

水工学シリーズ02-A-2

河川流のモデリングと河床・河道変動解析の進歩

京都大学大学院工学研究科 教授

細 田 尚

土木学会
水理委員会・海岸工学委員会
2002年9月

河川流のモデリングと河床・河道変動解析の進歩

Progress on Numerical Analysis of River Flows and River Channel Processes

細田 尚
Takashi HOSODA

1. はじめに

河川の流れと河床・河道変動の解析法に関する研究は、治水計画、河道計画を策定するために、洪水時の水位予測、河道湾曲部や河川構造物周辺の河床洗掘深の予測、安定（平衡）河道の設計などが必要であるため、水工学の主要な分野として古くから精力的に研究が行われてきた。本水工学シリーズにおいても、第1回（1964）の開水路流れの基礎理論（岩佐義朗、当時京都大学教授）及び河床変動論（吉川秀夫、当時建設省土木研究所河川部長）以後数多くのレビューと講義が行われている。

研究の方法も、実河川での現象の観測、現象の諸特性の解明を目的とした実験的または理論的研究、現象を再現・予測するための数値解析の研究など多岐にわたっている。最近では、近年のコンピュータのハード的及びソフト的な目覚ましい進歩を反映して、計算結果のコンピュータ・グラフィックスも含めた数値解析の研究が主流となっている。一方、河川流と河床・河道変動のモデリング、非線形解析などの数理水文学的研究の発展も著しく、古くから研究されている分野でありながら、今後の益々の進歩が期待されている。

本稿では、河川流と河床・河道変動のモデリング及び数値解析法について、最近の進歩を踏まえて体系的に講述する。

2. 河川流のモデリング

河床・河道変動は流れによる土砂輸送の結果として生じ、発生した河床・河道形態の変化が抵抗則など流れの構造にフィードバックする。例えば、洪水の増水期に砂堆が発生しその波高が増加することで流れの抵抗が増加するが、さらに流量が増加すると河床形態が砂堆から平坦河床になることで抵抗が急に減少する現象などが知られている¹⁾。

流れと土砂の相互作用として、河床を転動、滑動、サルテーションの形態で流送される掃流砂や、流れの中を浮遊状態で輸送される浮遊砂と流れの相互作用を考慮した混相流としての取り扱いが必要な場合もあるが^{2,3)}、通常の河川流と河床変動解析では固液間及び固相間の相互作用は無視されることが多いため、本稿でも河床・河道形状の変化が流れに及ぼす効果以外の相互作用は取り扱わない。

河川流のモデリングは、大別すると断面積分または水深積分型モデルと3次元解析モデルに分類される。前者は、対象としている河川区間が非常に長く、またその途中で瀬や淵などが存在し流れが急激に変化するため、3次元の運動方程式などを断面内または水深方向に積分することで導かれる積分型の基礎式を用いる方法で、水深積分の場合は平面2次元モデルとも呼ばれる。積分の際に、流速分布の相似性などが仮定される。また、乱流のモデルとして水深積分型 $k-\epsilon$ モデルなどを用いる場合もあるが、実用的には経験的な0-方程式モデルを用いることが多い。

水深積分型モデルは3次元の基礎式を積分する際に用いられる仮定によって詳細に分類され、対象とする現象によって使い分けられる。近年、積分型モデルの理論が進展したが、流れの3次元性を水深積分の過程でできるだけ考慮しようとするためモデルが非常に複雑になる場合があり、水深積分 vs 3次元解析の使い分けが最近の研究課題になっている。

2. 1 流れの積分型モデルの分類

水深積分型モデルを誘導する際に用いられる仮定の分類と、対象とする現象に応じた仮定の組み合わせを例を表-1に示す。

表-1中、項目4)圧力分布の鉛直加速度を考慮する場合のモデリングについては、ブシネスク方程式とその修正について主として海岸工学の分野で多くの研究がある。

表-1 水深積分型モデルの分類

1) 時間 a. 定常, b. 非定常
2) 空間積分 a. 断面 (1 次元), b. 水深方向 (平面 2 次元), c. 横断方向 (鉛直 2 次元)
3) 座標系の設定 a. 基準水平面上の直角座標系, b. 基準水平面上の (移動) 一般座標系, c. 任意曲面上に設定された一般座標系
4) 圧力分布 a. 静水圧, b. 鉛直加速度考慮 (原型 or 修正ブシネスク方程式), c. 曲面の曲がりによる遠心力
5) 流速分布及び底面せん断応力の評価 a. 主流流速分布の一様性または自己相似性, b. 主流流速分布の局所的変化をモデル化して考慮, c. 流線湾曲の効果を考慮 (湾曲の 2 次流による運動量輸送, 2 次流の発達過程を無視 or 考慮)
6) 乱流モデル a. 経験的 0-方程式モデル, b. 水深積分型非線形 $k-\varepsilon$ モデル
7) 積分する層の数 (三層以上は三次元に分類) a. 平面一層モデル, b. 平面二層モデル
8) 開水路流れと圧力流れが混在 (境界面の移動の取り扱い)

とその修正について主として海岸工学の分野で多くの研究がある。

2. 2 水深または断面積積分型モデルの適用例

表-1 の項目の組み合わせと、取り扱うことのできる現象について典型的な例を示しながら説明する。河床・河道変動解析と流れ解析の組み合わせについては後述する。

(1) 開水路非定常流の 1 次元解析

(非定常, 断面積分, 基準水平面上の直角座標, 静水圧, 流速分布の相似性, 経験的 0-方程式モデル)

基礎式は連続式と運動量保存則で構成され, 一般断面の場合次のように表される (図-1 参照)。

$$[\text{連続式}] \quad \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

$$[\text{運動量式}] \quad \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial UQ}{\partial x} + gA \frac{\partial z_s}{\partial x} = -gA \frac{\tau_{bx}}{\rho g R} + \frac{\partial (-u'^2 A)}{\partial x} \quad (2)$$

ここに, t : 時間, x : 空間座標, Q : 流量, A : 流水断面積, U : 断面平均流速, z_b : 基準水平面からの路床高さ, z_s : 基準水平面からの水位, R : 径深, τ_{bx} : 路床に作用する応力ベクトルの x -方向成分, g : 重力加速度, u' : 乱れ速度, ρ : 流体の密度。また, 運動量係数は 1 としている。

底面せん断応力は通常次式のマニング則を用いて評価される。

$$\frac{\tau_{bx}}{\rho} = \frac{gn^2 U |U|}{R^{1/3}} \quad (3)$$

ここに、 n ：マニングの粗度係数。

河川洪水流やダム破壊流れなど、種々の開水路非定常流のに適用されてきた。以前は保存則系で表示された基礎式をサン・ブナンの式に変換するなどした後、固定格子点の特性曲線法を用いて数値計算されることが多かったが、現在では保存則系の運動量方程式を直接離散化して数値解析することがほとんどである。跳水や段波も再現できる。ただし、境界条件の考え方や段波の不連続部で数値振動を生じない差分スキーム（TVD スキーム）を構成する際に特性曲線法による定式化は不可欠である⁴⁻⁶⁾。

図-2 は、流れ込み発電所導水路内でスルース・ゲートを急開したときに生じる非定常流の計算結果を示す⁷⁾。

(2) 波状段波・波状跳水の1次元解析

（定常・非定常、断面・水深積分、基準水平面上の直角座標、鉛直加速度考慮、流速分布の相似性、経験的0-方程式モデル）

基礎式は連続式と圧力分布に鉛直加速度を考慮した運動量方程式(原型ブシネスク方程式)で構成される。たとえば、路床が平坦な場合の単位幅での運動量方程式は下記のようなになる(座標系は図-1 参照)^{8,9)}。

$$\begin{aligned} \frac{\partial U h}{\partial t} + \frac{\partial U^2 h}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[g \frac{h^2}{2} + \frac{h}{3} \left\{ h \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} + 2hU \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial t} + hU^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - U \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial t} + h \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial t} - U^2 \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \right\} \right] \\ = - \frac{\tau_{bx}}{\rho} + \frac{\partial (-u'^2 h)}{\partial x} \end{aligned} \quad (4)$$

時間微分項を省略すれば定常状態での運動量方程式となり、適当な境界条件のもとで水面形解析を行えば、図-3 のような波状跳水の水面形が再現される¹⁰⁾。

原型ブシネスク方程式(4)は、流速分布の一意性を仮定して鉛直方向の運動方程式から圧力分布を導き、それを流れ方向の運動量式に代入して導かれる。水の波に適用すると高波数領域で微小振幅波の分散関係と適合性しないため、海岸工学の分野で改良型ブシネスク方程式に関する数多くの研究が行われている¹¹⁻¹³⁾。

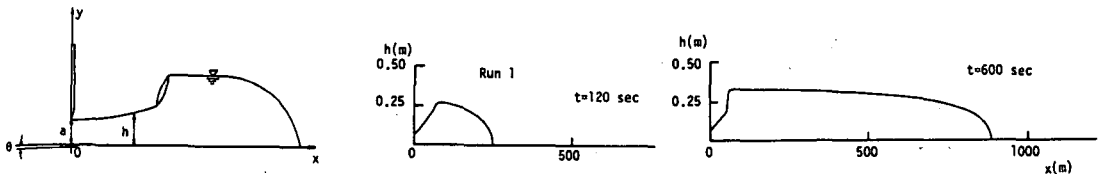


図-2 スルース・ゲート急開時の非定常流と跳水の形成過程

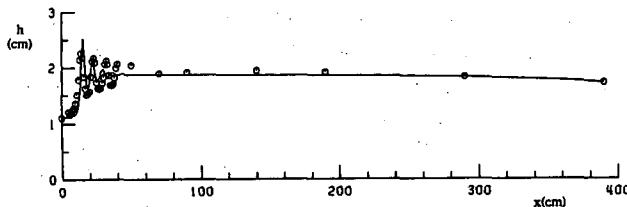


図-3 ブシネスク方程式による波状跳水の水面形解析

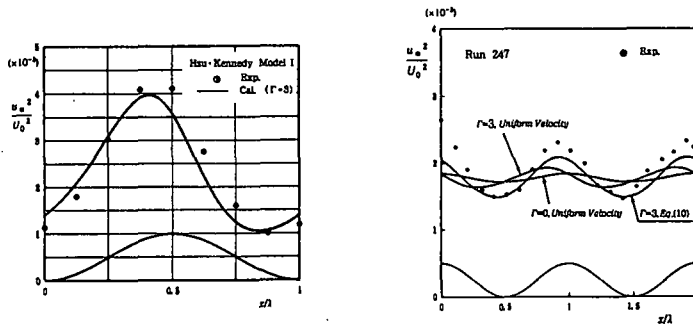


図4 水深積分モデルによる底面せん断応力の評価

(3) 波状路床上の流れ

(定常・非定常, 水深積分, 基準水平面上の直角座標, 鉛直加速度考慮, 主流流速分布の局所的变化をモデル化して考慮, 経験的0-方程式モデル)

波状路床の流れは, 小規模や中規模河床波上の流れを単純化したモデルとして, 古くから水深積分モデルや多次元モデルを用いて研究が行われてきた¹⁴⁻²⁰⁾. 小規模河床波の空間スケールを想定した場合, 鉛直加速度を無視できないため, 水深積分モデルを用いる場合には上述したブシネスク方程式がその基礎式となる. 定常状態での波状路床上の運動量方程式は次式となる. (詳細は参考文献を参照のこと.)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\frac{q^2}{h} \right) + \frac{d}{dx} \left(\frac{gh^2}{2} \cos \theta \right) - \frac{d}{dx} \left\{ \frac{q^2}{3h} \left(\frac{dh}{dx} \right)^2 \right\} + \frac{d}{dx} \left(\frac{q^2}{3} \frac{d^2 h}{dx^2} \right) - \frac{d}{dx} \left(\frac{q^2}{2h} \frac{dh}{dx} \frac{dz_b}{dx} \right) + \frac{d}{dx} \left(\frac{q^2}{2} \frac{d^2 z_b}{dx^2} \right) \\ + \frac{dz_b}{dx} \left\{ gh \cos \theta - \frac{U^2}{2} \left(\frac{dh}{dx} \right)^2 - U^2 \frac{dh}{dx} \frac{dz_b}{dx} + \frac{U^2 h}{2} \frac{d^2 h}{dx^2} + U^2 h \frac{d^2 z_b}{dx^2} \right\} = gh \sin \theta - \frac{\tau_{bx}}{\rho} + \frac{d}{dx} \left(\alpha h^2 U \frac{dU}{dx} \right) \quad (5) \end{aligned}$$

ここに, q :単位幅流量, θ :路床勾配, α :渦動粘性係数の係数.

