} & \frac{\partial y_1}{\partial c_3} & \frac{\partial y_2}{\partial k_1} & \frac{\partial y_2}{\partial k_2} & \frac{\partial y_2}{\partial c_3} \end{bmatrix}^T \text{ とすると、}$$

$$U_{1,k+1} = \Phi_1 U_{1,k} + \Gamma_1 G_k \quad \cdots(76)$$

ここに、

$$\Phi_1 = \begin{bmatrix} \phi_{11} & 0 & 0 & \phi_{12} & 0 & 0 \\ 0 & \phi_{11} & 0 & 0 & \phi_{12} & 0 \\ 0 & 0 & \phi_{11} & 0 & 0 & \phi_{12} \\ \phi_{21} & 0 & 0 & \phi_{22} & 0 & 0 \\ 0 & \phi_{21} & 0 & 0 & \phi_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \phi_{21} & 0 & 0 & \phi_{22} \end{bmatrix} \quad \cdots(77)$$

$$\Gamma_1 = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & 0 & 0 & \gamma_{12} & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_{11} & 0 & 0 & \gamma_{12} & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_{11} & 0 & 0 & \gamma_{12} \\ \hline \gamma_{21} & 0 & 0 & \gamma_{22} & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_{21} & 0 & 0 & \gamma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_{21} & 0 & 0 & \gamma_{22} \end{bmatrix} \quad \cdots(78)$$

各係数は、システム方程式を解いた時とまったく同一であり、容易に感度係数を求めることが可能である。下段タンクもまったく同様に

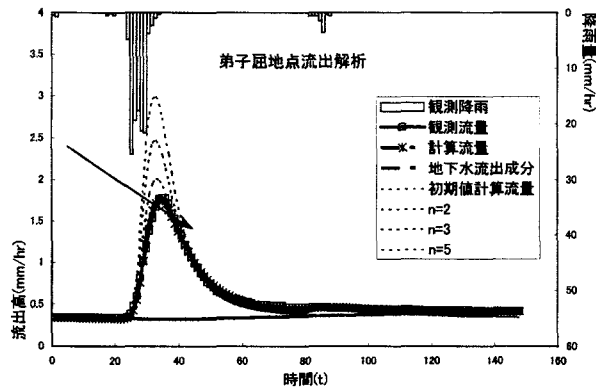
$$U_2 = \left[\frac{\partial y_3}{\partial k_1} \quad \frac{\partial y_3}{\partial k_2} \quad \frac{\partial y_3}{\partial c_3} \quad \frac{\partial y_3}{\partial \alpha_2} \quad \frac{\partial y_4}{\partial k_1} \quad \frac{\partial y_4}{\partial k_2} \quad \frac{\partial y_4}{\partial c_3} \quad \frac{\partial y_4}{\partial \alpha_2} \right]^T$$

$$D_k = \left[c_4 \frac{\partial p_s}{\partial k_1} \quad c_4 \frac{\partial p_s}{\partial k_2} \quad c_4 \frac{\partial p_s}{\partial c_3} \quad g_8 \right]$$

