

水工学シリーズ 00-B-3

設計波の合理的な設定法

新潟大学工学部建設学科教授

泉 宮 尊 司

土 木 学 会
海岸工学委員会・水理委員会
2000年8月

設計波の合理的な設定法

Estimation of Design Wave Height Based on Extreme Statistics Theory

泉宮 尊司

Takashi Izumiya

1. はじめに

海岸・海洋構造物に限らず、あらゆる土木構造物は自然の外力に曝されており、それらの外力に対して、可能な限り安全な構造物を設計し建設することが土木技術者に求められている。このため、地震力、波力、流体力、降雨や流量等の自然の外力の統計的性質を正確に把握することがまず必要であり、さらに構造物の強度や破壊に至るまでの変形過程を精度よく推定できることが要求される。海岸・海洋構造物を対象とした場合、設計波の合理的な設定法は、おそらく2つの段階に分けられるであろう。設計波の合理的な設定法の第1段階は、観測された極値波浪データから、その母集団の統計的性質を可能な限り正確に見出すことである。このことは言い換えると、母集団の確率分布関数を可能な限り精度よく推定することである。そして合理的な設定法の第2段階は、外力の確率分布特性がある精度で求められた時、いかなる外力あるいは変形量の代表量を用いれば、安全で経済性のある構造物を設計できるかという課題に対して、多くの人々の納得のいく解答を得ることである。

これまで合理的な設定法の第1段階の研究は、海岸の分野では合田(1967, 1975)により始められ、確率波高の推定手法が具体的に紹介されてから、極値波浪の解析にGumbel分布(二重指数分布)やワイブル分布を適用することが一般的に用いられるようになった。その後、合田(1988, 1990b)により最小二乗法による母数推定法の精力的な研究が進められ、プロットング公式の改良や棄却基準さらには信頼区間の経験式による推定法などが提案され、それらの手法が一般的に用いられるようになってきている。これらについては、合田(1990b, 1997)に取りまとめられているので一度精読されたい。

設計波の設定法の第2段階である代表量の決定に関しては、現在では50年再現確率値を用いる場合が多くなってきている。この50年再現確率値は、平均して50年に一度発生する高波の下限値であって、供用年数が約50年と考えられている海岸構造物に関しては一つの目安になるものである。しかしながら、この外力に対して構造物が安全になるように設計されても、50年の間に一度も被災せずに安全に機能していることを必ずしも保証するものではない。それは、50年間中には50年再現確率値よりも大きな波高(外力)に曝される確率が63%程度あり、確率的にはより大きな外力が作用することもあるにも拘らず、それ以上の外力に対しては何の安全照査も行っていないからである。したがって、設計波の第2段階の合理的な設定法としては、構造物の供用年数内において、あらゆる大きな波高に対して確率論的に構造物の安全度を評価し、さらに経済性をも考慮して設計波を決めることである。このような設計は信頼性設計と呼ばれ、近年海岸・港湾の分野においても研究が盛んになりつつあるテーマである。この信頼性設計については、本夏期研修会において高山教授が詳しく解説されるので、是非参照されたい。

本講義集では、上に述べた第1段階の設計波の合理的な設定法に関する事柄について取扱い、一般の極値解析で用いられている種々の母数推定法や信頼性設計を精度良く行うために必要なより精度の高い母数推定法や気象原因を考慮した確率統計量の分散の推定法、ならびに実務的な設計波の設定法における諸課題等について述べることにする。

2. 極値統計解析の基礎的知識

波浪や高潮などの極値データを用いて、再現期間(return period)や再現確率統計量(return value)を求める際には、事象ごとの極大値を使用する方法と1年毎あるいは期間を定めてその期間の最大値を使用する方法がある。前者の資料は極大値資料と呼ばれ、後者は毎年最大値資料あるいは期間最大値資料と呼ばれている。毎年最大値資料の場合には、観測年数分しかデータが使えないので、その年数が少ない事象の解析には不向きである。一方極大値資料を用いる場合には、標本数 N は観測年数 K と極値の平均発生率 λ との積でほぼ表され

大きな数となるため、推定誤差を小さくすることができるが、現象の等質性 (homogeneity) (同一の統計的性質をもった母集団に属していること) を確認することはそう簡単ではない。一般に極値統計解析においては、極値事象の独立性 (independency) とこの等質性を満たすことが大前提となっており、特に極大値資料を用いる場合にはその確認を必ず行っておくことが望ましい。この独立性の確認には、事象の時系列としての自己相関係数の変化を調べる方法がよく用いられる (藤野ら, 1981)。すなわち、自己相関係数が最初に 0 となる時間が時化の平均的な寿命時間であり、その時間以上であれば波高の極大値間の相関は小さく、ほぼ独立であると思わせるのである。合田ら (1998) は、太平洋沿岸の波浪に対して 48 時間以上であれば独立であるとしている。また、山口ら (1999) もノルウエー沿岸の波浪の時系列を解析して、48 時間程度以上とすることが望ましいと述べている。

2.1 極値分布関数とその特性

極値の統計解析を行うにあたって、母分布関数の自由度が余り大きくならないように、その極値がどのような種類の確率分布に従うかを予め予想しておく必要がある。極値データは、ある母集団から抽出された標本数 N の中の最大値あるいは最小値であり、この量は確定量ではなく確率変数となり、母集団の確率分布と標本数 N に依存した確率分布に従う。この極値の確率分布は、Fisher・Tippett(1928) によって、標本の大きさ N が十分に大きいとき、3つの確率分布に漸近的に収束することが示された。その後、Gumbel(1958) によって、体系的な研究が行われ、極値 I 型分布、II 型分布、III 型分布として分類されている。ここで、非超過確率分布関数を $F(x)$ 、確率密度関数を $f(x)$ とすると、それらの分布は、

(1) 極値 I 型分布 { FT - I 型分布, Gumbel 分布 : $(-\infty < x < \infty)$ }

$$F(x) = \exp \left\{ -\exp \left(-\frac{x-B}{A} \right) \right\}, \quad f(x) = \frac{1}{A} \exp \left\{ -\frac{x-B}{A} - \exp \left(-\frac{x-B}{A} \right) \right\} \quad (1)$$

(2) 極値 II 型分布 { FT - II 型分布, フレッシュエ分布 : $(B - kA < x < \infty)$ }

$$F(x) = \exp \left\{ -\left(1 + \frac{x-B}{kA} \right)^{-k} \right\}, \quad f(x) = \frac{1}{A} \left(1 + \frac{x-B}{kA} \right)^{-(1+k)} \exp \left\{ -\left(1 + \frac{x-B}{kA} \right) \right\} \quad (2)$$

(3) 極値 III 型分布 { FT - III 型分布 : $(-\infty < x \leq B)$ }

$$F(x) = \exp \left\{ -\left(\frac{B-x}{A} \right)^k \right\}, \quad f(x) = \frac{k}{A} \left(\frac{B-x}{A} \right)^{k-1} \exp \left\{ -\left(\frac{B-x}{A} \right)^k \right\} \quad (3)$$

で表される (合田, 1990b)。ここに、 A 、 B および k はある定数で分布関数の母数と呼ばれ、それぞれ尺度母数 (scale parameter)、位置母数 (location parameter) および形状母数 (shape parameter) と呼ばれている。なお、変数 $y = (x-B)/A$ は、基準化変量 (reduced variate) と呼ばれ、非超過確率が与えられたときに逆関数を求める際によく使用される変数である。

極値 I 型分布は、母集団のもとの確率分布が変数の大きい値で指数関数的に減少している場合の漸近分布であり、指数分布や Gauss 分布の極値がこの分布に従うことが示されている。一方、極値 II 型分布は、上方の裾部がべき乗で減少する場合の漸近分布で、Cauchy 分布などに従うデータの極値がこの分布に属する。極値 III 型分布は、標本の母集団に上限がある場合の漸近分布であり、最大側の極値を問題とする場合が多いので、これ以上の説明は省略する。

上記の 3 種類の極値分布を統一的に関数表示した分布関数は、一般化極値分布 (GEV: Generalized Extreme Value Distribution) と呼ばれ、Jenkinson(1955) によって提案されている。この分布は、極値 II 型分布の形状母数 k を $k = -1/\kappa$ として κ に置き換えたものに等しく、 $\kappa = 0$ が極値 I 型分布、 $\kappa < 0$ が極値 II 型分布、 $\kappa > 0$ が極値 III 型分布を表す (合田, 1990b)。この他に、極値統計解析によく用いられる分布関数として、次に示すワイブル分布および対数正規分布が挙げられる。

(4) ワイブル分布 ($B \leq x < \infty$)

$$F(x) = 1 - \exp \left\{ -\left(\frac{x-B}{A} \right)^k \right\}, \quad f(x) = \frac{k}{A} \left(\frac{x-B}{A} \right)^{k-1} \exp \left\{ -\left(\frac{x-B}{A} \right)^k \right\} \quad (4)$$

(5) 対数正規分布 ($0 < x < \infty$)

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}Ax} \exp \left\{ -\frac{(\ln x - B)^2}{2A^2} \right\} \quad (5)$$

なお、水文学の分野では降雨強度や河川流量の極値統計解析に、ピアソン III 型分布、平方根指数型最大値分布および 3 母数対数正規分布などが用いられている。それらの適用については、神田・藤田 (1982) を参照されたい。

極値統計解析により母分布関数の母数を推定する際に、毎年最大値資料を用いる場合と極大値資料を用いる場合とでは、用いる母分布関数は一般的には異なる。これらの母分布関数の関係は、極値の発生頻度分布がポアソン過程に従うことにより導かれる。すなわち、極値の発生が独立で稀現象とみなされる場合には、次の関係が成立する (亀田ら, 1981)。

$$F(x) = \exp \{-\lambda[1 - F^*(x)]\}, \quad F^*(x) = 1 + \frac{1}{\lambda} \ln F(x) \quad (6)$$

ここに、 $F(x)$ 年最大値資料の母分布関数、 $F^*(x)$ は極大値資料の母分布関数であり、 λ は極大値の年平均発生率である。上式の関係より、極大値資料の母分布関数がワイブル分布 ($k = 1.0$) (指数分布) であれば、年最大値資料の分布関数は極値 I 型分布 (Gumbell 分布) となることは容易に分かる。なお、式 (6) の関係を用いる際には、極値の発生頻度分布がポアソン分布に従っているかどうかを、 χ^2 検定等で確認しておくことも必要であろう。簡単な確認法として、ポアソン分布では発生頻度分布の平均値と分散が等しくなる性質があるので、その性質を利用して近似的に等しいかを調べてみるのもよいであろう。