ただし, 小規模河床波の発生・発達過程を再現するためには, 後述の非平衡流砂モデルを適用するだけでなく, 波状路床上のせん断応力分布を精度よく評価する必要がある. 通常, 平均流速に摩擦係数を乗じる底面せん断応力の評価法では実験結果との適合性がよくないため, 例えば下記のような評価式が提案されている²⁰⁾.

$$\frac{\tau_{xb}}{\rho} = f u_b^2 \left(1 - \Gamma \frac{dh}{dx} + \Delta \frac{dy_b}{dx} \right), \Gamma = 2, \Delta = 1, u_b = \frac{q}{h} + \frac{q}{3h} \left(\frac{dh}{dx} \right)^2 + \frac{q}{h} \frac{dh}{dx} \frac{dy_b}{dx} - \frac{q}{6} \frac{d^2 h}{dx^2} - \frac{q}{2} \frac{d^2 y_b}{dx^2} \quad (6)$$

上式を用いて波状路床上の底面応力を評価し実験結果と比較した例を図-4に示した²⁰⁾.

(4) 開水路湾曲部・急拡部の高速流

(定常・非定常, 水深積分, 基準水平面上の直角座標または一般座標系, 静水圧, 流速分布の相似性, 経験的0-方程式モデル)

基準水平面上の直角座標系のもとで, 静水圧分布を仮定して導かれる平面2次元水深積分モデルの基礎式は次のようになる. (図-1を平面2次元に拡張した座標系を用いる.) 運動量係数は1としている.

[連続式]

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} = 0 \quad (7)$$

[運動量式]

$$\frac{\partial M}{\partial t} + \frac{\partial UM}{\partial x} + \frac{\partial VM}{\partial y} = -gh \frac{\partial z_s}{\partial x} - \frac{\tau_{bx}}{\rho} - \frac{F_x}{\rho} + \frac{\partial}{\partial x} \left(-\overline{u'^2} h \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\overline{u'v'} h \right) \quad (8a)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial UN}{\partial x} + \frac{\partial VN}{\partial y} = -gh \frac{\partial z_s}{\partial y} - \frac{\tau_{by}}{\rho} - \frac{F_y}{\rho} + \frac{\partial}{\partial x} \left(-\overline{u'v'} h \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\overline{v'^2} h \right) \quad (8b)$$

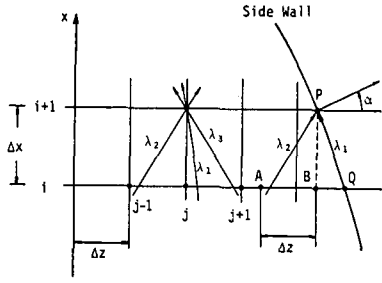


図-5 固定格子点の特性曲線法

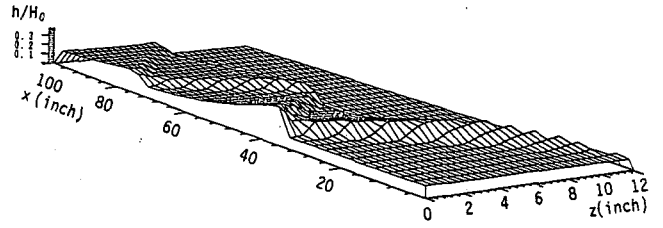


図-6 漸縮水路の高速流の水面形解析

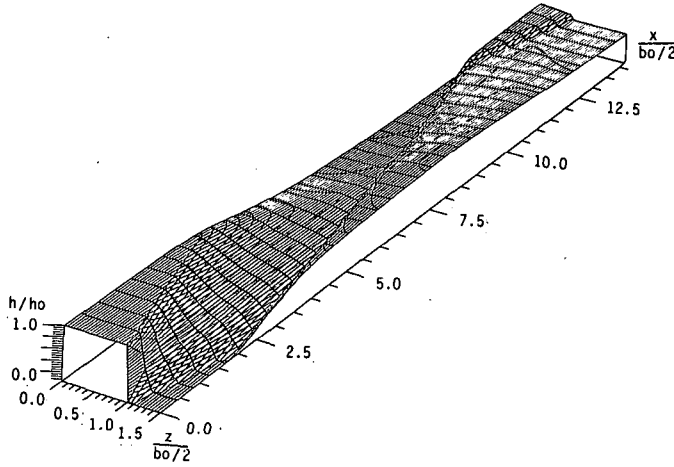


図-7 開水路急流部の水面形解析

ここに、 t : 時間、 (x, y) : 空間座標、 (U, V) : x, y 方向の水深平均流速、 (M, N) : x, y 方向の流量フラックス ($M \equiv Uh, N \equiv Vh$)、 g : 重力加速度、 h : 水深、 ρ : 水の密度、 z_s : 基準面からの水位、 (τ_{bx}, τ_{by}) : $x-y$ 座標系の底面せん断応力の成分、 (F_x, F_y) : 植生等による形状抵抗力の成分、 $-u'^2, -u'v', -v'^2$: $x-y$ 座標系の水深平均レイノルズ応力である。

底面せん断応力、水深平均レイノルズ応力、形状抵抗等の評価については参考文献を参照のこと。

上式中、非定常項、渦動粘性項、形状抵抗項を無視すると、定常状態で平面 2 次的に水面形解析を行う基礎式となる。ただし、次式では簡単のため平坦路床を考慮して $z_s = h$ として行列表示している。

$$A_1 \frac{\partial U}{\partial x} + A_2 \frac{\partial U}{\partial y} = B, \quad A_1 = \begin{bmatrix} U & h & 0 \\ g & U & 0 \\ 0 & 0 & U \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} V & 0 & h \\ 0 & V & 0 \\ g & 0 & V \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -\tau_{bx} / \rho h \\ -\tau_{by} / \rho h \end{bmatrix} \quad (9)$$

これらの式の特性曲線と特性曲線上の関係式を導けば次式となる^{21, 22)}。

[特性曲線]

$$\lambda_1: \frac{dy}{dx} = \frac{V}{U}, \quad \lambda_2: \frac{dy}{dx} = \frac{UV + \sqrt{gh(U^2 + V^2 - gh)}}{U^2 - gh}, \quad \lambda_3: \frac{dy}{dx} = \frac{UV - \sqrt{gh(U^2 + V^2 - gh)}}{U^2 - gh} \quad (10)$$

[特性曲線上の関係式]

$$\lambda_1: \frac{\partial}{\partial x} \left(h + \frac{U^2 + V^2}{2g} \right) + \frac{V}{U} \frac{\partial}{\partial z} \left(h + \frac{U^2 + V^2}{2g} \right) = -\frac{\tau_{bx}}{\rho gh} - \frac{V}{U} \frac{\tau_{by}}{\rho gh} \quad (11a)$$

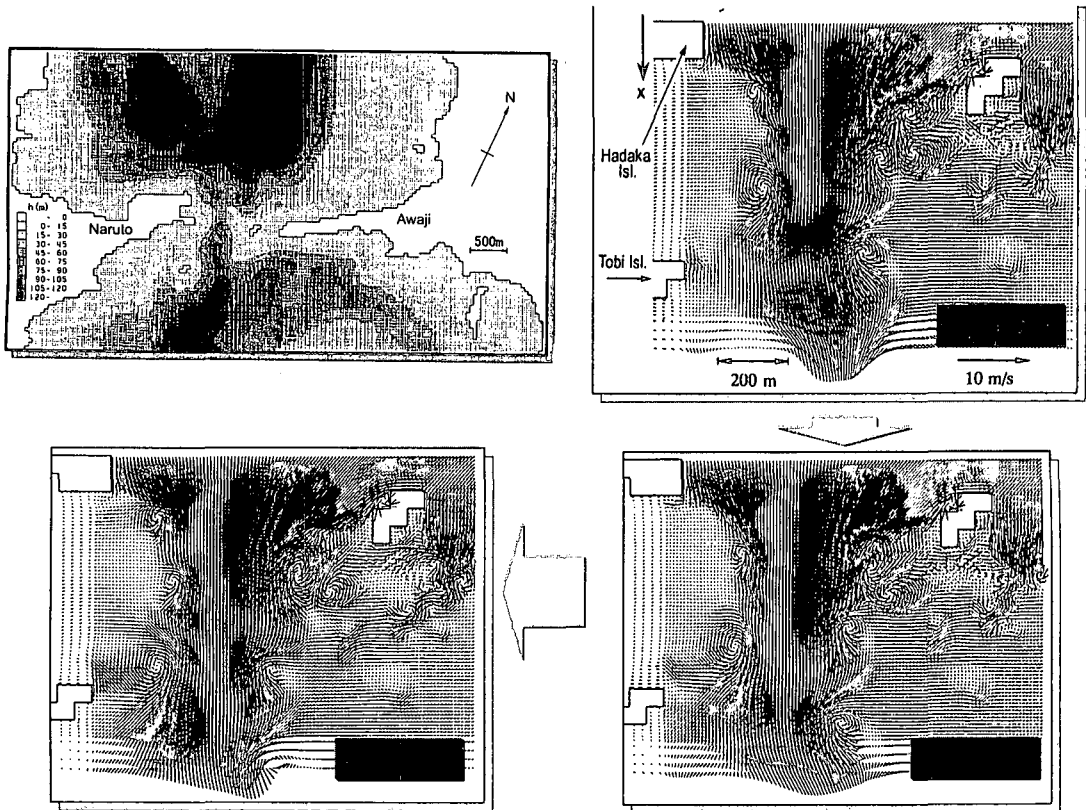


図-8 鳴門の渦潮の数値解析

$$\begin{aligned}
 \lambda_2: & \frac{\sqrt{gh(U^2 + V^2 - gh)}}{hU} \left(\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{UV + \sqrt{gh(U^2 + V^2 - gh)}}{U^2 - gh} \frac{\partial h}{\partial z} \right) \\
 & - \frac{V}{U} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{UV + \sqrt{gh(U^2 + V^2 - gh)}}{U^2 - gh} \frac{\partial U}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{UV + \sqrt{gh(U^2 + V^2 - gh)}}{U^2 - gh} \frac{\partial V}{\partial z} \right) \\
 & = -\frac{\tau_{bx}}{\rho h} \frac{UV + \sqrt{gh(U^2 + V^2 - gh)}}{U(gh - U^2)} - \frac{\tau_{by}}{\rho h}
 \end{aligned} \tag{11b}$$

3本の特性曲線の内一つ(λ_1)は流線であり、その上の関係式は流線に沿って成立するベルヌーイ式となる。また、平面2次元流れのフルード数 $Fr = \sqrt{U^2 + V^2} / \sqrt{gh}$ が1を越えると特性曲線の表示式はすべて実数になり、基礎式系は双曲型に分類される。 $\sqrt{U^2 + V^2} / \sqrt{gh} > 1$ は平面2次元での高速流の定義でもあり、この場合、図-5に示すような固定格子点の特性曲線法を用いて水面形を追跡することができる^{21,22)}。(この方法は流れの特性を理解する上で有用であるが、実際問題には後述(6)で述べる非定常流解析を用いる場合がほとんどである。)

計算例として、開水路漸縮部と急拡部の高速流の水面形解析結果を図-6、図-7に示す^{22,23)}。

(5) 渦潮などせん断不安定に起因する大規模渦

(非定常、水深積分、基準水平面上の直角座標、静水圧、流速分布の相似性、経験的0-方程式モデル・水深積分型非線形 $k-\varepsilon$ モデル、一層または二層モデル)