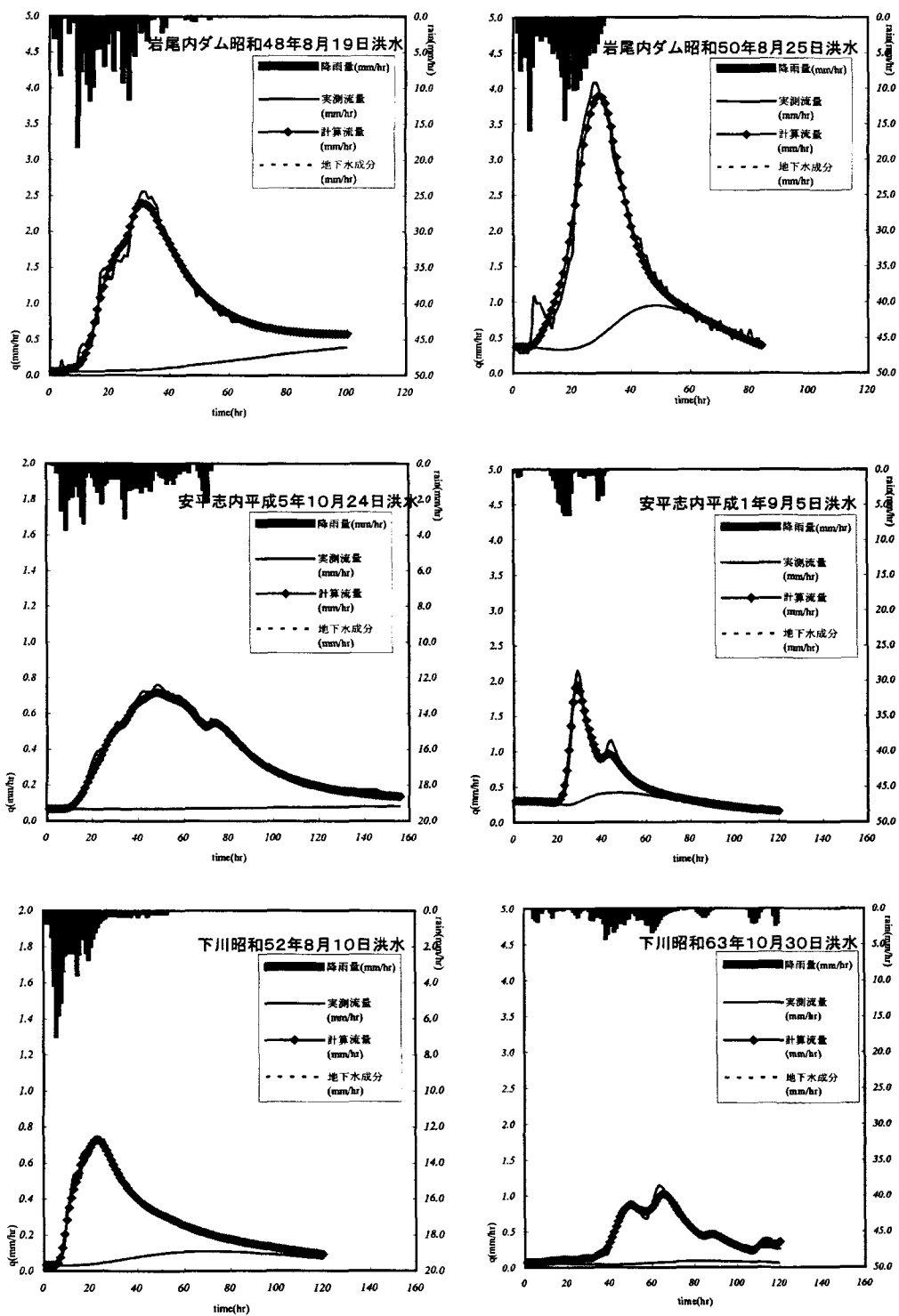
とすると、感度係数は次式で与えられる。

$$U_{2,k+1} = \Phi_2 U_{2,k} + \Gamma_2 D_k \quad \cdots(79)$$

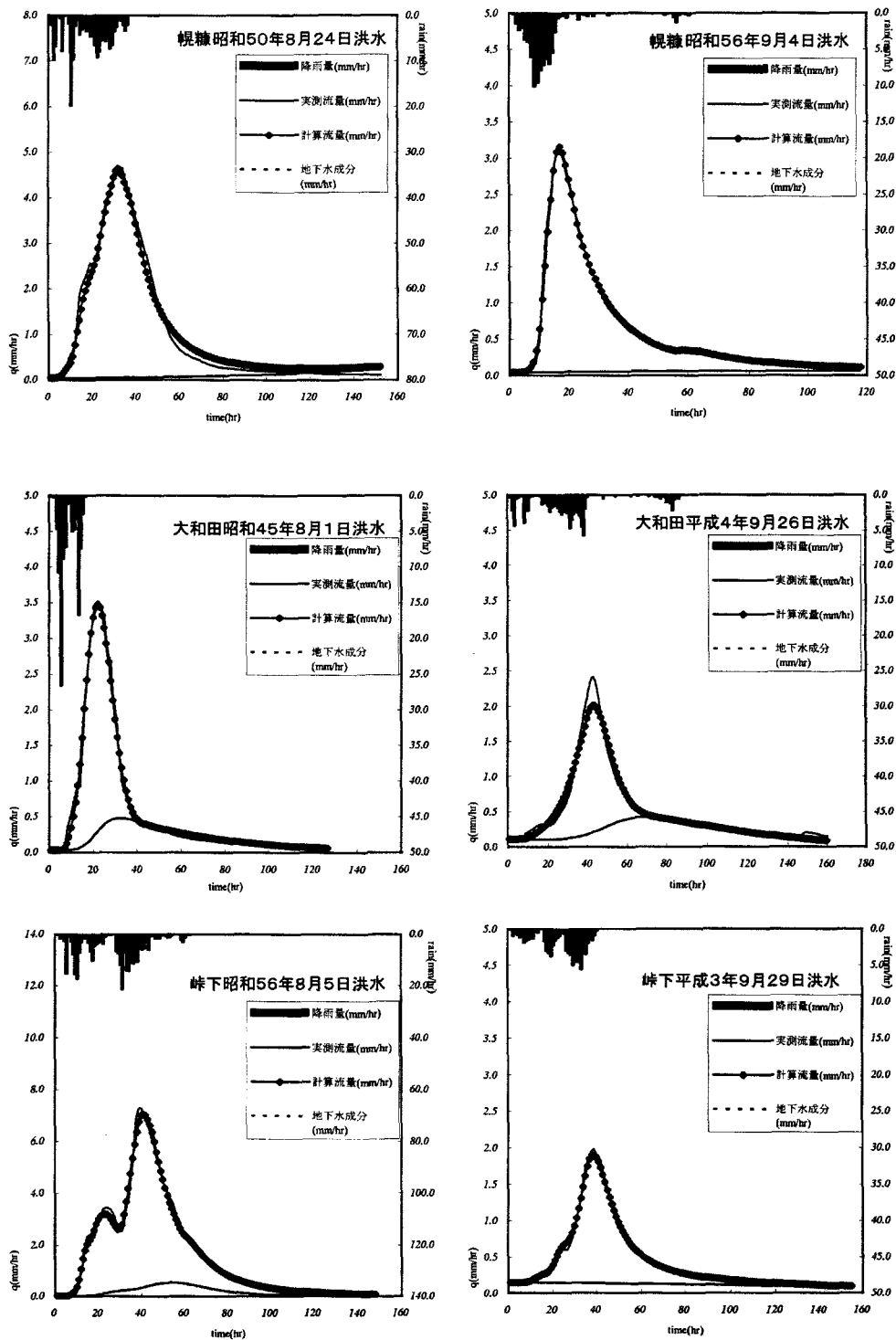
図—4 は釧路川水系弟子屈地点における流出解析結果であり、今まで述べてきた理論を使って未知パラメーターを最適化する過程を表したものである。繰り返し回数は5回ほどであるが、初期値の与え方や収束基準値によってかなりこの回数は異なる。また、発散を防ぐため刻みを小さくする等細かな計算上のテクニックがあるが、一般には最大でも70～80回で収束する。このモデルを使用して、北海道内一級河川13水系のおよそ460例の流出解析を行った結果、 $\varepsilon=1\%$ で84.3%の解析が収束している。天塩川および留萌川水系の流出解析結果を図—5と図—6に示す。



図—4 流出解析の収束過程



図—5 天塩川水系の流出解析結果



図—6 留萌川水系の流出解析結果

水系ごとに最適同定された未知パラメーターの平均値を表―1 に示す。未知パラメーター c_1 、 c_2 、 c_3 、*Ratio* の値である。このモデルを使う時、観測データのない小流域のパラメーターの目安として、あるいは初期値として用いると良いであろう。

表―1 水系別未知パラメーターの平均値

	C_1	C_2	C_3	<i>Ratio</i>
石狩川水系	10.061	0.159	2.354	0.378
尻別川水系	11.446	0.699	2.258	0.414
後志利別川水系	6.930	0.506	2.007	0.570
留萌川水系	9.296	0.260	1.362	0.545
天塩川水系	9.471	0.489	2.458	0.477
鶴川水系	11.461	0.354	2.353	0.468
沙流川水系	10.215	0.164	1.399	0.489
渚滑川水系	12.549	0.177	2.122	0.405
湧別川水系	10.844	0.200	2.077	0.354
常呂川水系	11.532	0.327	2.500	0.467
網走川水系	17.003	0.077	4.498	0.275
十勝川水系	14.951	0.127	2.227	0.405
釧路川水系	20.106	0.077	3.052	0.381
13 水系の平均値	11.990	0.213	2.359	0.433