2.2 再現期間と再現確率統計量

年最大値資料の確率分布関数 $F(x)$ の母数が特定されると、再現期間 (return period) や再現確率統計量 (return value) が求められる。再現期間 R とは、ある特定の値 x_R を超える時間間隔の平均値 (期待値) であり、分布関数と次の関係式で表される。

$$R = \frac{1}{1 - F(x_R)}, \quad F(x_R) = 1 - \frac{1}{R} \quad (7)$$

極大値資料により得られた分布関数 $F^*(x)$ を用いる場合には、極値の年平均発生率を λ とすると、極大値の平均発生時間単位が $1/\lambda$ 年となるので、 R 年の再現期間内では λR の時間単位に相当するので、 $R \rightarrow \lambda R$ と置き換えることにより、次の関係式が導かれる。

$$R = \frac{1}{\lambda\{1 - F^*(x_R)\}}, \quad F^*(x_R) = 1 - \frac{1}{\lambda R} \quad (8)$$

なお、年最大値資料および極大値資料の分布関数の関係式 (6) を用いて評価することもできる。その時の再現確率の差異は $1/2$ 年と十分に小さく、 R 年が 50 年、100 年と大きい場合には無視できる大きさである (合田, 1990b)。

再現期間 R 年が与えられた時、式 (7) あるいは式 (8) の関係を満たす x_R は、 R 年再現確率統計量と呼ばれる。逆関数 F^{-1} を用いて表すと、

$$x_R = F^{-1} \left(1 - \frac{1}{R} \right), \quad x_R = F^{*-1} \left(1 - \frac{1}{\lambda R} \right) \quad (9)$$

となる。したがって、 R 年確率統計量 x_R は、 R 年に期待値として 1 回生じる事象の下限値であるといえる。

2.3 母数推定法

波浪や高潮などの極値統計資料が整理されて与えられたとき、それらのデータを用いて、母分布関数の母数を推定し、確率分布関数を特定する必要がある。母数を推定する方法には、最小二乗法、積率法、確率加重平均積率法、最尤法および重み付最小二乗法の 5 種類の方法がある。これらの推定法の中で、設計波の実務的な設定法としては、合田 (1990b) による最小二乗法が一般的に用いられているようである。

(1) 最小二乗法 (LSM : Least Squares Method)

最小二乗法は、大きさの順番に並び替えられた極値データに適切な非超過確率を割り当てて、図より母数を推定する図式解法を定式化したものである。いま、順序統計量 x_m に対して割り当てられたプロット確率を F_m とすると、次の非超過確率の二乗残差を最小とする母数 A および B を求める方法がまず考えられる。

$$S = \sum_{m=1}^N \varepsilon_m^2 = \sum_{m=1}^N \{F_m - F(x_m, A, B)\}^2, \quad F_m = 1 - \frac{m - \alpha}{N + \beta} \quad (10)$$

ここに、 N は標本数、 m は大きい順番に並べた時の順位である。この方法では、 $\partial S / \partial A = 0$ および $\partial S / \partial B = 0$ を満たす方程式は、一般的には非線形関係式となり、Newton-Raphson 法などを用いて解かなければならないので計算が複雑となる欠点がある。そこで、基準化変量 y_m を導入して、次に示す二乗残差を最小とするように母数を決定する方法が提案されている。

$$S = \sum_{m=1}^N \varepsilon_m'^2 = \sum_{m=1}^N (x_m - Ay_m - B)^2, \quad y_m = F^{-1}(F_m) \quad (11)$$

この方法では母数が容易に求められ、適合の度合いも図から目視で確認できるので、海岸の分野では広く用いられている。しかしながら、最小二乗法による母数推定法では、いずれのプロット確率公式を用いるかによって、推定される母数や再現確率統計量の値が変化するという欠点があった。この欠点に関しては、合田 (1988, 1990b) は 10000 ケースのモンテカルロシミュレーションを行い、バイアス (真値からの偏差) が殆ど生じないプロット確率公式を提案して解決している。また、泉宮・斎藤 (1997, 1998) は有限個のデータに対して、バイアスが生じない条件、すなわち不偏性条件式を理論的に導き、その有効性を確認すると同時に、合田によるプロット確率公式の有効性も確認している。合田によって推奨されているプロット確率公式は、

$$F_m = 1 - \frac{m - \alpha'}{N_T + \beta}, \quad (m = 1, 2, \dots, N) \quad F_i = \frac{i - \alpha}{N_T + \beta}, \quad (i = N_T - N + 1, \dots, N_T) \quad (12)$$

の形で表される。ここに、 N_T は極大値の総数である。係数 α 、 α' および β は、FT-I 型分布の場合には Gringorten 公式、ワイブル分布に関しては合田 (1988) による修正 Petruaskas and Aagaard 公式、FT-II 型分布に対しては合田・小野澤公式 (1990) が良いとされている。上述のプロット確率公式を用いて F_m の値が求められると、次に基準化変量 y_m を次式により計算する。

$$\begin{aligned} \text{極値 I 型分布: } y_m &= -\ln[-\ln F_m], & (\alpha' = 0.44, \beta = 0.12) \\ \text{極値 II 型分布: } y_m &= k\{(-\ln F_m)^{-1/k} - 1\}, & (\alpha' = 0.20 + 0.27/\sqrt{k}, \beta = 0.20 + 0.23/\sqrt{k}) \\ \text{ワイブル分布: } y_m &= \{-\ln(1 - F_m)\}^{1/k}, & (\alpha' = 0.44 + 0.52/k, \beta = 0.12 - 0.11/k) \end{aligned}$$

式 (11) を最小にする母数 A および B は容易に求められ、その推定値を $\hat{A}$ および $\hat{B}$ とすると、 R 年再現確率統計量の推定値 $\hat{x}_R$ は、式 (7) あるいは式 (8) により、 $\hat{x}_R = \hat{A}y_R + \hat{B}$ より算定される。

後者の最小二乗法を用いる場合、候補分布関数は 2 母数のものに限られる。合田 (1988) は Petruaskas and Aagaard にない、Gumbel 分布とワイブル分布の形状母数を、 $(k = 0.75, 0.85, 1.0, 1.1, 1.25, 1.5, 2.0)$ の 8 種類の分布関数を候補として、最小二乗法による母数推定を行い、相関係数が最大の分布関数を採用する方法を提案した。その後、合田 (1990b) は FT-II 型分布関数も取り入れて、Gumbel 分布、ワイブル分布 ($k = 0.75, 1.0, 1.4, 2.0$) および FT-II 型分布 ($k = 2.5, 3.33, 5.0, 10.0$) の 9 種類を候補分布関数とすることを提案している。これは、著者なりに解釈すると、なるべく広範囲の分布関数にあてはめて、様々な波浪条件にも適用できるようにすること、および overfitting (ある特定の標本には非常によく適合するが、データの一部が追加されたり削除されたりすると、適合度が急に低下するようなことが起きることで、3 母数分布関数の場合にはよく起きる) を回避し、極値データが追加されても安定した推定値が得られるようにしたものと考えられる。

(2) 積率法 (MOM: Method of Moments)

積率法は、標本の統計学的モーメントである平均値 μ_x や分散 σ_x などと母分布関数から得られる理論値が一致するように、尺度母数 A や位置母数 B の値を求めるものである。たとえば、母分布関数が FT-I 型分布の場合には、平均値が $B + A\gamma$ 、分散値が $\pi^2 A^2 / 6$ で表されることから、

$$\mu_x = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N x_m = B + A\gamma, \quad \sigma_x^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{m=1}^N (x_m - \mu_x)^2 = \frac{\pi^2 A^2}{6} \quad (13)$$

なる関係式を用いて、母数 A および B を推定する方法である。ここに、真の母分布関数の分散 σ^2 の不偏推定量（推定量の期待値が母分布の真の値に一致するような推定値） σ_x^2 は上式に示されているように、分母の値は $N-1$ である。母分布関数が 3 母数の場合には、skewness の不偏推定値を用いて形状母数等を推定する必要がある。これについては、岩井・石黒 (1970) および藤田・神田 (1982) に例示されているので参照されたい。この積率法による母数推定法は、計算が簡便である利点を有するが、標本数が小さい場合にはバイアスが存在することが知られている（山口ら, 1995；泉宮・斎藤, 1997）。

(3) 確率加重平均積率法 (PWM: Method of Probability Weighted Moments)

この母数推定法は、確率変数 x に対して、非超過確率 F および $1-F$ のべき乗の重みを付けた積率を定義し、その積分値と標本から求められる積率とが等しいとして母数を推定する方法である。

$$\beta_{p,r,s} = \int_0^1 x(F)^p F^r [1-F]^s dF, \quad \beta_r = E\{x(F)[F(x)]^r\} = \int_0^1 x(F) F^r dF \quad (14)$$

この方法は、Greenwood ら (1979) によって提案された方法で、非超過確率の重みが付けられているためその積率の変動が小さくなり、通常の積率法 (MOM) に比べて推定精度が向上することが期待されるが、プロットイングポジションの問題が完全には解決されていない。この推定法の波浪解析への適用例として山口ら (1995) の研究があり、最小二乗法より推定精度が高くなることが示されている。しかしながら、標本数が 100 以下の少ない場合には、この PWM では有意なバイアスが存在しているようであり、プロットイング公式の改良が必要であると思われる。

(4) 最尤法 (MLM: Maximum Likelihood Method)

最尤法は、Fisher によって考案された母数推定法で、確率密度関数が $f(x; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p)$ である母集団から抽出した標本を $x_1, x_2, \dots, x_N$ とするとき、これらの標本が抽出される確率 L は、

$$L = \prod_{i=1}^N f(x_i; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p) \quad (15)$$

と表されることから、逆にこの確率を最大にするように母数 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p$ を推定する方法である。この L は尤度関数とも呼ばれ、その対数をとったものは対数尤度と呼ばれ、後者は確率密度関数に指数関数が含まれる場合には計算が簡単になるためよく用いられる。その対数尤度を最大にする母数は、次式で与えられる。