式(8)中の渦動粘性項を無視し、2次元せん断層型流速分布形(例えば $\tanh$ 型流速分布)を仮定して

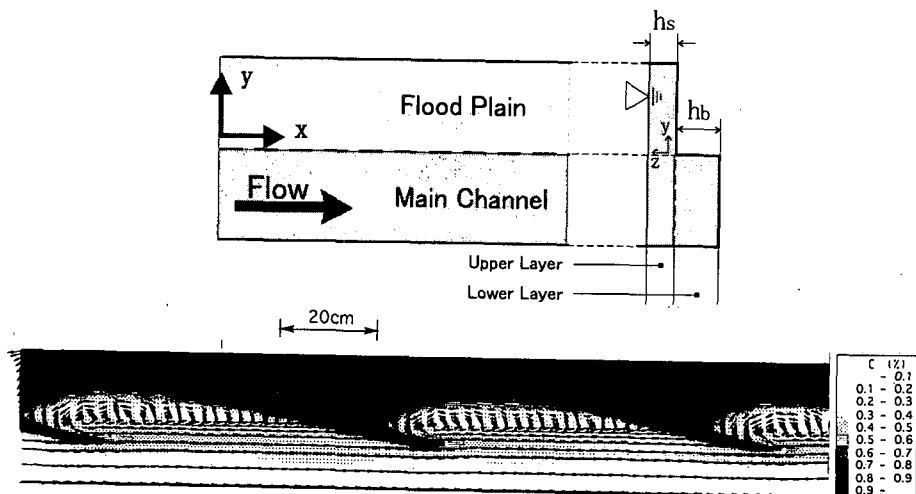


図-9 平面2層モデルによる複断面開水路流れの数値解析

基礎式を線形化すると、フルード数を無次元パラメータとする線形化方程式が導かれる。(連続式の非定常項を無視した安定解析も行われているが、無次元パラメータとしてフルード数が現れず適切でない。) この線形化方程式の安定解析を行うと、 $\tanh$ 型流速分布の場合、フルード数が2以下で微小擾乱は不安定になりせん断層内で渦層が発生することが証明される^{24,25)}。

このように、静水圧を仮定した平面2次元モデルは水平方向に広がりを持つせん断不安定渦をある程度まで再現できる²⁵⁻²⁸⁾。例として、鳴門の渦潮²⁷⁾と平面2層モデルを用いた複断面流れの大規模渦²⁸⁾の計算結果を示す。式(7)、(8)の数値解析法として、汜濫解析法⁴⁾等で汎用の水深と流量フラックスを互い違いに配置した有限体積法が用いられている。慣性項の離散化には QUICK スキームが、時間積分には2次精度のアダムス・バッシュフォース法が用いられている。

(6) 長区間の河川の流れ及び河川湾曲部の流れ

(非定常、水深積分、基準水平面上の一般座標系、静水圧、流線湾曲の効果を考慮(2次流による運動量輸送、2次流の発達過程も考慮)、経験的0-方程式モデル)

河川計画、河道計画において、1次元解析に代わり、平面2次元非定常流モデルを用いて数十キロの河川区間の流れや河床変動解析を行うことが普通となっている。その際、細長い河道をなるべく少ない格子数で効率的に離散化するために、河道形状に適合した一般座標系とその座標系での基礎式を用いることが多い^{29,30)}。その際、運動方程式の未知数として流量フラックス・ベクトルの反変成分を用いる場合と直角座標成分を用いる場合があるが、水深と流量フラックスを互い違いに配置するときは反変成分を用いた方が適切と考えられる。

さらに、河川湾曲部で生じる遠心力と圧力差に起因する2次流、及び2次流による横断方向の運動量輸送を平面2次元モデルに組み込む方法も提案されている³¹⁻³⁷⁾。直交曲線座標系および一般座標系において、2次流が流線の湾曲に遅れずに追従する場合と、遅れを考慮する場合の定式化が示されている。

ここではそれらの一例として、基準水平面上に置かれた一般座標系での2次流発達の遅れを考慮した運動量方程式を示す³⁶⁾。2次流のモデルとして Englund モデル³⁸⁾が用いられている。2次流を考慮しない場合は式中の付加項を無視する。基礎式の詳細は参考文献を参照のこと。(連続式は式(16)で $\xi_t = 0, \eta_t = 0$ とした式。)

[ξ -成分]

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{Q^\xi}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(U_c \frac{Q^\xi}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(V_c \frac{Q^\xi}{J} \right) - \frac{M}{J} \left(U_c \frac{\partial \xi_x}{\partial \xi} + V_c \frac{\partial \xi_x}{\partial \eta} \right) - \frac{N}{J} \left(U_c \frac{\partial \xi_y}{\partial \xi} + V_c \frac{\partial \xi_y}{\partial \eta} \right)$$

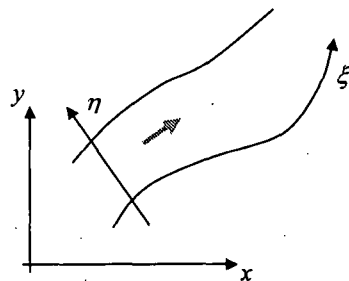


図-10 基準水平面上の一般座標系

$$\begin{aligned}
&= -gh \left(\frac{\xi_x^2 + \xi_y^2}{J} \frac{\partial z_s}{\partial \xi} + \frac{\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y}{J} \frac{\partial z_s}{\partial \eta} \right) - \frac{\tau_b^\xi}{\rho J} \\
&\quad + \frac{\xi_x^2}{J} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(-\overline{u'^2 h} \right) + \frac{\xi_x \eta_x}{J} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(-\overline{u'^2 h} \right) + \frac{\xi_y^2}{J} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(-\overline{v'^2 h} \right) + \frac{\xi_y \eta_y}{J} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(-\overline{v'^2 h} \right) \quad (12a)
\end{aligned}$$

$$+ \frac{\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x}{J} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(-\overline{u'v' h} \right) + \frac{2\xi_x \xi_y}{J} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(-\overline{u'v' h} \right) + \xi_x (S_{\xi 1} + S_{\xi 2} + S_{\xi 3} + S_{\xi 4}) + \xi_y (S_{\eta 1} + S_{\eta 2} + S_{\eta 3} + S_{\eta 4})$$

[η -成分]

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{Q^\eta}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(U_c \frac{Q^\eta}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(V_c \frac{Q^\eta}{J} \right) - \frac{M}{J} \left(U_c \frac{\partial \eta_x}{\partial \xi} + V_c \frac{\partial \eta_x}{\partial \eta} \right) - \frac{N}{J} \left(U_c \frac{\partial \eta_y}{\partial \xi} + V_c \frac{\partial \eta_y}{\partial \eta} \right) \\
&= -gh \left(\frac{\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y}{J} \frac{\partial z_s}{\partial \xi} + \frac{\eta_x^2 + \eta_y^2}{J} \frac{\partial z_s}{\partial \eta} \right) - \frac{\tau_b^\eta}{\rho J} \\
&\quad + \frac{\xi_x \eta_x}{J} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(-\overline{u'^2 h} \right) + \frac{\eta_x^2}{J} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(-\overline{u'^2 h} \right) + \frac{\xi_y \eta_y}{J} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(-\overline{v'^2 h} \right) + \frac{\eta_y^2}{J} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(-\overline{v'^2 h} \right) \quad (12b)
\end{aligned}$$

$$+ \frac{\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x}{J} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(-\overline{u'v' h} \right) + \frac{2\eta_x \eta_y}{J} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(-\overline{u'v' h} \right) + \eta_x (S_{\xi 1} + S_{\xi 2} + S_{\xi 3} + S_{\xi 4}) + \eta_y (S_{\eta 1} + S_{\eta 2} + S_{\eta 3} + S_{\eta 4})$$

ここに、 (Q^ξ, Q^η) : 流量フラックスベクトルの反変成分、 (M, N) : 流量フラックスベクトルの直角座標成分、 (U_c, V_c) : 流速ベクトルの反変成分、 J : 座標変換のヤコビアン $(=1/(x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi))$ 、 $(\tau_b^\xi, \tau_b^\eta)$:

底面せん断応力ベクトルの反変成分、 $-\overline{u'^2}, -\overline{u'v'}, -\overline{v'^2}$: 水深積分されたレイノルズ応力テンソルの直角座標成分。また、 $S_{\xi 1} \sim S_{\eta 4}$ は次式で定義される2次流による運動量輸送項。

$$\begin{aligned}
S_{\xi 1} &= -c_{sn} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{1}{J} (\xi_x A_n \overline{u_s} h \sin 2\theta - \xi_y A_n \overline{u_s} h \cos 2\theta) \right], & S_{\xi 2} &= -c_{sn} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{1}{J} (\eta_x A_n \overline{u_s} h \sin 2\theta - \eta_y A_n \overline{u_s} h \cos 2\theta) \right], \\
S_{\xi 3} &= c_{n2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{1}{J} (\xi_x A_n^2 h \sin^2 \theta - \xi_y A_n^2 h \cos \theta \sin \theta) \right], & S_{\xi 4} &= c_{n2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{1}{J} (\eta_x A_n^2 h \sin^2 \theta - \eta_y A_n^2 h \cos \theta \sin \theta) \right], \\
S_{\eta 1} &= c_{sn} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{1}{J} (\xi_x A_n \overline{u_s} h \cos 2\theta + \xi_y A_n \overline{u_s} h \sin 2\theta) \right], & S_{\eta 2} &= c_{sn} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{1}{J} (\eta_x A_n \overline{u_s} h \cos 2\theta + \eta_y A_n \overline{u_s} h \sin 2\theta) \right], \\
S_{\eta 3} &= -c_{n2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{1}{J} (\xi_x A_n^2 h \sin \theta \cos \theta - \xi_y A_n^2 h \cos^2 \theta) \right], & S_{\eta 4} &= c_{n2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{1}{J} (\eta_x A_n^2 h \cos \theta \sin \theta - \eta_y A_n^2 h \cos^2 \theta) \right]
\end{aligned}$$

ここに、 c_{sn}, c_{n2} : 2次流による運動量輸送の係数、 θ : 水深積分された流速ベクトルとx軸のなす角度。また、 A_n は2次流強度を表し、主流流線の変化に対する2次流の遅れを無視する場合は次式で評価し、遅れを考慮する場合は別途 A_n の関係式を用いる。 R は曲率半径を表す。

$$A_n = \frac{\overline{u_s} h}{R}, \quad (13)$$

ここに、 $\overline{u_s}$: 水深積分された流速ベクトルの大きさ、 R : 曲率半径。

上式を用いた例として、湾曲水路(図-11)を用いた Hicks 等の実験結果³⁹⁾と計算結果(主流と2次流の流速分布)の比較を図-12に示す。

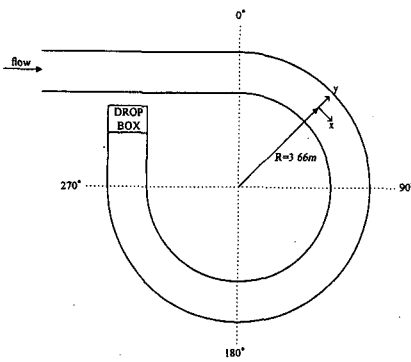


図-11 実験水路の概要 (Hicks et al.)