6. 終わりに

このモデルを考案した当初、6 個の未知パラメーターを最適化していたが、収束性が悪く実用性に疑問を抱くものであった。その打開策として日野・長谷部らによる AR フィルター理論を参考に、下段タンクの未知パラメーターを確定値として扱う手法を考えた。その結果、下段タンクの未知パラメーター数を減らすことができ、収束性の向上でこのモデルの応用範囲がかなり広まったと考えている。また、それぞれのタンクにおけるシステム方程式を線形化し、さらに漸化式に変換する方法を詳しく述べた。この方法はプログラミングにおいて、かなり効果を発揮するものと考えられるし、他の非線形微分方程式を解く時に有効な方法である。理解を深めるため一般的な表現より、よりわかり易い具体的な数式で表現することを心がけたが、煩わしいと思わずに一度自分で各数式を誘導することをお勧めしたい。

最後に、この一連の研究は(財)北海道河川防災研究センター・研究所長・星清氏のご指導と貴重なアドバイスを受けて行なわれたものである。末筆ながらここに感謝の意を表します。

参考文献

- 1) 田中、藤田、清水：損失機構を含む貯留関数法に関する研究、北海道支部論文報告集、第 53 号(B)、pp.54-59、1997.
- 2) 八田、藤田、山梨：損失を考慮した不飽和浸透流理論の集中化、土木学会論文集、Vol.600、No.II-44、pp.11-21、1998.
- 3) 八田：山地流域における流出過程のモデル化とその応用に関する研究、北海道大学博士論文、1998
- 4) 嵯峨、星、橋本：貯留関数法を組み込んだタンクモデルによる流出解析、北海道支部論文報告集、第 54 号(B)、pp.30-33、1998.
- 5) 佐藤、嵯峨、馬場、星：損失機構を含む貯留関数法を応用したタンクモデルの提案、第 54 回年講演概要集、第 2 部、pp.634-635、1999.
- 6) Saga, Hoshi and Hashimoto: *A new tank model coupled with the storage routing method*, XX Nordic hydrological conference report. No.44、pp.605-614、1998.
- 7) 星、山岡：雨水流法と貯留関数法の相互関係、第 26 回水理講演会論文集、pp.273-278、1982.
- 8) 吉川、砂田、グエン：洪水流量逓減曲線の特性を考慮した流出モデルに関する研究、土木学会論文報告集、第 283 号、pp.23-32、1979.
- 9) 馬場、星、藤田：蒸発散および浸透を組み合わせた二段貯留関数型流出モデルの開発、水文・水資源学会誌、Vol.14、No.5、pp.364-375、2001.
- 10) 若手水文学研究会：現場のための水文学、北海道開発局開発土木研究所、1994.
- 11) 星清：成分回帰分析手法、北海道開発局土木試験所月報、No.397、1986.
- 12) 日野、長谷部：水文流出解析、森北出版
- 13) 馬場、星、橋本：損失機構を組み合わせた貯留関数モデルの総合化、水工学論文集、第 43 巻、pp.1085-1090、1999.
- 14) 佐々木、星、井出：損失項を含む総合化貯留関数法の開発、北海道開発局開発土木研究所研究報告書、2000.
- 15) 高坂、嵯峨、星、橋本：北海道地方における二段タンク型貯留関数モデルによる流出解析、北海道支部論文報告集、第 58 号、pp.340-343、2002.
- 16) 嵯峨、高坂、星、橋本：二段タンク型貯留関数モデルの未知定数推定に関する研究、北海道支部論文報告集、第 58 号、pp.344-347、2002.
- 17) 高坂、嵯峨、星、橋本：二段型貯留関数モデルの未知パラメータ総合化に関する一考察、北海道支部論文報告集、第 59 号、pp.446-449、2003.