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta_j} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial \ln f(x_i; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p)}{\partial \theta_j} = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, p) \quad (16)$$

種々の分布関数に対する尤度方程式は、神田・藤田 (1982) に詳しく記載されているので参照されたい。上式は、各々の母数に関して非線形連立方程式となる場合が一般であり、Newton-Raphson 法によって解くか、最大値検索プログラムを用いて推定値を得るかのいずれかによらなければならない。また、標本数が少ない場合には、推定値に有意なバイアスが生じることが知られている。このように、最尤法は計算が複雑でバイアスの問題があるが、母数推定誤差の分散は最小となり推定精度がより高いと言える。

(5) 重み付最小二乗法 (WLSM: Weighted Least Squares Method)

最小二乗法 (LSM) による母数推定法は、簡便でバイアスがない推定が可能であるという長所を有している反面、最適合分布関数を評価する最適な方法がないという欠点がある。一方、最尤法 (MLM) は推定精度は最も高いが、標本数が小さい場合には負のバイアスが生じることや非線形方程式を解かなければならないため、計算が複雑であるという欠点がある。そこで、これら 2 つの推定法の長所を併せ持ち、最尤法の欠点である計算の複雑性を取り除いた母数推定法を泉宮・岡本 (2000) が開発した。その推定法は、泉宮・斎藤 (1998) が示した順序統計量 x_i と x_j の同時確率分布が、漸近的に 2 次元正規分布に従うことを利用する。その関係を N 次元に拡張して考えると、順序統計量 x_i の期待値からの偏差 ε_i は、

$$\varepsilon_i = x_i - E(x_i) = x_i - Ay_i - B \quad (17)$$

多次元正規分布に漸近することから、以下の確率密度関数に漸近することが示される。

$$p(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{N}{2}} (\det \Sigma)^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (x - M\theta)^t \Sigma^{-1} (x - M\theta) \right\} \quad (18)$$

ここに、 N はデータ数、 y_i は順序統計量 x_i に対応する基準化変量、 Σ は順序統計量の分散共分散行列であり、

$$\Sigma = E[(x - M\theta)(x - M\theta)^t] \quad (19)$$

である。 M は、基準化変量 y_i で表される行列で、

$$M = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_N \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}^t \quad (20)$$

と表される。また、ベクトル x および母数ベクトル θ は次式で表される。

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_N)^t, \quad \theta = (A, B)^t \quad (21)$$

分散共分散行列 Σ は、泉宮・斎藤 (1998) が示しているように、母分布関数の真の分散 σ^2 に比例するので、

$$\Sigma = \sigma^2 \Sigma_N, \quad \det \Sigma = \sigma^{2N} \det \Sigma_N \quad (22)$$

と表される。ここに、 Σ_N は各要素が σ^2 で基準化された分散共分散行列である。上の関係式を式 (17) に代入すると、

$$p(x) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2} \right)^{\frac{N}{2}} \frac{1}{\sqrt{\det \Sigma_N}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} (x - M\theta)^t \Sigma_N^{-1} (x - M\theta) \right\} \quad (23)$$

となる。ここで、真の分散 σ^2 が一定値であるとする、基準化された分散共分散行列 Σ_N は、母数には関係しないので、順序統計量の同時確率密度関数の値を最大にするには、指数部の中の項を最大にすればよい。すなわち、

$$S(\theta) = (x - M\theta)^t \Sigma_N^{-1} (x - M\theta) \quad (24)$$

を最小にすればよいこととなる。この $S(\theta)$ を最小化する未知パラメタ θ は、次式で与えられる。

$$\hat{\theta} = (M^t \Sigma_N^{-1} M)^{-1} M^t \Sigma_N^{-1} x \quad (25)$$

上式より、推定される母数は、順序統計量の線形結合で表され、泉宮・斎藤 (1997) によって提案された母数推定法の一般形となっている。ここで、基準化された分散共分散行列 Σ_N が単位行列に一致する、あるいはそれに比例するならば、 $S(\hat{\theta})$ は、

$$\hat{\theta} = (M^t M)^{-1} M^t x \quad (26)$$

となり、最小二乗法の解に一致する。また、式 (23) の表現から分かるように、この母数推定法は順序統計量の分散の違いを考慮した重み付最小二乗法 (WLSM: Weighted Least Squares Method) であるといえる。

基準化された共分散行列 Σ_N の各要素 c_{ij} は、泉宮・斎藤 (1998) により得られた関係式より、FT-I 型分布の場合には、 $i < j$ に対して

$$c_{ij} = \frac{6(N + \alpha + \beta - j)}{N\pi^2(j - \alpha) \ln \left(\frac{i - \alpha}{N + \beta} \right) \ln \left(\frac{j - \alpha}{N + \beta} \right)} \quad (27)$$

となり、Weibull 分布の場合には、

$$c_{ij} = \frac{(i - \alpha) / [(\Gamma_{2k} - \Gamma_{1k}^2) N(N + \alpha + \beta - i)]}{k^2 \left\{ \ln \left(\frac{N + \alpha + \beta - i}{N + \beta} \right) \ln \left(\frac{N + \alpha + \beta - j}{N + \beta} \right) \right\}^{1-1/k}} \quad (28)$$

となる。ここに、 Γ_{nk} は Γ 関数を用いて、次式で表される。

$$\Gamma_{nk} = \Gamma \left(1 + \frac{n}{k} \right), \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (29)$$

なお、 $i > j$ の時には、式 (11) および式 (12) の右辺のみ i と j を入れ換えた式となる。この重み付最小二乗法 (WLSM) の推定精度については、次節で他の母数推定法と比較しながら紹介する。

2.4 各種母数推定法の比較

前節までに種々の母数推定法について簡便に紹介したが、果たしてどの母数推定法が最も良い推定法なのか、最も知りたいところである。しかしながら、その正確な答えを出すことは、かなり難しい問題なのである。それは、数学的には不偏推定量で信頼区間が最も小さい推定法が、最も良い推定法といえるであろうが、現実には設計外力として用いる場合には、小さい側に誤った場合をも想定して総合的に判断しなければならないからである。また、自然界で生じる現象は種々の原因によって生じているために、特性の異なる母集団が複数個存在していることも勘案しなければならないためである。ここでは、比較的簡単な数値シミュレーションを通して得られた結果を示し、それぞれの母数推定法の基礎的な特性について紹介することにする。

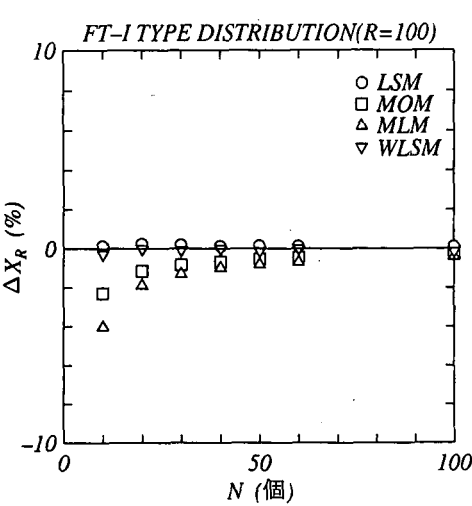


図-1 100年確率統計量のバイアスの比較 (FT-I型分布)

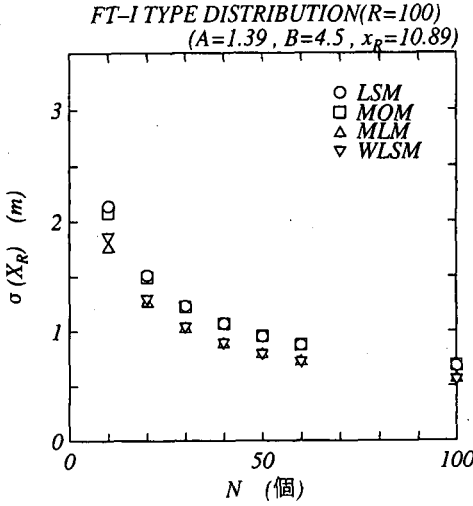


図-2 100年確率統計量の標準偏差の比較 (FT-I型分布)

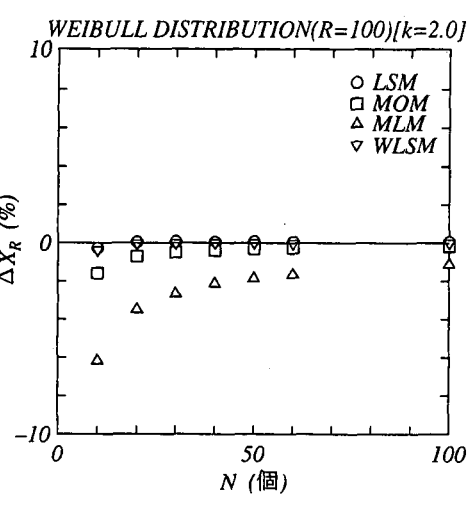


図-3 100年確率統計量のバイアスの比較 (ワイブル分布: $k=2.0$)

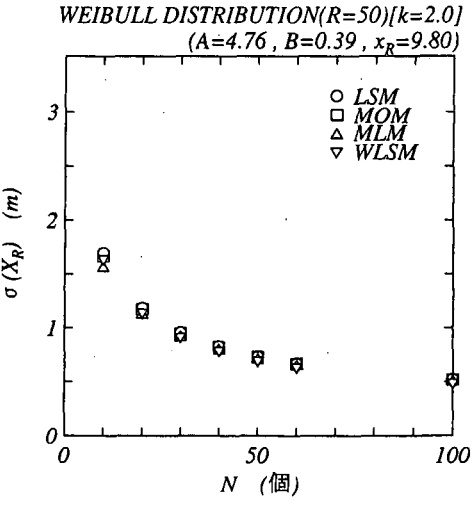


図-4 100年確率統計量の標準偏差の比較 (ワイブル分布: $k=2.0$)

図-1は、FT-I型分布 ($A=1.39, B=4.5$) に対する100年確率統計量のバイアスを各母数推定法ごとに示したものである(泉宮・岡本, 2000)。この数値シミュレーションにおいては、5000組の資料を作成して100年