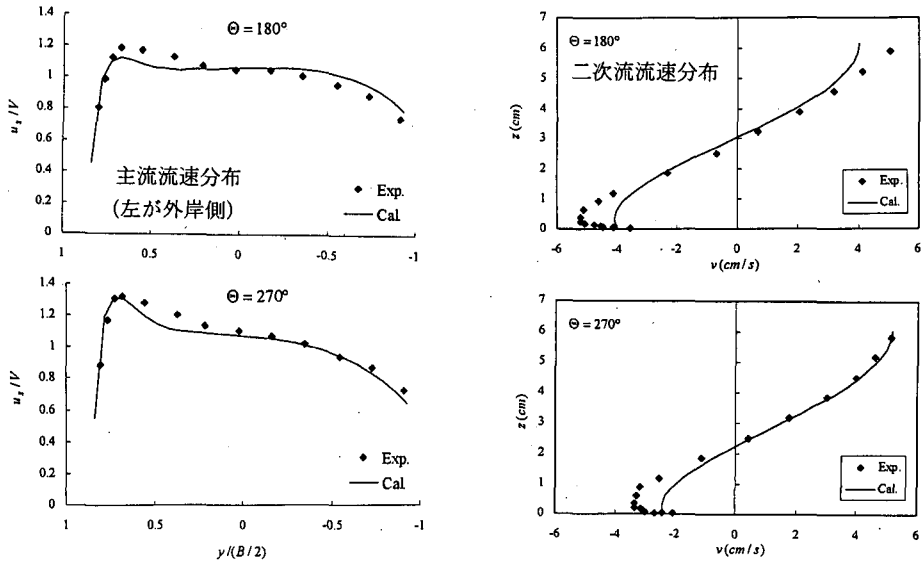


図-12 主流と2次流の計算結果と実験結果の比較

(7) 任意曲面上の流れ

(非定常, 水深積分, 任意曲面上の一般座標系, 曲面の曲がりによる遠心力, 流速分布の相似性, 経験的0-方程式モデル)

球面のようにオーバーハングする曲面や, 複雑に変化する3次元曲面上の流れを対象とすると, 水平面上に基準座標を設定することができない。そこで, 任意曲面上に座標系を設定し, 曲面に垂直または斜交するように立てた座標に沿って基礎式を積分することで任意曲面上の水深積分モデルの基礎式が導かれた⁴⁰⁾。圧力分布に曲面の曲がりによる遠心力の効果が組み込まれている。

曲面 $\zeta(x, y, z) = 0$ に垂直な座標に沿って積分した場合の基礎式を下記に示す。基礎式の詳細は参考文献を参照のこと。

$$[\text{連続式}] \quad \frac{1}{J_0} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial \hat{M}}{\partial \xi} \frac{1}{J_0} + \frac{\partial \hat{N}}{\partial \eta} \frac{1}{J_0} = 0 \quad (14)$$

[ξ -方向の運動量式]

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\hat{M}}{J_0} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{U\hat{M}}{J_0} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{V\hat{M}}{J_0} \right) \\ & + \frac{1}{J_0 h} \left(\hat{M}^2 \Gamma_{0\xi\xi}^\xi + \hat{M}\hat{N} \Gamma_{0\xi\eta}^\xi + \hat{N}\hat{M} \Gamma_{0\eta\xi}^\xi + \hat{N}^2 \Gamma_{0\eta\eta}^\xi \right) \\ & = \frac{h}{J_0} G^\xi - \frac{1}{J_0} \left(\xi_{x_0}^2 + \xi_{y_0}^2 + \xi_{z_0}^2 \right) \frac{\partial}{\partial \xi} \int_0^h \frac{p}{\rho} d\zeta \end{aligned}$$

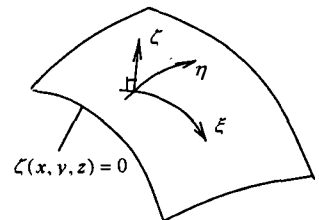


図-13 曲面上に設定された座標系

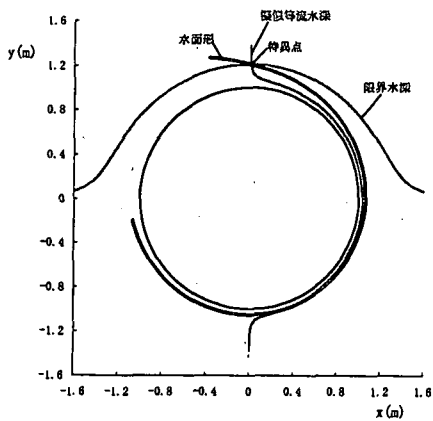


図-14 円柱面に沿う流れの水面形解析

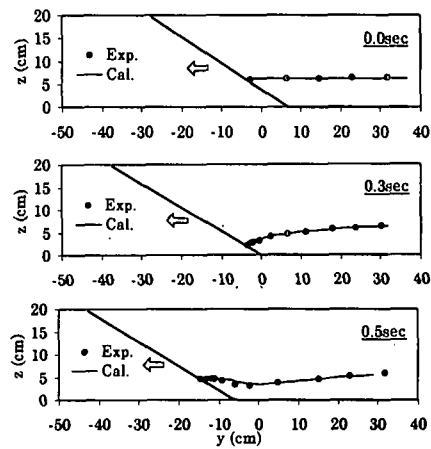


図-15 移動一般座標系を用いた計算例

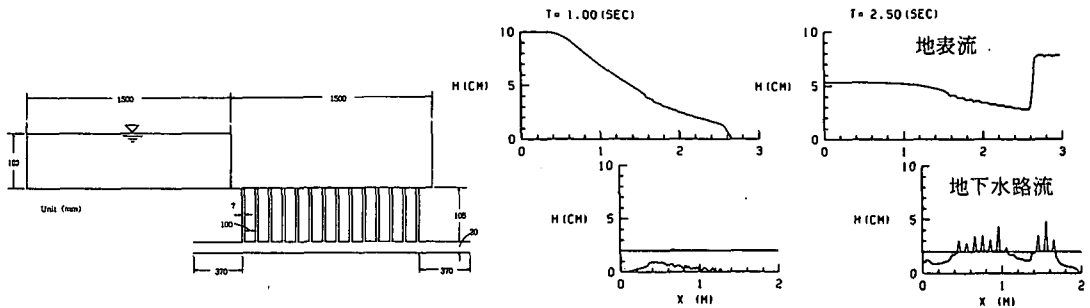


図-16 開水路・圧力流れ共存非定常流の計算例

$$-\frac{1}{J_0}(\xi_{x_0}\eta_{x_0} + \xi_{y_0}\eta_{y_0} + \xi_{z_0}\eta_{z_0})\frac{\partial}{\partial\eta}\int_0^h\frac{p}{\rho}d\zeta - \frac{\tau_b^\xi}{\rho J_0} \quad (15)$$

ここに、 h ：水深、 $(\hat{M}, \hat{N})$ ：流量フラックスベクトルの反変成分、 p ：圧力、 G^ξ ：重力加速度ベクトルの反変成分、 τ_b^ξ ：底面せん断応力ベクトルの反変成分。また、 J 、 Γ_{jk}^i はヤコビアンとリーマン・クリストッフェルシンボルであり、各々次式で定義される。下添字 0 は曲面上の値であることを示す。

$$J = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y & \xi_z \\ \eta_x & \eta_y & \eta_z \\ \zeta_x & \zeta_y & \zeta_z \end{vmatrix}, \quad \Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} g^{is} \left(\frac{\partial g_{js}}{\partial \xi^k} + \frac{\partial g_{ks}}{\partial \xi^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial \xi^s} \right)$$

$$= -\frac{\partial x^m}{\partial \xi^j} \frac{\partial}{\partial \xi^k} \left(\frac{\partial \xi^i}{\partial x^m} \right) = \frac{\partial \xi^i}{\partial x^m} \frac{\partial}{\partial \xi^k} \left(\frac{\partial x^m}{\partial \xi^j} \right), \quad g^{ij} \equiv \frac{\partial \xi^i}{\partial x^m} \frac{\partial \xi^j}{\partial x^m}, \quad g_{ij} \equiv \frac{\partial x^m}{\partial \xi^i} \frac{\partial x^m}{\partial \xi^j}$$

上式を用いた例として円柱面に沿う流れの水面形解析結果を図-14 に示す⁴⁰⁾。適用例は今のところほとんどないが、今後水の造形設計などへの応用が期待される。

(8) 移動一般座標系の適用

(非定常、水深積分、基準水平面上の移動一般座標系、静水圧)

一般に、河岸の崩壊や地震などで流れの境界が時間的に移動する場合に移動一般座標系で記述された基礎式が用いられる²⁹⁾。静水圧を仮定したときの移動一般座標系での水深積分モデルの基礎式は次のようになる。用いている記号の定義は式(12)と同じである。また、 η 方向の運動量式は省略した。

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{h}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left((\xi_t + U) \frac{h}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left((\eta_t + V) \frac{h}{J} \right) = 0 \quad (16)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{Q^\xi}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left((\xi_t + U_c) \frac{Q^\xi}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left((\eta_t + V_c) \frac{Q^\xi}{J} \right)$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{M}{J} \left(\frac{\partial \xi_x}{\partial t} + (\xi_t + Uc) \frac{\partial \xi_x}{\partial \xi} + (\eta_t + Vc) \frac{\partial \xi_x}{\partial \eta} \right) - \frac{N}{J} \left(\frac{\partial \xi_y}{\partial t} + (\xi_t + Uc) \frac{\partial \xi_y}{\partial \xi} + (\eta_t + Vc) \frac{\partial \xi_y}{\partial \eta} \right) \\
& = -gh \left(\frac{\xi_x^2 + \xi_y^2}{J} \frac{\partial z_s}{\partial \xi} + \frac{\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y}{J} \frac{\partial z_s}{\partial \eta} \right) - \frac{\tau_b^\xi}{\rho J} + \dots
\end{aligned} \quad (17)$$

ここに、 ξ_t, η_t は次式で計算される。

$$\xi_t = -x_t \xi_x - y_t \xi_y, \quad \eta_t = -x_t \eta_x - y_t \eta_y$$

図-15 に河岸が移動したときに生じる流れへの適用例を示す⁶⁷⁾。この方法は、後述の河岸侵食による流路変動解析に適用されている。

(9) 地下水路系の流れ

(非定常、断面・水深積分、基準水平面上の直角座標系、静水圧、流速分布の相似性、経験的 0 方程式モデル、開水路流れと圧力流れが混在)

下水道や地下河川内の流れの特徴として、水深の増加とともに開水路流れと圧力流れが混在した複雑な流れが生じることが挙げられる。このような共存非定常流を積分型モデルで数値解析する方法として二通りの方法が考えられている。一つは、流れを圧縮性流体として取り扱い、管頂に水撃波の伝播速度に対応する細いスリットを立て、管路流れと開水路流れを同じ基礎式で解くプライスマン法。いま一つは流れを開水路流れ、管路流れ、及びそれらの境界面に分け、それぞれの関係式を非圧縮性流体の解析法を用いて同時に解きながら境界面を移動させる方法である。後者は平面 2 次元場への拡張や、閉じ込められた空気圧の変化を考慮する方法も提案され、圧縮性流体としての取り扱いも可能である⁴¹⁻⁴⁴⁾。

適用例として、地表流と地下水路流の相互作用を考慮した過渡現象（地表流が地下水路に流入し満管になった後地表に吹き上げる現象）の計算結果を図-16 に示す。

2. 3 3次元解析モデル

3次元解析は、橋脚や水制など河川構造物周辺の流れと局所洗掘現象のように3次元性の強い現象を再現する必要がある場合に用いられる。乱流の取り扱いには RANS, LES 及び DNS が用いられ、実験室スケールの流れ場に対してこれら三通りを適用した研究が多く行われているが、実河川の流れの非常に大きいレイノルズ数などを考慮すると、現時点では RANS が実用的なように思われる。河床変動と組み合わせた流れ解析の例として、砂州や複断面蛇行流路の河床変動を 0 方程式モデルで解析した例、構造物周辺の局所洗掘現象を標準型または非線形 $k-\varepsilon$ モデルを用いて解析した研究がある^{45-51,86)}、実河川に適用するモデルとしては、実用性と3次元流れを再現できる能力などの兼ね合いからみて近年進歩の著しい非線形渦粘性モデルが有力と考えられる。

基礎式の表示法や数値解析法など数多くの方法が提案されている。ここでは、例として移動一般座標系を用いて、流速ベクトルの反変成分で表示した基礎式系を下記に示す^{52,53)}。乱流モデルとして非線形 $k-\varepsilon$ モデルを用いている。

[連続式]

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial V^\alpha \sqrt{g}}{\partial \xi^\alpha} = 0 \quad (18)$$

[運動方程式]

$$\frac{\partial V^i}{\partial t} + \nabla_j [V^j (V^i - W^j)] + V^i \nabla_j W^j + V^j \nabla_j W^i = F^i - \frac{1}{\rho} g^{ij} \nabla_j p + \nabla_j \left[\overline{v^i v^j} \right] + 2\nu \nabla_j e^{ij} \quad (19)$$

[k 方程式]

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \nabla_j [k (V^j - W^j)] + k \nabla_j W^j = -g_{ij} \overline{v^i v^j} \nabla_j V^i - \varepsilon + \nabla_j \left\{ \left(\frac{D_t}{\sigma_k} + \nu \right) g^{ij} \nabla_j k \right\} \quad (20)$$

[ε方程式]

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \nabla_j [\varepsilon(V^j - W^j)] + \varepsilon \nabla_j W^j = -C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} g_{ij} \overline{v^i v^j} \nabla_j V^i - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} + \nabla_j \left\{ \left(\frac{D_t}{\sigma_k} + \nu \right) g^{ij} \nabla_i \varepsilon \right\} \quad (21)$$