確率統計量を評価したもので、プロットング公式は、バイアスが殆どないことが確認されている Gringorten 公式 (Gringorten, 1963) を用いている。この図において、LSM は従来の最小二乗法、MOM は積率法、MLM は最尤法であり、WSLM は重み付最小二乗法である。バイアスについては、重み付最小二乗法および従来の最小二乗法による推定値では、殆ど存在しないが、最尤法および積率法では標本数が 50 以下で、有意な負のバイアスが存在していることが分かる。このような傾向は、50 年および 200 年確率統計量についてもほぼ同様なことが確かめられている。

図-2 は、同じく FT-I 型分布に対する 100 年確率統計量の標準偏差を標本数 N に対してプロットしたものである。この図に見られるように、最尤法 (MLM) によるものが最も標準偏差が小さく、それに次いで線形推定法である重み付最小二乗法 (WSLM) が小さい。WSLM の標準偏差は、データ数が 30 以上であれば最尤法 (MLM) のそれにほぼ等しくなり、推定精度が高いことが分かる。それに対して、従来の最小二乗法 (LSM) および積率法 (MOM) では、 R 年確率統計量の標準偏差が約 1 割程度大きくなっている。

母集団分布がワイブル分布 ($k = 2.0$) の場合の 100 年確率統計量のバイアスおよび標準偏差の変化を図-3 および図-4 にそれぞれ示している。プロットング公式については、合田 (1988) による修正 Petruskas and Aagaard 公式を用いている。この場合にも、最尤法や積率法では負のバイアスがあり、前者では標本数が 100 においても 1 % 程度のバイアスが存在している。それに対して、最小二乗法 (LSM) や重み付最小二乗法 (WSLM) ではバイアスは殆ど存在していないことが分かる。一方、100 年確率統計量の標準偏差については、FT-I 型分布ほどの差異はないが、同様に最尤法および重み付最小二乗法の順に小さくなっている。したがって、バイアスについては従来の最小二乗法および重み付最小二乗法が優位であり、標準偏差では最尤法および重み付最小二乗法が優れていると言える。

3 適合度評価法

種々の候補分布関数に対して、それらの母数が推定された時、それらのうちのどの分布関数が最も真の母分布関数に近いかを判断することが必要となる。少し統計学を学んだ人は、確率分布の検定には χ^2 検定や Kolmogorov-Smirnov 検定などがあることを知っているであろうから、それらを適用してはと考えるかもしれない。しかしながら、それらの検定法を適用したとしても、数多くの候補分布関数から有意な差を付けて最も適合性の良いものを選び出すことは極めて困難である。それは、極値データの数自体がそれほど多くなく、しかもいずれも候補確率分布も 2 次モーメントあるいは 3 次モーメント (3 母数分布の場合) までほぼ等しい分布であるために、これらの検定法では有意な差異が付き難いからである。したがって、極値統計解析における適合度評価については、別途適切な評価基準が必要なのである。

波浪の極値統計解析においては、合田 (1988) にも見られるように相関係数が最大の分布関数を最適合として採用されてきた。すなわち、相関係数を r とすると、

$$r = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{x_i - \bar{x}}{\sigma_x} \frac{y_i - \bar{y}}{\sigma_y}, \quad \sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}, \quad \sigma_y = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2} \quad (30)$$

と表される。ここに、 σ_x は極値データの標準偏差、 σ_y は基準化変量 y_i の標準偏差であり、上付きバーは平均値を意味する。この最大相関係数を採用する方法は、計算が比較的簡単であるために、よく用いられている方法である。しかしながら、相関係数による方法は最良な方法であるとは必ずしも言えず、次に述べるような欠点がある。それは、一般の最小二乗法によって母数 A および B を求めると、回帰直線の勾配である A の推定値 $\hat{A}$ と相関係数との間には、

$$\hat{A} = r\sigma_x/\sigma_y, \quad \rightarrow \quad r = \hat{A}\sigma_y/\sigma_x \quad (31)$$

なる関係がある。ここで、標本が与えられた時、データの標準偏差 σ_x はいずれの分布関数に対しても同じ値であるから、相関係数が最大となるのは、 $\hat{A}\sigma_y$ の値が最大となる分布関数であり、そのような分布関数を採用しやすいということになる。この $\hat{A}\sigma_y$ の値については相関係数値は、分布関数と標本数 N に強く依存していることは、合田 (1990b) の数値シミュレーション結果からも明かとなっている。

このような相関係数による適合度基準を改良すべく、高棹ら (1986) によって基準化最小二乗平均誤差適合

基準 (SLSC) が提案された。SLSC 基準の値を S_L とすると、次式で表される。

$$S_L = \frac{\left\{ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{x_i - \hat{B}}{\hat{A}} - y_i \right)^2 \right\}^{1/2}}{|y_{.99} - y_{.01}|} = \frac{\left\{ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \hat{A}y_i - \hat{B})^2 \right\}^{1/2}}{\hat{A}|y_{.99} - y_{.01}|} \quad (32)$$

ここに、 $y_{.99} = F^{-1}(0.99)$ および $y_{.01} = F^{-1}(0.01)$ である。上式は、分子の二乗平均誤差を基準化変量の広がり幅で基準化したもので、分布関数の違いによる誤差変動を少なくする工夫がなされている。高棹ら (1986) は、この S_L の値が $S_L < 0.02$ であれば適合性が良いと判断され、 $S_L > 0.03$ の場合には適合性は余り良くなく、他の分布関数の適用を試みるべきとしている。宝・高棹 (1989) は合田による討議の中で、相関係数を用いる基準と SLSC 基準との間には、一意的な関係があり、SLSC 基準の有効性を指摘している。彼らの解析結果をみると、相関係数を用いる方法と SLSC 基準による適合順位は 1 位から 3 位までは全く同一であり、両者の適合度評価性能はほぼ同じであると考えられる。このことは、以下のようにして理論的に示すことができる (泉宮・野村, 2000)。

いま、極値データおよび基準化変量の平均値を、それぞれ $\bar{x}$ および $\bar{y}$ とすると、それらは十分な精度で $\bar{x} = \hat{A}\bar{y} + \hat{B}$ が成立する。この関係式と式 (31) を用いて、

$$\sum_{i=1}^N (x_i - \hat{A}y_i - \hat{B})^2 = \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x} + \bar{x} - \hat{A}y_i - \hat{B})^2 = \sum_{i=1}^N \{x_i - \bar{x} - \hat{A}(y_i - \bar{y})\}^2 \quad (33)$$

を計算すれば、 S_L と相関係数 r との関係が容易に得られる。

$$S_L = \frac{\sigma_y \sqrt{1-r^2}}{r(y_{.99} - y_{.01})} = \frac{\sigma_y}{(y_{.99} - y_{.01})} \sqrt{1/r^2 - 1} \simeq \frac{\sigma_y}{(y_{.99} - y_{.01})} \sqrt{2\Delta r} \quad (34)$$

ここに、 $\Delta r = 1 - r$ である。上式の関係より、基準化変量の標準偏差 σ_y と $y_{.99} - y_{.01}$ との比の値は、分布関数が定まればほぼ一定値とみなせるため、 S_L は相関係数 r に関して単調減少関数となっていることが分かる。分布関数を固定して考えると、 S_L と r との間には 1 対 1 の対応関係があり、分布関数が異なっても上述の比 $\sigma_y/(y_{.99} - y_{.01})$ の値が大きく変化しない場合にも 1 対 1 の関係が近似的に成立するのである。

これまで述べてきたように、相関係数や SLSC による適合度評価法は、簡便に評価できる反面、いずれも相関係数で表されるため分布関数や標本数に依存するといった欠点があり、分布関数の採択については慎重に行わなければならない。なお、これらの基準には確率の起こりやすさという尺度が殆ど取り込まれていないことも、適合度評価性能が高くない一因であるかもしれない。

合田 (1990a,b) は、分布関数の適合度基準として、相関係数のみによるのではなく、最大値偏差に基づく DOL 棄却基準、さらには最小二乗法の相関係数による REC 棄却基準を各地の極値データに適用することによって、海域毎の最適分布関数を決定する方法を提案している。この方法によれば、近い 2 地点間で分布関数が異なるようなことがなくなり、より合理的と言える。DOL 基準とは、最大値偏差 ξ を

$$\xi = (x_1 - \bar{x})/s \quad (35)$$

で定義し、この最大値偏差 ξ がその 5% および 95% 非超過確率値の範囲 ($\xi_{5\%} \leq \xi \leq \xi_{95\%}$) に入っていれば、標本の最大値は正常とみなし、 $\xi < \xi_{5\%}$ あるいは $\xi > \xi_{95\%}$ であれば、異常値である判断して棄却する基準である。なお、5% および 95% 非超過確率値については、次の経験式が提案されている。

$$\xi_P = a + b \ln N + c(\ln N)^2, \quad P = 5\%, 95\% \quad (36)$$

ここに、 N は標本数、 a, b および c の値は採択率 ν の関数として数表化されている (合田, 1990ab)。一方、REC 棄却基準とは、最小二乗法によって求められた相関係数 r の残差 $\Delta r = 1 - r$ の 95% 非超過確率値を用いて棄却判定を行う基準で、 $\Delta r > \Delta r_{95\%}$ であれば、異常値である判断して棄却する基準である。なお、 $\Delta r_{95\%}$ についても同様な経験式が提案されている。

このような棄却基準を各地の極大値波浪データに適用することによって、合田ら (1998) は太平洋東岸の台風以外の高波の確率分布がワイブル分布 ($k = 1.0$) である可能性が高いことを指摘している。すなわち、年最

大値資料の確率分布でいえば、式 (6) の関係より FT-I 型分布 (Gumbell 分布) である可能性が高いことになる。これらの棄却基準を適用するにあたって注意しなければならないことは、後でも述べるように気象原因が異なると母確率分布関数が異なるので、その層別化を精度よく行っておくことである。もし、そうしなければ誤ってこれらの棄却基準にかかってしまう危険性があるからである。なお、合田・小舟 (1989) は相関係数の残差とその平均値との比 $\Delta r / \Delta r_{mean}$ の値が最小のものが最適分布と判断する MIR 基準を提案しているが、著者は次の理由からこの基準には賛同できない。すなわち、もし真の分布関数であれば相関係数の残差 Δr は最頻値 Δr_{mod} あるいは平均値 Δr_{mean} に近い値をとる確率の方が高いであろうから、最小値が良いとは言えないからである。

最適分布関数を評価する別の基準として、モデルの良さを測る尺度として提案された Kullback-Leibler 情報量というものがある (坂本, 1992)。この情報量は真の確率密度関数を $g(x)$ 、モデル (候補) の確率密度関数を $f(x)$ とする時、次式で表される。

$$I(g, f) = E \log g(x) - E \log f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \log \frac{g(x)}{f(x)} dx \geq 0 \quad (37)$$

この情報量は、真の確率密度関数 $g(x)$ とモデルの確率密度関数 $f(x)$ とが等しい ($g(x) = f(x)$) 時のみ、最小値をとり、その値は 0 である。したがって、この情報量の値が小さいほど、真の確率密度関数に近いとみなすことができる。上式において、モデルの確率密度関数 $f(x)$ に関する項は $E \log f(x)$ であるので、この項を最大化すれば Kullback-Leibler 情報量が最小となる。この $E \log f(x)$ は、 N が十分に大きい時、 $\frac{1}{N} \sum \log f(x_i)$ に確率論的に等しくなることから、対数尤度を最大化すればよいことになる。この考えが最尤法の新たな意味付けであり、期待平均対数尤度の不偏推定量を用いて表現したものが、赤池の情報量基準 AIC である (Akaike, 1974)。

$$AIC = -2 \log L(\theta) + 2p \quad (38)$$

ここに、 p は未知母数の数であり、 $\log L(\theta)$ は対数尤度である。この AIC 基準は、最尤法にのみ用いられていたが、泉宮・岡本 (2000) によって重み付最小二乗法にも適用できるように関係式が提案されている。それによると、情報量規準 AIC は次式で与えられる。

$$AIC = \frac{1}{\sigma^2} (x - M\hat{\theta})^t \Sigma_N^{-1} (x - M\hat{\theta}) + \ln(\det \Sigma_N) + N \ln(2\pi\sigma^2) + 2p \quad (39)$$

上式において、真の母分布関数の分散 σ^2 の値は厳密には算定できないが、次の不偏推定量で置き換えることにより、分布関数に寄らず一定の値で代替できるという利点がある。

$$\sigma^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \quad (40)$$

ここに、 $\bar{x}$ は極値資料の平均値である。

宝・高棹 (1988) は、各地の降水量データに対して、SLSC 基準、最大対数尤度基準ならびに AIC 基準を用いて確率分布モデルの適合度評価を行っている。その結果、SLSC 基準と最大尤度基準を用いた場合、上位 3 位に適合する分布関数の種類はおおよそ一致するが、AIC 基準によると上位 3 位に入る分布関数は一部の分布関数は一致するものの、異なった分布が適合するケースが多くなっている。前者 2 つの基準の場合には、3 母数の分布関数が最適と判断される割合が高く、 R 年確率統計量の標準偏差の値がやや大きい傾向にあるのに対して、AIC 基準によって適合度の上位に入るのは、2 母数の分布関数の割合が高く、 R 年確率統計量の標準偏差の値が幾分か小さい傾向にある。これらの基準の中で、いずれの基準が評価性能が高いかを判断するには、

モンテカルロシミュレーションによって評価する方法が一般的に取られている。

図-5から図-7は、重み付最小二乗法(WLSM)と AIC 基準を用いて最適分布関数を評価した結果である(泉宮・岡本, 2000)。候補分布関数として、FT-I 型分布およびワイブル分布 ($k = 0.75, 1.0, 1.4, 2.0$) の5種類に対して適用したもので、標本数 $N = 10, 30, 60, 100$ の資料を5000ケース分作成して得られたものである。図-5の真の分布関数は、FT-I型分布、図-6はワイブル分布($k = 1.0$)、図-7のそれはワイブル分布($k = 2.0$)である。真の分布関数がFT-I型分布の場合、WLSMと AIC 基準を用いれば標本数 $N = 30$ でも、90%以上の割合で真の確率分布関数を探し当てる性能を有していることが分かる。一方、真の分布関数がワイブル分布の $k = 1.0$ の時には、やや性能が下がり標本数 $N = 60$ で正解率が88%程度である。また、真の分布関数がワイブル分布の $k = 2.0$ の時には、同じ条件で94%程度とかなり高い値を示している。

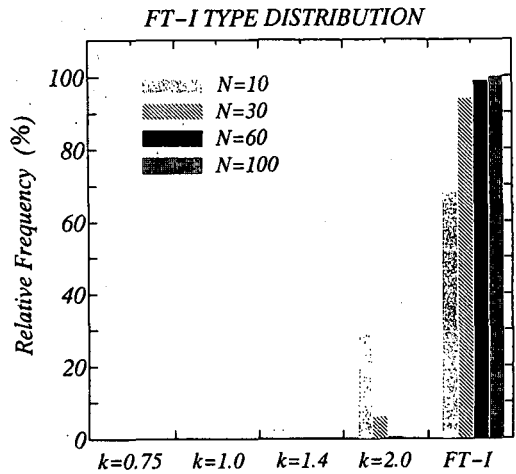


図-5 AICによる適合度評価 (FT-I 型分布)

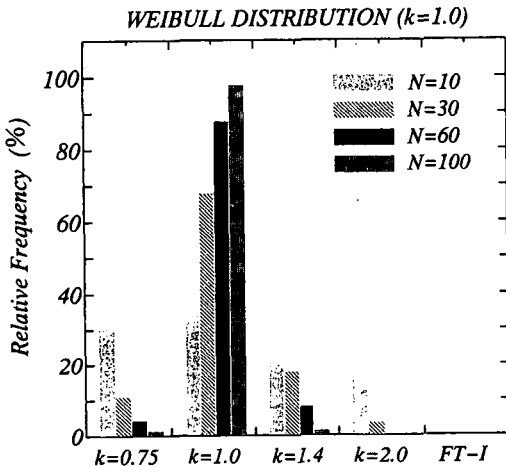


図-6 AICによる適合度評価
ワイブル分布 ($k = 1.0$)

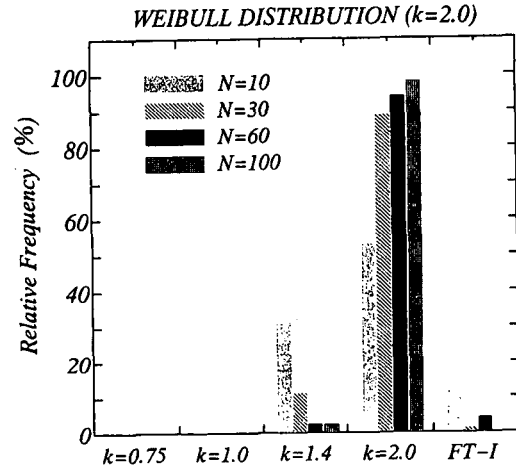


図-7 AICによる適合度評価
ワイブル分布 ($k = 2.0$)

4 再現確率統計量と信頼区間の推定

前述の母数推定法により母数が求められると、 R 年確率統計量の推定値 $\hat{x}_R$ は、式 (8) あるいは次式によって算定することができる。

$$\hat{x}_R = \hat{A}y_R + \hat{B}, \quad y_R = F^{*-1} \left(1 - \frac{1}{\lambda R} \right) \quad (41)$$

この関係式を用いれば、ある1つの極値資料について、1つの R 年確率値の推定値 $\hat{x}_R$ が得られるが、推定された母数がいずれの母数推定法を用いても、標本の関数として $\hat{A} = \hat{A}(x_1, x_2, \dots, x_N)$, $\hat{B} = \hat{B}(x_1, x_2, \dots, x_N)$ と表されるため、 R 年確率統計量 $\hat{x}_R$ も確率変量となり確定量として値が決まらない。

図-8は、モンテカルロシミュレーションにより最小二乗法によって推定された5000資料分の50年確率統計量の分布を示したものである。標本数が $N=30$ 以下では、推定される50年確率統計量は真値($H_R=9.98\text{ m}$)の回りに広く分布しているのが分かる。標本数を大きくしていくと、徐々に正規分布に近づいていることが認められるが、このような性質は漸近正規性と呼ばれている。この図に示されているように、 R 年確率統計量の推定値は、ある変動幅を持った分布に従うので、その信頼区間を推定することは、信頼性設計を行う際にも重要である。確率統計量の分散の推定は、Gumbel(1957)によってFT-I型分布に対する積率法による推定値の評価式がある。

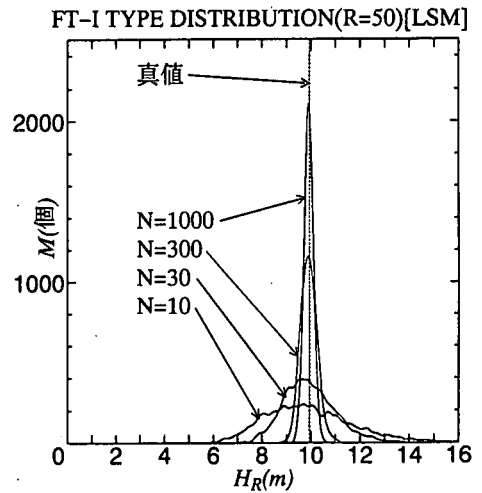


図-8 50年確率統計量の分布

$$\sigma^2(\hat{x}_R) = \frac{\sigma^2}{N} \left\{ 1 + 0.885(y_R - \gamma) + 0.6687(y_R - \gamma)^2 \right\} \quad (42)$$

ここに、 σ^2 は母集団の分散、 $\gamma=0.5772$ はオイラー数である。同じく積率法によるワイブル分布の場合の $\hat{x}_R$ の分散は、泉宮・斎藤(1998)によって求められている。

$$\sigma^2(\hat{x}_R) = \frac{\sigma^2}{N} \left\{ 1 + \frac{(y_R - \Gamma_{1k})}{\sqrt{\Gamma_{2k} - \Gamma_{1k}^2}} \sqrt{\beta_1} + \frac{(y_R - \Gamma_{1k})^2 (\beta_2 - 1)}{(\Gamma_{2k} - \Gamma_{1k}^2) 4} \right\} \quad (43)$$