ここに、 ξ^j : 計算空間の空間座標、 t : 時間、 V^j : 流速ベクトルの反変成分、 W^j : 格子移動速度ベクトルの反変成分、 v^j : 乱れ速度ベクトルの反変成分、 p : 圧力、 ν : 動粘性係数、 ρ : 流体の密度、 k : 乱れエネルギー、 ε : 乱れエネルギー散逸率、 F^j : 重力加速度ベクトルの反変成分をそれぞれ表わす。 g_{ij}, g^{ij} は計量テンソルの共変成分及び反変成分であり、次のような関係がある。

$$g_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial \xi^i} \frac{\partial x^l}{\partial \xi^j} \delta_{kl}, \quad g^{ij} = \frac{\partial \xi^k}{\partial x^i} \frac{\partial \xi^l}{\partial x^j} \delta_{kl}, \quad g_{ij} g^{jk} = \delta_i^k \quad (22)$$

ここに、 x^i はデカルト座標系を表す。また、

$$g = \det[g_{ij}] \quad (23)$$

であり、 ∇_j は共変微分(covariant derivative)を表す。

非線形 $k-\varepsilon$ モデルによる構成則は、Pope⁵⁴⁾ および Gatski・Speziale⁵⁵⁾ による表現を一般曲線座標系に変換することにより、次のように表される。

$$-\overline{v^i v^j} = D_i S^{ij} - \frac{2}{3} k \delta_{ij} S^{kk} - \frac{k}{\varepsilon} D_i [\alpha_1 Q_1 + \alpha_2 Q_2 + \alpha_3 Q_3] \quad (24)$$

$$D_i = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}, \quad Q_1 = S^{ia} g_{ad} \Omega^{dj} + S^{jb} g_{bd} \Omega^{di}, \quad Q_2 = S^{ia} g_{ad} S^{bj} - \frac{1}{3} S^{ka} g_{am} S^{mb} g_{bk} \delta_{ij} g^{ij},$$

$$Q_3 = \Omega^{ia} g_{ad} \Omega^{bj} - \frac{1}{3} \Omega^{ka} g_{am} \Omega^{mb} g_{bk} \delta_{ij} g^{ij}, \quad S^{ij} = g^{ia} \nabla_a V^j + g^{ja} \nabla_a V^i, \quad \Omega^{ij} = g^{ia} \nabla_a V^j - g^{ja} \nabla_a V^i$$

モデル係数は、ストレインパラメータ S とローテーションパラメータ Ω の次のような関数で与える⁵⁶⁻⁵⁸⁾。

$$\alpha_1 = -0.1325 f_M, \quad \alpha_2 = 0.0675 f_M, \quad \alpha_3 = -0.0675 f_M$$

$$f_M = \frac{1}{1 + 0.02 M^2}, \quad C_\mu = \min \left[0.09, \frac{0.3}{1 + 0.09 M^2} \right], \quad M = \max(S, \Omega)$$

$$S = \frac{k}{\varepsilon} \sqrt{\frac{1}{2} S^{ia} g_{ad} S^{jb} g_{bd}}, \quad \Omega = \frac{k}{\varepsilon} \sqrt{\frac{1}{2} \Omega^{ia} g_{ad} \Omega^{jb} g_{bd}}$$

非線形 $k-\varepsilon$ モデルを用いた計算結果として、図-17 に複断面流れの低水路・高水敷境界面に生じる大規模渦周辺の 3 次元解析結果 (直角座標系)⁵⁸⁾、図-18 に越流型水制周辺の流れの 3 次元解析結果 (移動一般座標系)⁵⁹⁾ を示す。

計算法は有限体積法であり、圧力、 k および ε を立方格子の中央で、流速ベクトルの成分を側面で定義する完全スタガード格子系が用いられている。計量テンソル、クリストッフェル記号等を格子点上で定義し、計算の過程で必要となる位置の値については、その都度内挿により求めている。用いている計算格子上の水理量の配置を図-19 に示す。

鉛直方向に変化する移動一般座標を用いているので、格子点位置は自由表面と底面を等間隔に分割することで 1 時間ステップ毎に更新される。自由水面変動量は、反変成分表示の基礎式においては次のように極めて簡単な式により計算される⁵²⁾。

$$\Delta h = \sqrt{g_{33}} V^3 \Delta t \quad (25)$$

上式で、 Δt : 計算時間間隔、 Δh : Δt 時間の水面変動量、添字 3 は鉛直方向を表わす。

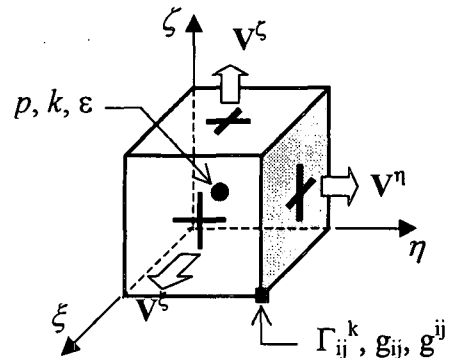


図-19 水理量の配置

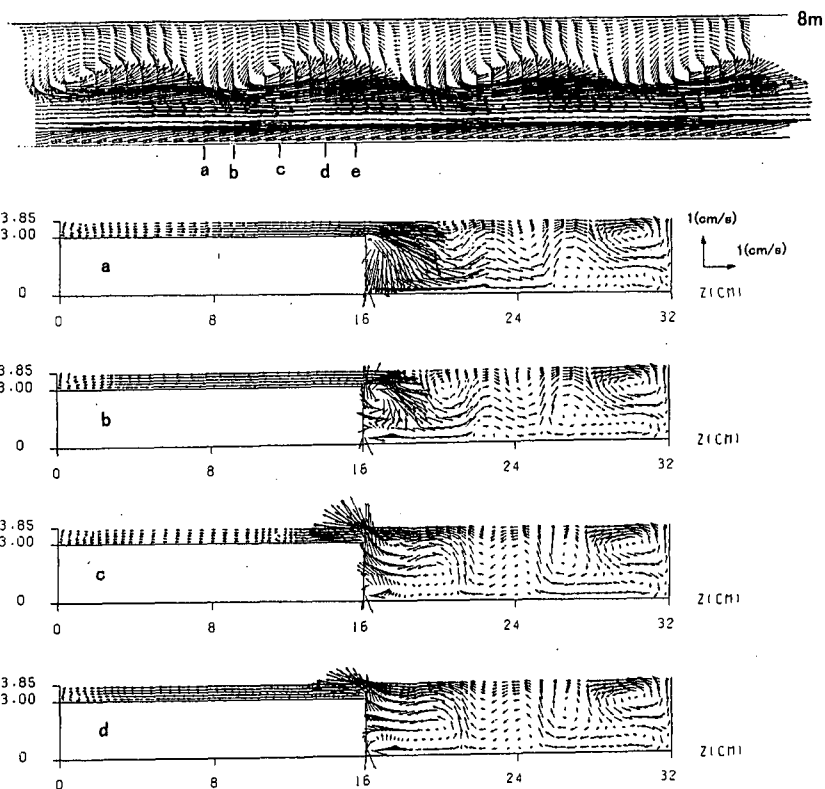
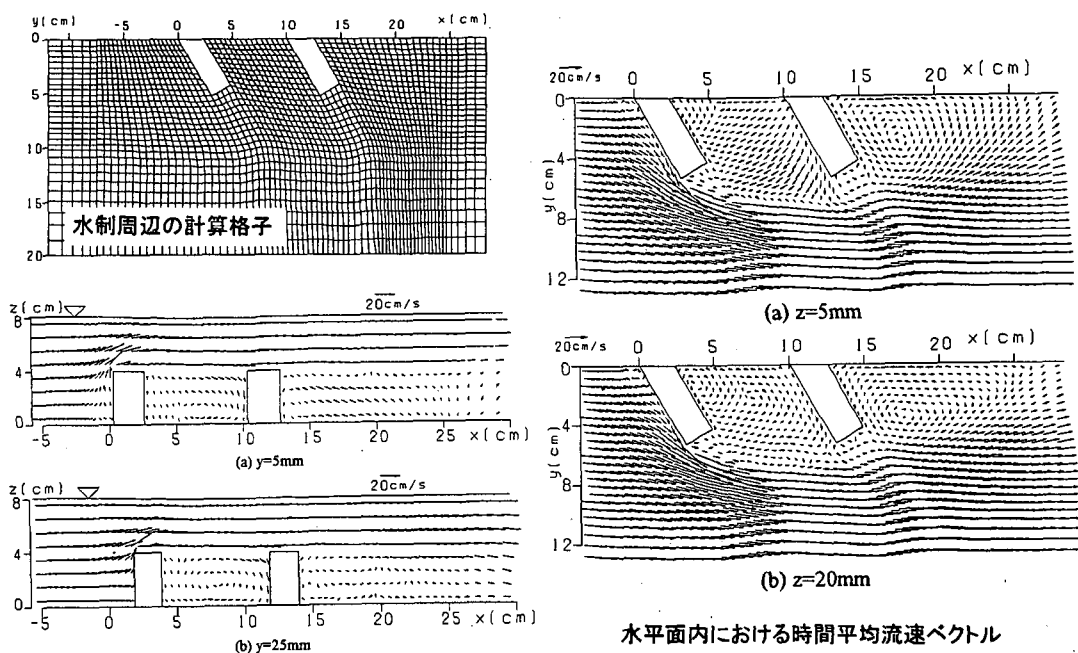


図-17 非線形 $k-\varepsilon$ モデルによる複断面開水路流れに生じる大規模渦の3次元数値解析



鉛直縦断面内の時間平均流速ベクトル

水平面内における時間平均流速ベクトル

図-18 移動一般座標系での非線形 $k-\varepsilon$ モデルによる越流型水制周辺の流れの3次元構造解析

3. 河床・河道変動の数値解析

河床・河道変動の数値解析は、河川流のモデリングと解析法、及び河床・河道変動の素過程に関する研究と連動して進展してきた。まず、河床・河道変動の素過程について簡単にまとめ、その後、河川流の解析法と関連付けて河床・河道変動解析の進展について説明する。

河床変動の発生に関する安定解析と無次元水理量を用いた発生の領域区分、及び非線形解析による平衡状態の特性解析、河川蛇行の発生・発達過程に関する理論、固定砂州と流路蛇行の間の共鳴理論、河床変動の形状特性や流れの抵抗則などに関する数多くの研究については紙面の制約のため本稿では取り扱わないので、参考文献を参照されたい⁶⁰⁻⁶⁵⁾。

3. 1 土砂輸送及び河床・河道変動に関わる素過程⁶⁰⁻⁶⁵⁾

(1) 土砂の輸送形態

河床・河道変動を解析するためには、流水中の土砂の輸送過程に関する素過程をモデル化する必要がある。古くから数多くの研究が行われてきた。得られた成果の詳細は多くの著書、委員会報告、原論文を参照していただき、ここでは基本的事項について簡単に記述する。

周知のように、流れによって河川を輸送される土砂は、輸送形態によって大きく次のように分類されている。

- ・掃流砂：河床に存在する砂礫で構成され、流れの抗力と揚力の効果で河床上を転動、滑動、サルテーション（小跳躍）を繰り返しながら輸送される。
- ・浮遊砂：乱れの作用の下で、河床に存在する砂粒が浮遊し、不規則に変動しながら長時間流水中に保持されながら輸送される。ただし、沈降と浮遊を通して河床砂礫との交換が行われる。
- ・ウォッシュロード：河床に存在しない微小な粒径範囲の土砂の成分で上流の土砂生産地から流出してきたものがそのまま流送される。河床砂礫との交換が行われない。

さらに、掃流砂と浮遊砂の遷移機構に着目した詳細な研究も行われてきたが、実用的な解析法に適用されるには至っておらず、今後の発展が期待される⁶⁶⁾。

(2) 掃流砂の輸送過程のモデル化

上記の輸送形態のうち、掃流砂の輸送過程について簡単に説明する。

ある地点に静止していた粒子群は、変動する流れの抗力と揚力の作用で確率的に動き始める。その後、転動やサルテーションによって短時間移動して停止し長時間休止することが知られている。この一連の過程を、河床表面の砂粒が単位時間に移動開始する確率密度であるピックアップ・レイト(pick-up rate)と、動き始めた砂粒が河床に停止するまでの距離であるステップ・レングス (step-length) を用いて確率的に表現する方法を非平衡流砂モデル、または確率過程モデルと呼ぶ。

この方法はさらに、砂粒が移動する短い時間を無視する移動速度無限大のモデルと、移動過程も砂粒群の運動方程式を解くなどして考慮するモデルに分けられる。

非平衡流砂モデルはある地点を通過する砂粒の時空間的履歴をある程度忠実に考慮しようとしており、小規模河床波や河川構造物周辺の局所洗掘のような、河床変動の空間的スケールが砂粒移動のスケールと同等のオーダーの場合に適用される。