ここに、 $\sqrt{\beta_1}$ および β_2 はそれぞれひずみ度(skewness)および尖鋭度(kurtosis)で、次式で与えられる。

$$\sqrt{\beta_1} = \frac{(\Gamma_{3k} - 3\Gamma_{1k}\Gamma_{2k} + 2\Gamma_{1k}^3)}{(\Gamma_{2k} - \Gamma_{1k}^2)^{3/2}}, \quad \beta_2 = \frac{(\Gamma_{4k} - 4\Gamma_{3k}\Gamma_{1k} + 6\Gamma_{2k}\Gamma_{1k}^2 - 3\Gamma_{1k}^4)}{(\Gamma_{2k} - \Gamma_{1k}^2)^2} \quad (44)$$

ここに、 Γ_{nk} は式(29)で示されている。なお、 σ^2 については不偏分散 σ_x^2 により評価するものとする。さらに、著者らは最小二乗法による R 年確率値の分散についても、漸近理論により評価している。

$$\sigma^2(\hat{x}_R) = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N (g_i y_R + h_i)(g_j y_R + h_j) C_{ij} \quad (45)$$

ここに、 g_i および h_i は基準化変量 y_i で表される係数、 C_{ij} は順序統計量 x_i と x_j の共分散行列で、FT-I型分布およびワイブル分布についてそれぞれ式(27)および式(28)で示されている。

これらの確率統計量の分散の推定式は、標本数が大きければ十分な精度で分散あるいは標準偏差を推定することができるが(泉宮・斎藤, 1998)、波浪の極値解析の場合には、部分極大値資料を用いるので、データ採択率 ν の関数として評価されなければならない。合田(1988, 1990a,b)は10000組から50000組の資料を作成して、次に示すような経験式を得ている。

$$\sigma(\hat{x}_R) = \sigma_z \cdot \sigma_x, \quad \sigma_z = \{1.0 + a(y_R - c + \alpha \ln \nu)^2\}^{1/2} / \sqrt{N} \quad (46)$$

ここに、 $z = (\hat{x}_R - x_R) / \sigma_x$ であり、係数 a, c, α はFT-I型分布、ワイブル分布およびFT-II型分布に対して、標本数 N とデータ採択率 ν の関数として与えられている。上式を用いると、 σ_z を通して $\sigma(\hat{x}_R)$ の値が比較的簡単に算定できる利点がある。上式の適用性について、数値シミュレーションを行って検討した山口ら(1996)

によると、年最大値資料の場合には R 年確率値の標準偏差の誤差は $\pm 20\% \sim 25\%$ 程度であり、極大値資料の場合にはデータ採択率の増加にともなって、過小評価の傾向が増すことが示されている。

R 年確率統計量の標準偏差は、式 (42) から式 (46) までの関係式から分かるように、標本数 N に関して $1/\sqrt{N}$ に比例するので、精度を 2 倍に高めようとする (標準偏差を $1/2$ にする) と、4 倍の標本数が必要となる。逆に 10% 精度の高い (標準偏差が小さい) 母数推定法を用いると、1.23 倍の標本数を用いて推定したことに相当する。

母数および R 年確率統計量の分散の推定法として、jackknife 法と呼ばれる resample 手法が提案されている (Efron, 1979)。この推定法は、 N 個の標本から推定される統計量 $\hat{\psi}$ と i 番目の標本 x_i を除いた $N-1$ 個の N 組の標本から推定される母数 $\hat{\psi}_i$ を用いて、統計量のバイアスの補正や分散の推定を行うものである。ここで、 $\hat{\psi}$ を R 年確率統計量とすると、バイアスを補正した推定値を $\hat{\psi}_J$ および分散を $\sigma_J^2(\hat{\psi}_R)$ は次式で与えられる。

$$\hat{\psi}_J = N\hat{\psi} - (N-1)\hat{\psi}_m, \quad \sigma_J^2(\hat{\psi}_R) = \frac{N-1}{N}(\hat{\psi}_i - \hat{\psi}_m)^2, \quad \hat{\psi}_m = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{\psi}_i \quad (47)$$

宝・高棹 (1988) は、jackknife 法などを用いて 50 年確率統計量やその分散を評価することによって、確率水文量の推定精度を検討することを提案し、その有用性を指摘している。また、山口ら (1995) も同様な手法で R 年確率統計量を評価し、その有用性を確認している。しかしながら、jackknife 法や bootstrap 法などの resample 手法では、新たなる資料が加わるわけではないので、一般的には分散は過小評価となる傾向がある。合田 (1989) の討議に対する宝・高棹 (1989) 回答においても、標本数が 100 のとき Gumbel の評価式による値よりも有意に 20% 程度小さい値を示している。したがって、 R 年確率統計量の標準偏差を算定する場合には jackknife 法等の resample 手法を手間をかけて用いるよりも、Gumbel や泉宮・斎藤の評価式あるいは合田の評価式を用いる方が簡便で実用的であり、同程度あるいはそれ以上の精度が得られるのである。

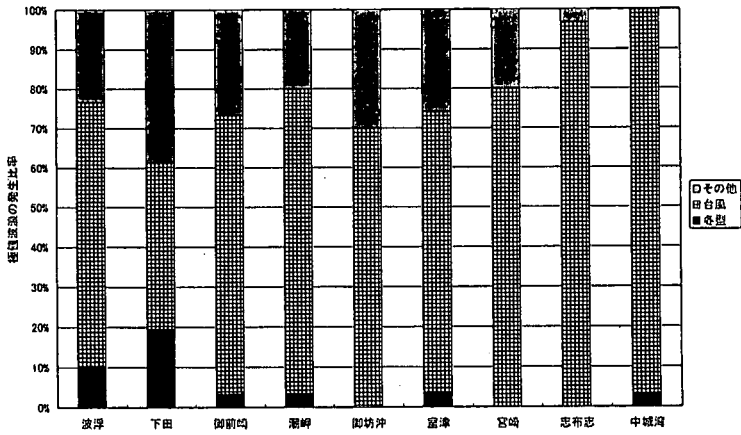
これまでに述べた適合度評価のいずれを用いても、推定された母数の分散の値が 0 でない限り誤り確率が存在するので、最適分布関数を正確に見出すことはむずかしい。例えば、モデル適合度評価の優れた AIC 基準を用いても、その値が 1.0 以下の差異はあまり有効ではなく、ほぼ同程度の適合度とみなした方がよいとされる (坂本ら, 1982)。したがって、最適分布関数を唯一選定するには、さらなる基準が必要となる。数学的に言えば、 x_R 年確率統計量の分散あるいは信頼区間が小さいほど信頼度が高く、誤り確率が小さいのでその分布関数が最適分布関数ということになるが、設計波高を決めるような場合には、特別な配慮が必要である。同程度の適合度を示す分布関数によって推定された R 年再現確率値 $\hat{x}_R$ および標準偏差 $\sigma(\hat{x}_R)$ の値が有意に異なる場合があるので、それらの値を吟味して採用することが望ましいと思われる。すなわち、適合度判定により上位 3 位くらいまでの候補分布関数を選定し、 R 年再現確率値の小さ過ぎると思われる分布関数を棄却し、残ったものに対して変動係数 $V = \sigma(\hat{x}_R)/\hat{x}_R$ の小さい分布関数を採用するのがよいのではないかと考えている。この考えは、 R 年再現確率値 $\hat{x}_R$ がほぼ同じであれば、標準偏差の小さい方 (数学的に信頼度の高い方) を採用し、もし標準偏差 $\sigma(\hat{x}_R)$ の値がほぼ同じときには、再現確率値 $\hat{x}_R$ の大きい分布関数の方 (危険率を小さくする方) を採用するという折衷案である。

5 複数原因による極値統計解析法

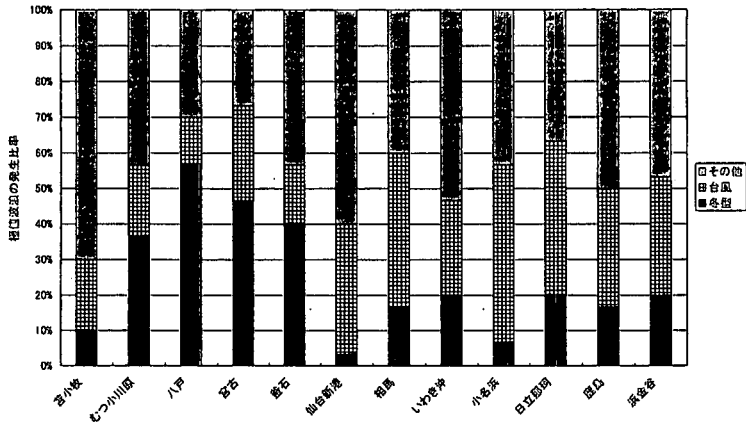
日本沿岸で観測される高波は、台風によって発生する場合や冬型気圧配置等によって発生することがあるので、その極値解析を行う際には発生原因が何であるかを特定しておくことが望ましい。これは、気象原因が異なると風速の大きさ、風向および強風継続時間等が異なり、それに伴って波浪の母集団の特性も異なってくるからである。したがって、気象原因が異なる場合には、原因別に極大値資料を収集し、個別に極値解析を行う必要がある。気象の調査には、(財) 日本気象協会編集の気象要覧や気象年鑑等の天気図等を用いることができる。

図-9 は、運輸省港湾局監修 (1996) の 25 年統計資料に掲載の上位 30 位までの気象原因比率を図化したものである。この図は、上位 30 個の極値データを用いたものなので完全なものではない (本来ならば少なくとも 100 個以上は必要である) が、おおよその海域毎の気象擾乱の発生比率の傾向が分かるであろう。日本海沿岸および東シナ海沿岸 (下図) では、冬型気圧配置による極値波浪の発生頻度がいずれも 50% 以上であり、東シナ海沿岸 (藍島～那覇) では台風による極値発生比率も 20%～40% と高くなっている。

西日本太平洋側



東日本太平洋側



日本海側

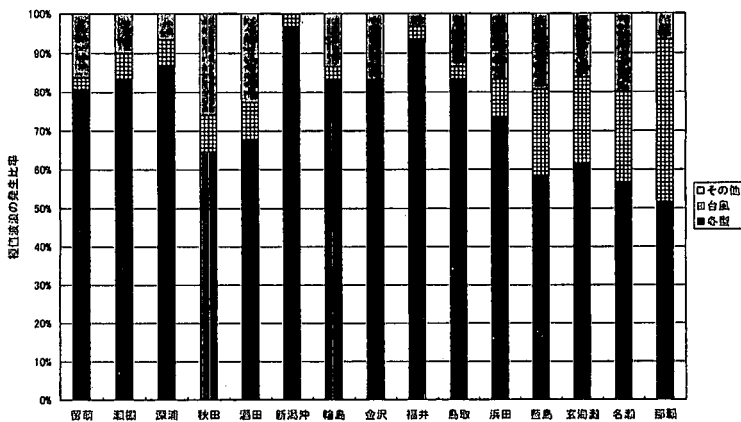


図-9 気象擾乱の発生比率 (上位30位までの極値波浪)

東日本太平洋側(中図)では、冬型気圧配置と台風による高波が約50%前後で同様な傾向を示しているが、八戸と宮古では冬型気圧配置の割合がやや高く、苫小牧、仙台新港および小名浜ではその割合が幾分か小さくなっている。後者については、岬による遮蔽効果や海岸線の走行の影響があるのかもしれない。一方、波浮より西側の太平洋沿岸(上図)では、下田を除くと台風による高波浪の割合が65%以上となっているのが特徴的であり、九州から沖縄方面に行くほどその割合が高くなっている。

気象原因別に極値解析を行う場合には、極大値資料として取扱うことになるので、年最大値資料の分布関数に換算するためには、それぞれの気象原因の年平均発生率 λ_j を求める必要がある。台風の場合年平均発生率 λ_j を求めることは比較的簡単であるが、冬型気圧配置や発達した南岸低気圧による波浪極値の平均発生率を求めるのは、波高の小さい極値まで取り入れると数が多くて大変な作業となる。合田ら(1998, 1999)は、開始限界波高として1.5mから3.0m、終了限界波高を1.0mから2.0mとして、太平洋東岸ならびに南岸の気象擾乱と極値波浪を特定している。

気象原因別の平均発生率および各々の極大値資料の分布関数 $F_j^*(x)$ が推定されたならば、年最大値資料に対応する分布関数 $F(x)$ は、それぞれの気象擾乱の発生がポアソン過程に従うならば、次式で表される(合田, 1990b)。

- ① FT-I 型分布($A=0.7, B=3.0, \lambda=4$)
② Weibull分布($A=0.6, B=2.3, k=1, \lambda=14$)

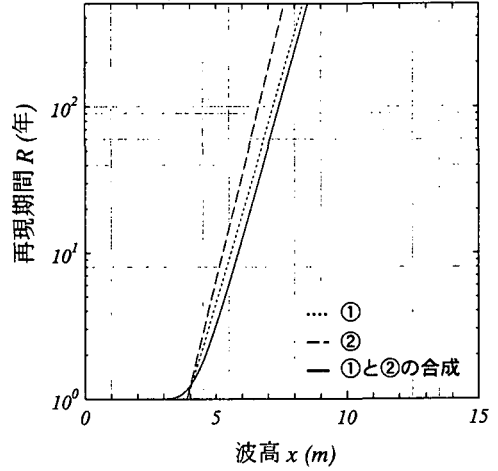


図-10 波高 x と再現期間 R との関係

$$F(x) = \exp\left\{-\sum_{j=1}^M \lambda_j [1 - F_j^*(x)]\right\} \quad (48)$$

ここに、 M は気象原因の数である。上式の関係より、 R 年再現確率統計量 $\hat{x}_R$ は、次式で求められる。

$$F(\hat{x}_R) = \exp\left\{-\sum_{j=1}^M \lambda_j [1 - F_j^*(\hat{x}_R)]\right\} = 1 - \frac{1}{R} \quad (49)$$

この式からは、 $\hat{x}_R$ の値を直接的に求めることはできないが、図-10に示すように波高 x と再現期間 R とのグラフを作成しておく、Newton-Raphson法等を用いずとも容易に再現確率統計量が求められる。

気象原因が複数存在する場合の再現確率統計量の信頼区間については、これまで殆ど理論的な研究がなく、わずかに合田(1990b)による次の経験式があるのみである。

$$\sigma^2(\hat{x}_R) = \sum_{j=1}^M N_j \{1 - F_j^*(\hat{x}_R)\} \sigma_j^2(\hat{x}_R) / \sum_{j=1}^M N_j \{1 - F_j^*(\hat{x}_R)\} \quad (50)$$

ここに、 N_j は j 番目の発生原因別資料におけるデータ個数である。上式に適用性については、山口ら(1999)によって数値シミュレーションにより調べられている。その結果によると、原因別の再現確率波高の値の差が大きい場合には、上式による結果は真値とほぼ一致するが、その差が小さい場合には過大評価傾向にあることが確認されている。

複数の気象原因による極値波浪の R 年再現統計量の分散を理論的に求めるのは、 $\hat{x}_R$ の陽的な表現が得られないのでかなり難しい問題であるが、その値は式(49)から得られるので、簡単のため2つの気象原因を想定すると次式で表すことができる。

$$\hat{x}_R = \hat{x}_R(\hat{A}_1, \hat{B}_1, \hat{A}_2, \hat{B}_2; R) \quad (51)$$

すなわち、 $\hat{x}_R$ は確率変数 $\hat{A}_1, \hat{B}_1, \hat{A}_2$ および $\hat{B}_2$ の関数として表すことができる。母数推定法にバイアスのない推定法を利用すれば、真の母数 A_1, B_1, A_2, B_2 を上式に代入すると、真の R 年確率統計量 x_R に等しくなるので、 $x_R = x_R(A_1, B_1, A_2, B_2; R)$ と表される。ここで、式 (51) を A_1, B_1, A_2, B_2 の回りに Taylor 展開すると、

$$\hat{x}_R = x_R + \frac{\partial \hat{x}_R}{\partial A_1}(\hat{A}_1 - A_1) + \frac{\partial \hat{x}_R}{\partial B_1}(\hat{B}_1 - B_1) + \frac{\partial \hat{x}_R}{\partial A_2}(\hat{A}_2 - A_2) + \frac{\partial \hat{x}_R}{\partial B_2}(\hat{B}_2 - B_2) + \dots \quad (52)$$

となる。上式の関係を用いて、 $\sigma^2(\hat{x}_R) = E[(\hat{x}_R - x_R)^2]$ を計算すればよいことになる。やや複雑な計算を行うと、 $\sigma^2(\hat{x}_R)$ は次式で与えられる (泉宮・野村, 2000)。

$$\sigma^2(\hat{x}_R) = \sum_{j=1}^M \lambda_j^2 f_j^{*2}(\hat{x}_R) \sigma_j^2(\hat{x}_R) / \left\{ \sum_{j=1}^M \lambda_j f_j^*(\hat{x}_R) \right\}^2 \quad (53)$$

ここに、 f_j^* は気象原因 j 番目の極大値資料の確率密度関数であり、 λ_j は気象原因 j 番目の平均発生率である。上式の表現は、気象原因別の事象が独立であっても、それぞれの極大値分布関数と R 年とは式 (49) の関係があるため、この関係から推定される R 年再現確率統計量は式 (51) で表されるように、2つの事象の母分布関数の母数の非線形関数となり、分散は単純な足算では表現されないことの傍証である。上式と合田による経験式 (50) は、一見してかなり異なる表現のように見えるが、式 (50) において発生原因別資料のデータ数を平均発生率 λ_j に比例してとり ($N_j = K\lambda_j$)、また $1 - F_j^*(\hat{x}_R)$ の値が 0 に十分に近いとして、ロピタルの定理を用いると式 (50) は次式で近似される。

$$\sigma^2(\hat{x}_R) = \sum_{j=1}^M \lambda_j f_j^*(\hat{x}_R) \sigma_j^2(\hat{x}_R) / \left\{ \sum_{j=1}^M \lambda_j f_j^*(\hat{x}_R) \right\} \quad (54)$$

上式と式 (53) との違いは、 $\sigma_j^2(\hat{x}_R)$ に対する重み係数が 1 乗か 2 乗かが異なるだけである。ここで、簡単な例として $M = 2, \lambda_1 = \lambda_2$ で気象原因別の極大値資料の分布関数および確率密度関数が等しい場合を考えると、合田の経験式では、

$$\sigma^2(\hat{x}_R) = (1/2)\sigma_1^2(\hat{x}_R) + (1/2)\sigma_2^2(\hat{x}_R) = \sigma_1^2(\hat{x}_R) = \sigma_2^2(\hat{x}_R) \quad (55)$$

となるのに対して、式 (53) による著者の方法では、

$$\sigma^2(\hat{x}_R) = (1/4)\sigma_1^2(\hat{x}_R) + (1/4)\sigma_2^2(\hat{x}_R) = (1/2)\sigma_1^2(\hat{x}_R) = (1/2)\sigma_2^2(\hat{x}_R) \quad (56)$$

となる。この場合、分布関数が全く同じなので、標本数 N が 2 倍の $2N$ になったことに相当しているので、 $\hat{x}_R$ の分散は $1/2$ 倍に、その標準偏差は $1/\sqrt{2}$ 倍になる方が妥当であると思われる。

図-11 は、気象原因別極大値資料の分布関数として、FT-I 型分布 ($A = 0.7, B = 3.0, \lambda_1 = 4$) とワイブル分布 ($A = 0.6, B = 2.3, k = 1.0, \lambda_2 = 14$)、ならびにその合成分布関数を示したものである。これらの分布関数に従う標本を 5000 組作成し、 R 年再現確率統計量のバイアスならびに分散を、図-12 および図-13 に示している。プロットング公式は、FT-I 型分布に対しては Gringorten 公式を、ワイブル分布に対しては合田の修正 Petruaskas・Aagaard 公式を用いている。母数推定法は最小二乗法で、極大値資料の分散は泉宮・斎藤 (1998) を用いて評価している。図-8 に見られるように、上述のプロットング公式を用いると、殆どバイアスのない R 年再現確率統計量が得られることが分かる。また、 R 年再現確率統計量の標準偏差も、式 (53) による評価の方が精度よく推定できることが確認できる。