一方、河床変動の空間的スケールが砂粒移動のスケールより十分大きい場合、ある地点を通過する単位時間あたりの砂粒群の体積（流砂量）を、過去の履歴に関係なく局所的な水理量（流速、水深、底面せん断応力など）で評価する平衡流砂モデルを用いることが多い。流砂量を評価するために、これまで砂粒に作用する抗力や揚力とそれに抵抗する力の関係から導かれたもの、次元解析的に導かれたものなど多くの関係式が提案され、実験的に検証されてきた。平面2次元流れの解析と連動させるときは、流線方向と流線に直交する方向の流砂量を評価する必要がある。前者は上記1次元の流砂量式が適用され、後者は横断方向の河床勾配などを考慮して導かれた横断方向流砂量式が適用される。これらを一般座標系の基礎式に組み込む場合には、後述するように若干の演算が必要である。

実際に河床変動の解析を行うには、平面的な格子を考え、その格子から単位時間にピックアップされる砂粒量と上流からその格子に堆積する砂粒量を非平衡流砂モデルで評価して河床面の高さを計算する方法、格子の上流側と下流側断面を通過する流砂量の差で計算する方法が用いられる。後者は厳密には静止している河床面ではなく掃流砂層も含んだ高さを評価していることになる。

(3) 河岸侵食のモデル化

一方、蛇行などの流路の変動を解析する場合には、河道内の流れと河床変動を上記の方法で計算するとともに、何らかの河岸侵食・崩壊モデルを組み込む必要がある。たとえば、側岸侵食量を側岸での摩擦速度や断面平均流速からの偏差で評価する方法、間歇的河岸崩壊をモデル化する方法が用いられ、直線流路の拡幅、蛇行の発生・発達過程の理論解析や数値解析が行われている。(文献67の参考文献を参照)

例として、長谷川⁶⁹⁾が提案した河岸が非粘着性材料の場合の崩壊・堆積モデルの概念図を図-20に示す。線(1)はある崩壊直後の河岸横断形状である。線(3)は崩落幅だけ流路外方向に平行移動させた線を表し、次の崩壊・堆積が生じた後の河岸横断形状である。水中の横断勾配は水中安息角である。水面より上方の横断勾配は安息角より大きい、非粘着性材料でも間隙水の表面張力の効果で見かけの粘着力が作用するためと考えられている。

崩落発生の判定は、崩落幅に対して崩落部Aの面積と埋め戻し部Bの面積が等しくなったとき生じるとする条件が適用される。このモデルでの崩壊・堆積過程は、間歇的に生じる過程の一回々々を再現しているのではない。侵食過程にある河岸の断面形状は観測結果から相似性を有することが知られており、トータルの河岸侵食量は河岸近傍の河床低下量で計算可能であると仮定している。

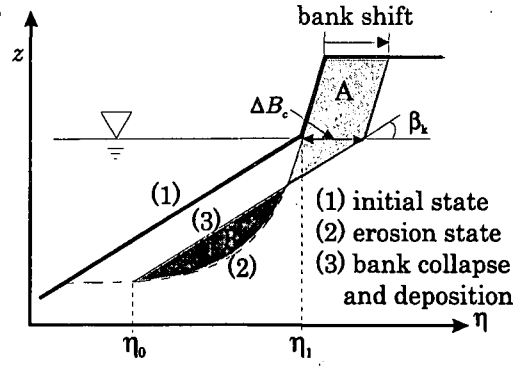


図-20 河岸崩壊・堆積モデルの概念図

(4) 混合砂の取り扱い

平野⁶⁹⁾は混合砂礫床において砂粒の移動が起こるのは河床の表面のごく薄い層(交換層)であると考え、河床をこの交換層とそれ以下の原河床に分け、粒度分布の変動は交換層のみで進行するものと考えた。この場合、粒度分布の変動は次式で計算される。より詳細なモデルが江頭⁷⁰⁾により提案されている。

$$\frac{\partial f_{bi}}{\partial t} = \frac{1}{\theta_E} \frac{\partial z_i}{\partial t} - \frac{1}{\theta_E} \frac{\partial z_b}{\partial t} \left\{ \zeta f_{bi} + (1-\zeta) f_{bi0} \right\}, \quad \frac{\partial z_b}{\partial t} > 0: \zeta = 1, \quad \frac{\partial z_b}{\partial t} < 0: \zeta = 0 \quad (25)$$

ここに、 z_b : 河床高さ、 θ_E : 交換層の厚さ、 f_{bi0} : 原河床の粒径階*i*の含有率。

3. 2 河床変動の数値解析

これまでに説明してきた河川流のモデリングと河床・河道変動の素過程のモデルを組み合わせ、種々の河床・河道変動の数値解析が行われてきた。

(1) 水深積分モデルによる小規模河床波の再現

流れのモデルとして2. 2 (3) 波状路床上の流れで説明した鉛直加速度を考慮した水深積分モデル(ブシネスク方程式原型)式(5)を用い、非平衡流砂モデルを組み合わせに行った砂堆のシミュレーション結果を図-21に示す⁷¹⁾。水深積分モデルの中で底面せん断応力の評価を工夫するとともに、砂粒の移動のスケールと河床変動のスケールが同等なので下記の非平衡流砂モデルを用いている。初期に流れと波状路床の共鳴関係式を満たす波長の河床波が発生し、その後平衡状態まで発達する様子、それに伴い流れの抵抗(水深)が増加していることがわかる。このモデルで反砂堆も再現することができる。

$$\frac{\partial b}{\partial t} = \frac{1}{1-\lambda} \frac{A_3}{A_2} d(p_d - p_s) \quad (26)$$

ここに、 p_s : ピックアップレイト、 p_d : デポジットレイト、 d : 砂粒の粒径、 λ : 河床の空隙率。

ピックアップレイト及びステップレングスは下記の式で評価される⁷²⁾。

$$p_s \sqrt{d / (\sigma / \rho - 1) g} = 0.03 \tau_* (1 - 0.035 / \tau_*)^3 \quad (27)$$

$$f_s(s) = \frac{1}{\Lambda} \exp\left(-\frac{s}{\Lambda}\right) \quad (28)$$

ここに、 σ : 砂粒の密度、 τ_* : 無次元掃流力、 Λ : ステップレングス、 s : 砂粒がピックアップされ

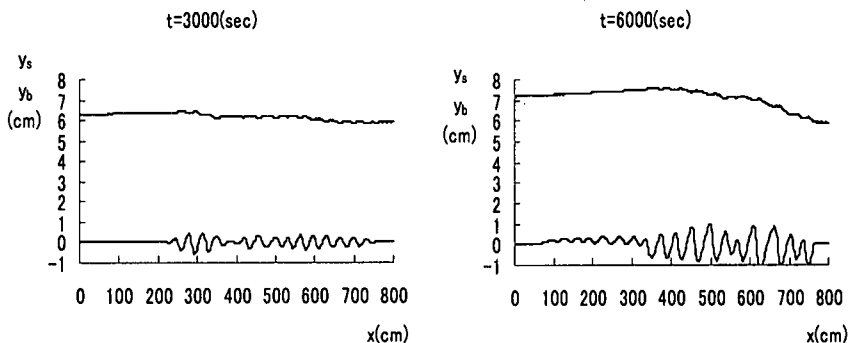


図-21 砂堆の発生・発達過程と流れの抵抗の増加の数値解析結果

た位置からの距離, A_2, A_3 : 形状係数 ($= \pi/4, \pi/6$).

(2) 中規模河床波の数値解析

静水压を仮定した通常の水深積分モデルと平衡流砂モデルを用いた線形安定解析から、水力条件によって河床に与えられた微小擾乱が不安定になることが示され⁷³⁾、この基礎式の組み合わせで中規模河床波を再現できる可能性が示された。その後、清水等⁷⁴⁾、Nelson 等⁷⁵⁾により交互砂州の数値計算が行われた。最近でも、複列砂州の再現、交互砂州の形成に及ぼす浮遊砂や混合砂の影響、固定砂州と河道湾曲の共鳴現象など様々な研究が行われている⁷⁶⁻⁸¹⁾。

流れ解析の基礎式は式(12)と同様である。また、基準水平面に置かれた直角座標系で表示された流砂の連続式は下記のようになる。

$$\frac{\partial z_b}{\partial t} + \frac{1}{1-\lambda} \left(\frac{\partial q_{Bx}}{\partial x} + \frac{\partial q_{By}}{\partial y} \right) = 0 \quad (29)$$

ここに、 z_b : 河床高, λ : 河床材料の空隙率, (q_{Bx}, q_{By}) : $x-y$ 座標系の単位幅流砂量の成分である。

これを一般座標系で表示すれば以下のようになる。

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{z_b}{J} \right) + \frac{1}{1-\lambda} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{q_B^\xi}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{q_B^\eta}{J} \right) \right) = 0 \quad (30)$$

ここに、 (q_B^ξ, q_B^η) : 流砂量の反変成分であり、以下に示す手順に従って評価する。

まず、流線とその直角方向すなわち (s, n) 方向の単位幅流砂量 (q_{Bs}, q_{Bn}) を、たとえば次式に表される Meyer-Peter・Muller 式と長谷川式で評価する。

$$\text{M-P・M 式: } q_{Bs} = 8(\tau_* - \tau_{*c})^{\frac{3}{2}} \sqrt{\left(\frac{\sigma}{\rho} - 1 \right) g d^3} \quad (31)$$

$$\text{長谷川式: } q_{Bn} = q_{Bs} \left(\frac{u_{nb}}{u_{sb}} - \sqrt{\frac{\tau_{*c}}{\mu_s \mu_k \tau_*}} \frac{\partial z_b}{\partial n} \right) \quad (32)$$

ここに、 d : 河床材料の粒径, τ_* : 無次元掃流力, τ_{*c} : 無次元限界掃流力, ρ : 水の密度, σ : 河床材料の密度, (u_{sb}, u_{nb}) : 河床における流速の (s, n) 方向成分, μ_s, μ_k : 河床材料の静止および動摩擦係数である。

次に、 (q_{Bs}, q_{Bn}) から、流線と x 軸のなす角度 γ を用いて流砂量ベクトルの (x, y) 方向成分 (q_{Bx}, q_{By}) を求める。

$$q_{Bx} = q_{Bs} \cos \gamma - q_{Bn} \sin \gamma, \quad q_{By} = q_{Bs} \sin \gamma + q_{Bn} \cos \gamma$$

さらに、次式より直角座標系の流砂量成分 (q_{Bx}, q_{By}) を反変成分 (q_B^ξ, q_B^η) に変換する。

$$q_B^\xi = \xi_x q_{Bx} + \xi_y q_{By}, \quad q_B^\eta = \eta_x q_{Bx} + \eta_y q_{By}$$

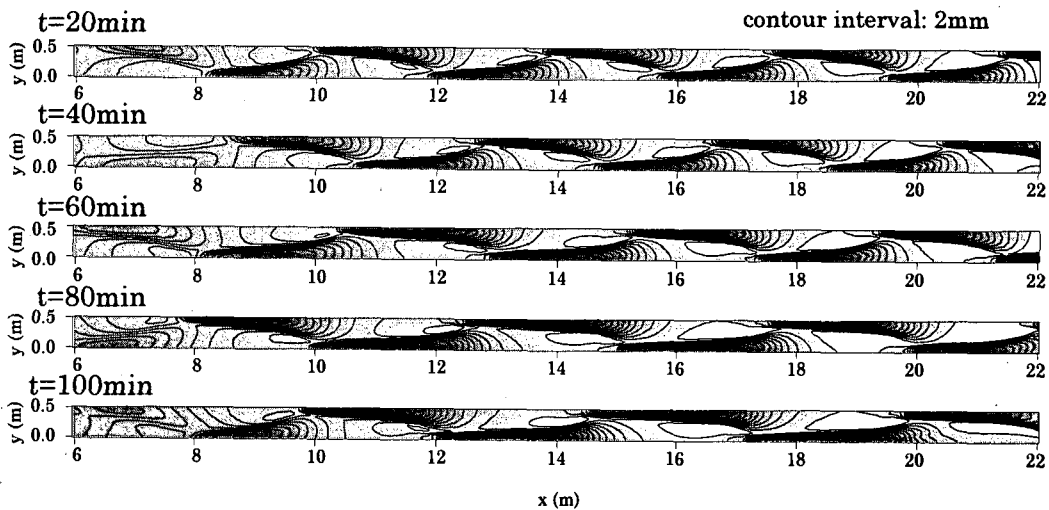


図-22 交互砂州の形成と伝播過程の数値解析結果

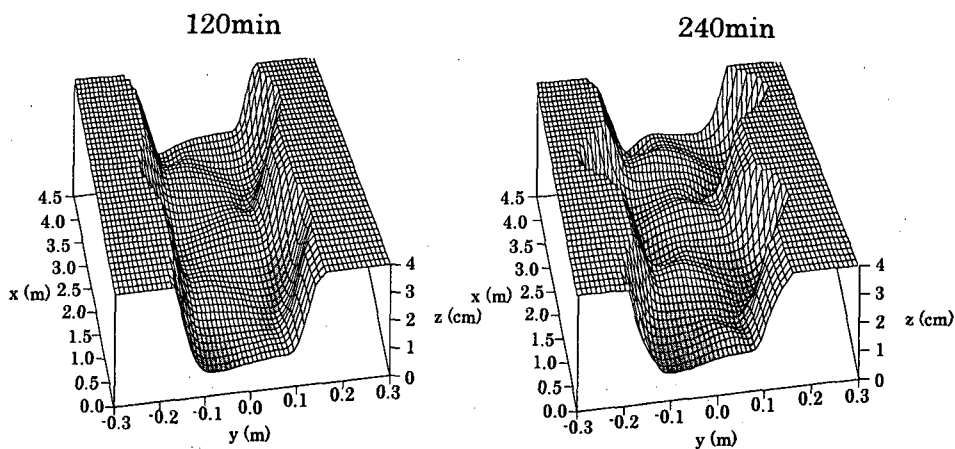
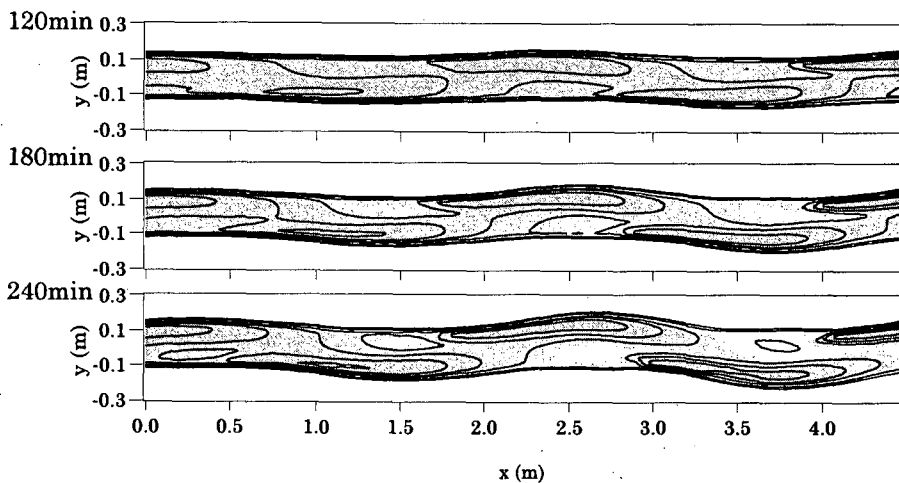
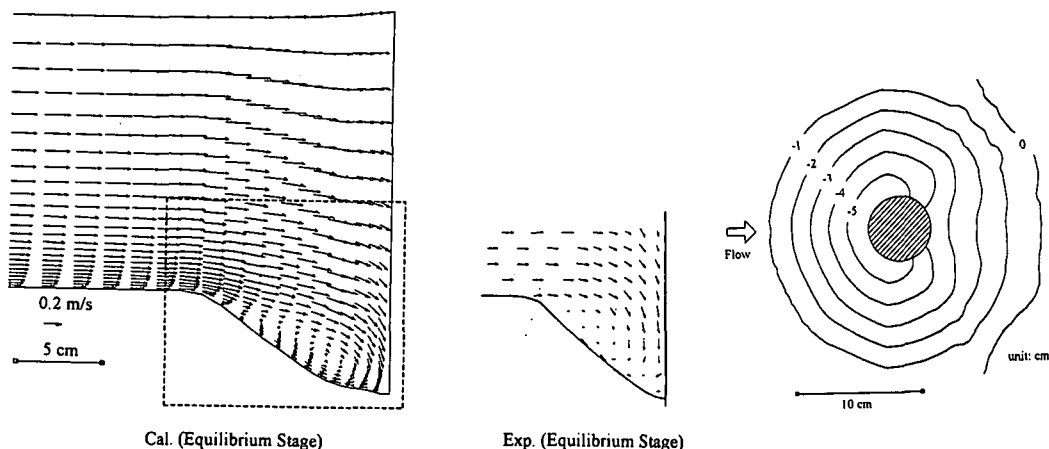


図-23 侵食性流路の河岸侵食による変動に関する数値解析結果



Cal. (Equilibrium Stage)

Exp. (Equilibrium Stage)

河床洗掘深の等高線

円柱の中心軸を通る鉛直面内の流速分布

図-24 非線形 $k-\varepsilon$ モデルと粒子の運動方程式を解く非平衡流砂モデルによる橋脚周辺の局所洗掘の数値解析結果

また、長谷川式⁶⁸⁾における2次流による河床での流速 u_{nb} は次式で算出する。

$$u_{nb} = -N_* \frac{h}{R} u_{sb} \quad (33)$$

ここに、 R : 流線の曲率半径、 N_* : 係数 (=7.0) である。

図-22 に、上記の基礎式を用いた交互砂州の形成・移動過程の数値計算結果を示す⁸⁰⁾。

(3) 侵食性河岸を有する流路の変動

河岸侵食に伴う流路の変動に関しても、側岸侵食に伴う1次元河床変動式を用いた流路拡幅過程の解析、側岸侵食現象における流砂の非平衡性やせん断応力分布算出法の重要性に着目した研究、平面形状の安定性と蛇行の発達減衰、及びこれらの数値解析的研究など多くの研究が行われてきた⁸²⁻⁸⁵⁾。

最近では、河岸侵食による流路の変動の数値計算を行う場合、流れ解析に2. 2 (8) で述べた移動一般座標系を用いる方法に、河床変動モデル(平衡・非平衡)と3. 1 (3) で述べた河岸侵食モデルを組み込むことで河岸線の移動と河床変動の数値解析が行われている。

図-23 は侵食性の直線流路に通水したあとの河床・河道変動を、移動一般座標系での水深積分モデルと非平衡流砂モデルの組み合わせで数値解析したものである^{84,85)}。(平面2次元場での非平衡流砂モデルの適用法については参考文献を参照のこと。) まず交互砂州が生じ、流れが蛇行することで河岸侵食が交互に生じ、流路の蛇行が発達していく様子が再現されている。

(4) 河川構造物周辺の局所洗掘現象の数値解析

河川構造物周辺の流れは強い3次元性を示すため、局所洗掘の予測は3次元流れ解析と平衡または非平衡の河床変動解析を連動して行われる。これまでに、橋脚や水制周辺の局所洗掘、複断面蛇行河道の低水路の河床変動予測などが行われてきた^{45-50,86-88)}。

ここでは例として図-24 に橋脚周りの局所洗掘の数値解析結果を示す⁸⁷⁾。流れ解析は、乱流モデルとして非線形 $k-\varepsilon$ モデルを用い、数値計算法として移動一般座標系の基礎式に有限体積法を適用した3次元解析法を用いている。この流れ解析と並行して、砂粒群の運動方程式を解く非平衡流砂モデルを用いて河床変動の計算を行っている。本非線形 $k-\varepsilon$ モデルの構造物周りの3次元流れに対する適用性は別途検討しており、馬蹄形渦やカルマン渦もほぼ再現できることを確かめている^{56,57)}。

4. おわりに

本稿では、河川流とそれに伴う河床変動や河川蛇行の数値解析について、まず流れと流砂過程の実用的なモデル化を概説するとともに、それらを組み合わせた数値解析結果の例を示した。今後、流れと流砂過程に関して、粒子法などを適用したより精緻なシミュレーションの研究がより進展すると考えられる。それと同時に、河川源流域から河口までの長距離・長時間の土砂動態を連続して取り扱うことができる、3次元的效果を考慮した水深積分型モデルの高精度化の進展も実用的観点から期待される。

参考文献

- 1) 土木学会水理委員会移動床流れの抵抗と河床形状研究小委員会：移動床流れにおける河床形態と粗度，土木学会論文報告集，第210号，pp.65-91，1973.
- 2) 細田 尚・岩佐義朗・河村直明・米山 望：不規則なサルテーション粒子を伴う開水路流れの流速分布解析，第5回数値流体力学シンポジウム論文集，493-496，1991.
- 3) 後藤仁志・辻本哲郎・中川博次：PSIセルモデルによるSaltation層の解析，海岸工学論文集，第39巻，266-270，1992.
- 4) 井上和也：開水路非定常流の数値解析法とその水工学への応用に関する研究，京都大学学位論文，1986.
- 5) 細田 尚・朝位孝二：ダム破壊流れの1次元解析，水工学における計算機利用の講習会講義集（土木学会水理委員会基礎水理部会），23-31，1999.
- 6) 朝位孝二・細田 尚：移流方程式の数値解析，水工学における計算機利用の講習会講義集（土木学会水理委員会基礎水理部会），13-22，1999.
- 7) Iwasa, Y., Hosoda, T. and Yokosi, S.: Flow behaviors in headrace tunnel of run-of-the river power stations, Proc. International Symposium of Channel Flow and Catchment Runoff, Univ. of Virginia, 669-678, 1989.
- 8) Iwasa, Y.: Analytical considerations on cnoidal and solitary waves, Memoirs Faculty of Engineering, Kyoto University, Vol.17, No.4, 1955.
- 9) 細田 尚・岩佐義朗：開水路における波動の分散性，第26回水理講演会論文集，401-407，1982.
- 10) 細田 尚・多田彰秀：鉛直加速度を考慮した基礎式系による開水路流れ定在波の水面形解析，水工学論文集，第38巻，457-462，1994.
- 11) Madsen, P.A., Murry, R. and Sorensen, O.R.: A new form of Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics, Coastal Eng., Vol.15, 374-388, 1991.
- 12) Nwogu, O.: Alternative form of Boussinesq equations for nearshore wave propagation, Journal of Water, Port, Coastal and Ocean Engineering, ASCE Vol.119, No.6, 618-638, 1993.
- 13) 音田慎一郎・細田 尚・木村一郎：鉛直加速度を考慮した水深積分モデルの改良と多次元数値解析結果を用いた検証について，水工学論文集，第46巻，589-594，2002.
- 14) Kennedy, J.F.: The mechanics of dunes and antidunes in erodible channels, Journal of Fluid Mech., Vol.16, Part 4, 1963.
- 15) Hayashi, T.: Formation of dunes and antidunes in open channels, Proc. ASCE, Vol.96, HY2, 357-366, 1970.
- 16) Iwasa, Y. and Kennedy, J.F.: Free surface shear flow over a wavy bed, Proc. ASCE, Vol.94, HY2, 431-454, 1968.
- 17) 日野幹雄・宮永洋一：波状境界をもつ二次元管路流の解析，土木学会論文報告集，No.264, 63-75, 1977.
- 18) Kobayashi, N.: Turbulent flows over a wavy boundary and formation of bed forms in erodible channels, Dissertation for the degree of Ph.D. at MIT, 1979.
- 19) 細田 尚・余越正一郎・岩佐義朗：3次元波状路床上の流れに関する解析，広島大学工学部研究報告，第32巻，第1号，47-51，1983.
- 20) 細田 尚・村本嘉雄・宮本雅章：水深積分モデルによる波状路床上の流れの底面せん断応力解析，土木学会論文集 No. 558/2-38, 81-89, 1997.
- 21) 細田 尚・余越正一郎：高速湾曲流に関する二、三の検討，土木学会論文集，第387/II-8, 171-178, 1987.
- 22) 岩佐義朗・細田 尚：漸縮水路の高速流に関する数値解析，京都大学防災研究所年報，第32号，B-2, 657-667, 1989.
- 23) 岩佐義朗・細田 尚・河村直明・米山 望：高速流における水際線の取扱いとその適用について，

水工学論文集, 第 35 卷, 531-36, 1991.

- 24) Hosoda, T. and Kimura, I.: Vortex formation with free surface variations in shear layer of plane-2D open channel flow, Proc. of 9th International Symposium on Turbulent Shear Flows, Vol.1, P112, 1-4, Kyoto, Japan, 1993.
- 25) 木村一郎・細田 尚・友近文志: 開水路流れ混合層におけるせん断不安定波動の空間的増幅特性, 土木学会論文集, No.509/II-30, 99-109, 1995.
- 26) Kimura I. and Hosoda T.: Fundamental properties of flows in an open channel with a rectangular dead zone, Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, Vol.123, No.2, 98-107, 1997.
- 27) Kimura, I. and Hosoda, T.: Numerical simulation of tidal vortices in the Naruto Straits, CD-Proc. of the 28th Congress of the International Association for Hydraulic Research, Graz, Austria, 6p, 1999.
- 28) Kimura I., Hosoda T., Muramoto, Y. and Yasunaga, R.: Numerical analysis of horizontal vortices in compound open channel flows by the two-layered flow model, Proc. of the 27th Congress of the International Association for Hydraulic Research, Theme A, 823-828, 1997.
- 29) 細田 尚・長田信寿・村本嘉雄: 移動一般座標による開水路非定常流の数値解析, 土木学会論文集 No.553/2-34, 267-272, 1996.
- 30) 長田信寿: 一般座標系を用いた平面 2 次元非定常流れの数値解析, 水工学における計算機利用の講習会講義集 (土木学会水理委員会基礎水理部会), 61-76, 1999.
- 31) 村本嘉雄・井上喬之: 開水路彎曲流の内部機構, 京大防災研究所年報, 第 8 号, 415-428, 1965.
- 32) Kalkwijk, J.P.Th. and De Vriend, H.J.: Computation of the flow in shallow river bends, Journal of Hydraulic Res., 18, No.4, 327-342, 1980.
- 33) Ikeda, S. and Nishimura, T.: Flow and bed profile in meandering sand-silt rivers, Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, Vol.112, No.7 (1986), 562-579.
- 34) Johansson, H. and Parker, G.: Secondary flow in mildly sinuous channel, Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, Vol.115, No.3 (1989), 289-308.
- 35) 西本直史・清水康行・青木敬三: 流線の曲率を考慮した蛇行水路の河床変動計算, 土木学会論文集, No.456/II-21, 11-20, 1992.
- 36) 細田 尚・長田信寿・岩田通明・木村一郎: 一般座標系での主流と 2 次流の遅れを考慮した平面 2 次元モデル, 水工学論文集, 第 44 卷, 587-592, 2000.
- 37) 長田信寿・細田尚・村本嘉雄: 河岸侵食を伴う河道変動の特性とその数値解析手法に関する研究, 土木学会論文集, No.621/II-47, 23-39, 1999.
- 38) Engelund, F.: Flow and bed topography in channel bends, J. Hydraulic Div., ASCE, 100(11), 1631-1648, 1974.
- 39) Hicks, F.E., Jin, Y.C. and Steffler, P.M.: Flow near sloped bank in curved channel, Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, Vol.116, No.1, 55-70, 1990.
- 40) 細田 尚: 任意曲面上の開水路流れの水深積分モデルとその応用について, 水工学論文集, 第 45 卷, 607-612, 2001.
- 41) 細田 尚・井上和也・多田彰秀: 管路・開水路流れ境界面の伝播を考慮した非定常流の数値解析法, 京都大学防災研究所年報, 第 36 号 B-2, 593-605, 1993.
- 42) 多田彰秀・細田 尚・井上和也: 管路・開水路流れ境界面の発生する管水路のサージ現象, 京都大学防災研究所年報, 第 37 号 B-2, 475-488, 1994.
- 43) 細田 尚・多田彰秀・井上和也・北原政宏: 管路・開水路流れ境界面の伝播を伴う急変非定常流の解析法に関する基礎的研究, 土木学会論文集, No.503/II-29, 89-97, 1994.
- 44) 細田 尚・多田彰秀・岩田道明・村本嘉雄・古八健夫: 地表流と地下水路流の相互作用を考慮した非定常流解析法, 応用力学論文集 Vol.1, 293-301, 1998.
- 45) Shimizu, Y. and Itakura, T.: Calculation of bed variation in alluvial channels, Journal of Hydraulic Engineering, Vol.115, No.3, 367-384, 1987.
- 46) Fukuoka, S., Watanabe, A. and Okada, S.: Analysis of bed topography in a compound meandering channel using a 3-D numerical model with assumption of hydrostatic pressure, Journal of Hydroscience and Hydraulic Engineering, Vol.17, No.2, 97-105, 1999.
- 47) 福岡捷二・西村達也・高橋晃・川口昭人・岡信昌利: 越流型水制工の設計法の研究, 土木学会論文集, No.593/II-43, 51-68, 1998.
- 48) 福岡捷二・富田邦裕・堀田哲夫・宮川朝浩: 橋脚まわりの局所洗掘推定のための実用的数値シミュレーションの開発, 土木学会論文集, No.497/II-28, 71-79, 1994.
- 49) 檜谷 治: 河川および浅水湖の 3 次元流れと平面 2 次元河床変動に関する研究, 京都大学学位論

文, 1992.

- 50) 牛島 省・清水隆夫・保坂 稔: 局所洗掘数値解析手法の発電所放水口前面への適応性, 水工学論文集, 第 42 巻, 1009-1014, 1998.
- 51) 瀬津家久・山上路生: 非定常開水路流れの内層における乱流構造に関する数値計算, 水工学論文集, 第 46 巻, 397-403, 2002.
- 52) Takizawa, A., Koshizuka, S. and Kondo, S.: Generalization of physical component boundary fitted co-ordinate (PCBFC) method for the analysis of free-surface flow, International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol.15, 1213-1237, 1992.
- 53) 木村一郎・細田 尚・音田慎一郎: 完全スタガード移動一般曲線座標系における開水路乱流シミュレータの開発, 四日市大学環境情報論集, Vol.5, 145-170, 2002.
- 54) Pope, S.B.: A more general effective viscosity hypothesis, J. Fluid Mech., Vol.72, 331-340, 1975.
- 55) Gatski, T.B. and Speziale, C.G.: On explicit algebraic stress models for complex turbulent flows, J. Fluid Mech., Vol.254, 59-78, 1993.
- 56) Kimura, I. and Hosoda, T.: 3-D unsteady flow structures around rectangular column in open channels by means of non-linear $k-\epsilon$ model, Proc. of 1st International Symposium on TURBULENCE and SHEAR FLOW PHENOMENA, Santa Barbara, USA, 1001-1006, 1999.
- 57) 木村一郎・細田 尚: 乱れ強さ非負条件を考慮した非線形 $k-\epsilon$ モデルによる立方体周辺の流れの三次元解析, 水工学論文集, Vol.44, 599-604, 2000.
- 58) Hosoda, T., Sakurai, T., Kimura, I. and Muramoto, Y.: 3-D computations of compound open channel flows with horizontal vortices and secondary currents by means of non-linear $k-\epsilon$ model, Journal of Hydroscience and Hydraulic Engineering, Vol.17, No.2, 87-96, 1999.
- 59) 木村一郎・細田 尚・音田慎一郎・富永晃宏: 非線形 $k-\epsilon$ モデルによる斜め越流型水制周辺の三次元流況に関する数値解析, 応用力学論文集, Vol.5, 2002 (印刷中).
- 60) 吉川秀夫編: 流砂の水理学, 丸善, 1985.
- 61) 中川博次・辻本哲郎: 土木学会編 新体系土木工学 23 移動床流れの水理, 技報堂出版, 1986.
- 62) 土木学会水理委員会「洪水流の三次元流況と流路形態」研究小委員会: 洪水流の三次元流況と流路形態に関する研究 (小委員会報告書), 1982.
- 63) 村本嘉雄: 流路形態, 土木学会水工学シリーズ, A-8, 1976.
- 64) 土木学会水理委員会「流砂量と河床形状」研究小委員会: 流砂量と河床形状に関する研究 (小委員会報告書), 1990.
- 65) 土木学会水理委員会基礎水理部会: 水理講演会 10 年の歩みとこれからの基礎水理学の展開 (基礎水理部会報告書), 1999.
- 66) 関根正人: 掃流砂・浮遊砂に関する最近の研究をふりかえって, 水理講演会 10 年の歩みとこれからの基礎水理学の展開 (基礎水理部会報告書), 55-60, 1999.
- 67) 長田信寿: 流路変動過程の数値解析法とその応用に関する研究, 京都大学学位論文, 1998.
- 68) 長谷川和義: 沖積蛇行の平面および河床形状と流れに関する水理学的研究, 北海道大学学位論文, 1983.
- 69) 平野宗夫: Armoring をともなう河床低下について, 土木学会論文報告集, 第 195 号, 55-65, 1971.
- 70) 芦田和男・江頭進治・劉 炳義: 蛇行流路における流砂の分級および河床変動に関する数値解析, 水工学論文集, 第 35 巻, 383-390, 1991.
- 71) 細田 尚・加藤隆彰: 水深積分モデルによる砂堆の発生・発達過程の数値シミュレーション, 水工学論文集, 第 44 巻, 617-622, 2000.
- 72) Nakagawa, H. and Tsujimoto, T.: Sand bed instability due to load motion, Proc. ASCE, Vol. 106, HY12, 2029-2051, 1980.
- 73) 黒木幹男・岸 力: 中規模河床形態の領域区分に関する理論的研究, 土木学会論文報告集, 第 342 号, 87-96, 1984.
- 74) 清水康行・板倉忠興・山口甲: 2 次元モデルを用いた河床形態変化のシミュレーション, 第 31 回水理講演会論文集, 689-694, 1987.
- 75) Nelson, J. and Smith, J.: Flow in meandering with natural topography, River Meandering, Water Resources Monograph 12, American Geophysical Union, 69-102, 1989.
- 76) 清水康行・Tubino, M.: 渡邊康玄: 自由砂州と固定砂州の共鳴条件における河床変動計算, 水工学論文集, 第 36 巻, 15-22, 1992.
- 77) 渡邊康玄・Tubino, M.: 掃流砂・浮遊砂を伴う流れの交互砂州の発生に関する研究, 水工学論文集, 第 36 巻, 7-14, 1992.

- 78) 芦田和男・江頭進治・劉 炳義：二層モデルによる複断面河道の流れおよび河床変動の数値解析，京大防災研究所年報，第 35 号 B-2，41-62，1992.
- 79) 竹林洋史：直線河道の砂州に関する土砂水理学的研究，立命館大学学位論文，1999.
- 80) 長田信寿・内倉嘉彦・細田尚・矢部昌之・高田保彦・岩田通明・村本嘉雄：各種河道条件下における交互砂州の挙動について，水工学論文集，第 43 巻，743-748，1999.
- 81) Kurabayashi, H., Shimizu, Y. and Fujita, M.: Numerical calculation of bed deformation in multiple and braided bar stream, Journal of Hydrosience and Hydraulic Engineering, Vol.20, No.1, 127-136, 2002.
- 82) Ikeda, S., Parker, G., Sawai, K.: Bend theory of river meanders. Part 1. Linear development, Journal of Fluid Mech., Vol. 112, 363-377, 1981.
- 83) 清水康行・平野道夫，渡邊康玄：河岸侵食と自由蛇行の数値計算，水工学論文集，第 40 巻，921-926，1996.
- 84) 長田信寿・細田 尚・村本嘉雄・Md. Munsur Rahman：移動一般座標系による側岸侵食を伴う河道変動の数値解析，水工学論文集，第 40 巻，927-932,1996.
- 85) Nagata, N., Hosoda, T., and Muramoto, Y.: Numerical analysis of river channel processes with bank erosion, Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, Vol.126, No.4, 243-252, 2000.
- 86) Peng, J., Tamai, N. and Kawahara, Y.: Numerical modeling of local scour with spur dikes, Proc. 28th IAHR Congress, B110-B115, 1999.
- 87) Nagata, N., Hosoda, T., Nakato, T. and Muramoto, Y.: 3D numerical simulation of flow and local scour around a cylindrical pier, Journal of Hydrosience and Hydraulic Engineering, Vol.19, No.2, 113-125, 2001.
- 88) 長田信寿・細田尚・村本嘉雄・中藤達昭：3次元移動座標系・非平衡流砂モデルによる水制周辺の河床変動解析，土木学会論文集，No.684/II-56. 21-34，2001.