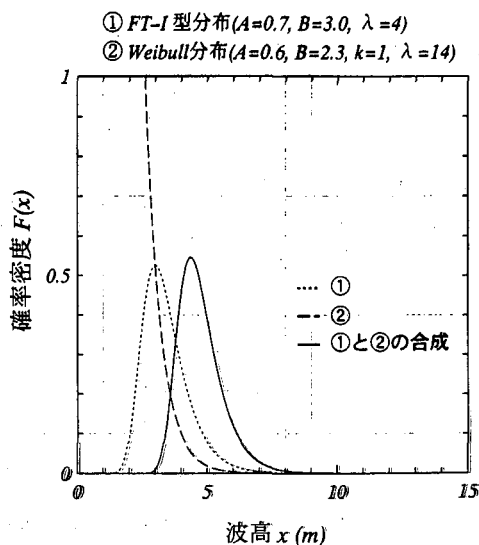


図-11 気象原因別極大値資料の分布関数

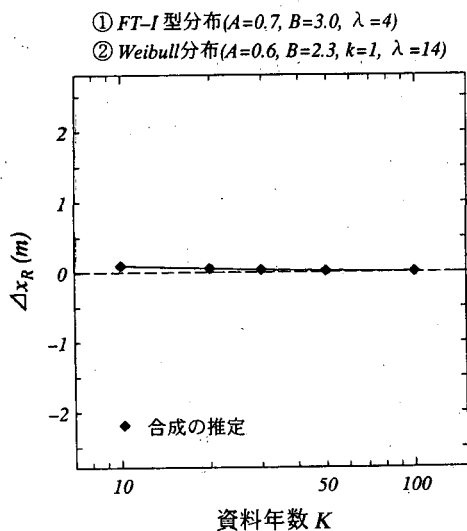


図-12 R 年再現確率統計量のバイアスの変化

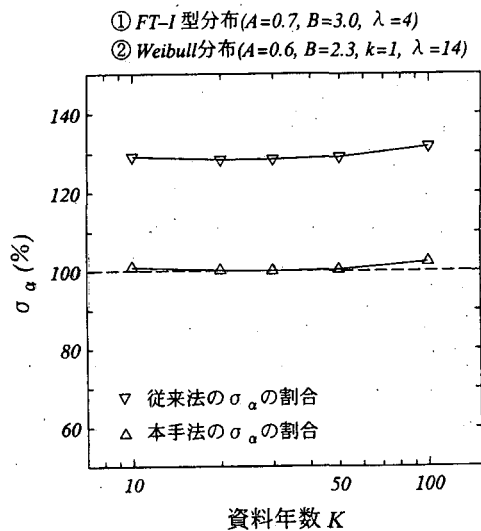


図-13 真値で基準化された R 年再現確率統計量の標準偏差

6. 実務的な設計波の設定における諸課題

6.1 部分極値資料の下限値の影響

波浪観測データの時系列より高波極値波高を抽出するにあたって、限界波高を予め設定してその値以上の極値を選定することが行われる。この限界波高を例えば 1m から 5m と少しずつ変化させて得た部分極値データを用いて R 年再現確率統計量を算定すると、その値が下限値によって変化するのが通常である。この限界波高の変化がもたらす確率波高の変化の方が、母数推定法の違いによる確率波高の変化よりも大きいと言われている (Vladder, et al., 1993)。これは、母数推定法の推定精度の問題よりも、気象原因によって母集団の特性が異なることや同じ気象原因であっても低気圧や台風の通過コースなどが異なることによって、母集団の特性が少しずつ変化していることによるものと思われる。これを一種の分布関数に当てはめると、下限値の大きさに

よってそれぞれの気象原因による極値の発生確率が変化しているので、推定される再現確率統計量も変化することになるのである。

この部分極値資料の下限値の確率波高への影響を少なくする方法として、まず気象原因別に極値資料を分類することである。たとえば、台風、冬型気圧配置、南岸低気圧のように分類することによって、同質のデータが揃ってくるので下限値の影響を少なくすることができる。また、こうすることによって棄却基準も精度よく適用できる利点がある。

6.2 海岸構造物設計に必要な波浪情報

海岸構造物設計に必要な波浪情報として、有義波高だけでなく有義波周期、波向、継続時間などが少なくとも必要である。さらに、高波の浅海域での変形を精度よく計算するためには、方向スペクトルの情報も必要である。これまで、設計に用いる有義波周期の設定には、極値波高に対応した有義波周期を直線回帰式で評価する方法が取られてきた。しかしながら、有義波周期は波高ほど相関が高くなく、波浪推算結果よりも実測のデータの方が相関は低く、推定精度に問題があると考えられてきた。その1つの改良法として、関本ら(1999)によって2次元ワイブル分布を用いた設計波周期の設定法が提案されている。この方法によると、データの少ない有義波高の大きい波浪に対する周期が比較的安定に求められる。この方法の課題としては、砕波条件が加味されていないので、波形勾配のやや大きい日本海沿岸の波浪に対してはやや精度が低くなるので、改良が必要であろう。

波向に関しては、各波浪観測点で主波向(principal direction)等が観測されている場合があり、その結果を利用することができるが、主波向は波浪のエネルギー輸送方向とは異なることに注意しなければならない。主波向の定義式より、やや長周期の波の波向よりになる傾向があり、特に2方向波浪系の場合には注意を要する(合田, 1981)。一般に波向は、波の周波数によって変化している場合が多いので、周波数ごと、あるいは周期ごとに算定することが望ましく、コスペクトルとクオドスペクトルを用いて評価する方法がよりよいと思われる。

6.3 既往最大値の定量評価

海岸・港湾構造物の中には、既往最大の波浪を設計波として設計されたものも少なからず現存している。こうした既設構造物の安全度を再検査することも、災害対策の一貫として重要であると思われる。既往最大値といっても、何時からという期間が全く不明であれば評価のしようもないが、 N 年ということが分かっているれば、その波浪がおおよそ何年確率波高に相当しているのか推定することができる。

この既往最大値の定量評価には、 N 年最大値分布を用いて評価することができる。もし母分布関数がFT-I型分布であれば、 N 年間の既往最大値の最頻値は N 年再現確率統計量に等しく、その平均値は $1.78N$ 年、中央値は $1.44N$ 年再現統計量にほぼ相当する。FT-II型分布の場合には、形状母数の逆数 $1/k$ の値が0から0.4の範囲で、平均値が $1.78N$ 年から $2.7N$ 年、最頻値では N 年から $0.7N$ 年にほぼ等しい(合田, 1990b)。ワイブル分布では、形状母数によって多少変化するが、平均値が約 $1.78N$ 年、中央値は約 $1.44N$ 年、最頻値は N 年再現確率値にほぼ相当する(泉宮, 1999)。母分布関数が不明の場合でも、既往最大値を超える確率を遭遇確率に比定することにより、 $1.0 \sim 1.44N$ 年の再現確率統計量に相当することが示される。いずれの分布に従うにしても、最頻値の N 年再現確率値程度とみなすのがよいであろう。

7. おわりに

本稿では、設計波の設定に関する基礎的な知識から最先端の研究までを紹介したが、夏期研修担当者からの依頼である合理的なという言葉にどうしてもうまく答えることはできなかった。これは、現行の設計法が再現確率統計量に拠っていることが、著者の頭の中に残り、この方法が果たしてよいのであろうかと常々思っていたからである。構造物の設計法は、合田(1997)も述べているように歴史的発展を遂げてきた経緯があり、まだ未解明な問題も数少なからず存在している。設計波の選定は、対象となる構造物の種類や重要度抜きで考えることはできなし、経済性や背後の利用状況なども本来ならば考慮すべきである。

ただ、日本沿岸の沖波の統計的特性を精度良く同定することに対しては、本稿に述べていることが少しでも役立つのではないかと考えている。はじめに述べたように、設計波ではなく第1段階の極値波浪の統計的性質を正確に把握することは、科学的に評価できるので一致協力して実践されることを期待したい。その際には、波浪情報のデータベースを整理し、広く研究者に公開されることが、この分野の研究の発展につながるものと著者は信じている。

参 考 文 献

- 泉宮尊司・斎藤雅弘 (1997) : 極値統計解析における順序統計量の分散を考慮した母数推定法, 海岸工学論文集, 第 44 巻, pp.181-185.
- 泉宮尊司・斎藤雅弘 (1998) : 極値統計解析における不偏性条件式ならびに漸近理論による信頼区間の推定, 海岸工学論文集, 第 45 巻, pp.206-210.
- 泉宮尊司 (1999) : ワイブル分布に従う極値データの N 年最大統計量の定式化とその適用性, 海岸工学論文集, 第 46 巻, pp.236-240.
- 泉宮尊司・岡本佳世 (2000) : 漸近理論を用いた重み付最小二乗法ならびに最適分布の評価法, 海岸工学論文集, 第 47 巻, pp. 286-290.
- 泉宮尊司・野村千尋 (2000) : 極値統計解析の高精度化ならびに既往最大統計量の定量評価に関する研究, 土木学会論文集, (投稿準備中).
- 岩井重久・石黒政義 (1970) : 応用水文統計学, 森北出版, 370p.
- 運輸省港湾局監修 (1996) : 全国港湾海洋波浪観測 25 年統計資料, (財) 沿岸開発技術研究センター, 912p.
- 角屋 睦 (1956) : 極値分布とその一解法, 農業土木研究, 第 23 巻, 第 6 号, pp.28-35.
- 神田 徹・藤田睦博 (1982) : 水文学—確率的手法とその応用—, 技報堂出版, 275p.
- 合田良実 (1967) : 波浪統計に関する二, 三の考察, 港湾技研資料, No. 39, pp. 239-255.
- 合田良実 (1975) : 波浪の統計的性質とその応用, 1975 年度水工学に関する夏期研修会講義集, pp. B-6-1-B6-18.
- 合田良実 (1981) : 共分散法を用いた波向推定方式の数値的検討, 港湾技術研究所報告, 第 20 巻, 第 3 号, pp. 53-92.
- 合田良実 (1988) : 極値統計解析におけるプロットング公式ならびに推定値の信頼区間に関する数値的検討, 港湾技術研究所報告, 第 27 巻, 第 1 号, pp.31-92.
- 合田良実 (1990a) : 極値統計における異常値の棄却基準, 土木学会論文集, No. 417/II-13, pp. 245-254.
- 合田良実 (1990b) : 港湾構造物の耐波設計—波浪工学への序説—, 鹿島出版会, pp.267-322.
- 合田良実・小野澤昌己 (1990c) : 極値 II 型分布の特性と推定値の信頼区間, 土木学会論文集, No. 417/II-13(ノート), pp. 289-292.
- 合田良実 (1997) : 設計波高および設計潮位の決め方, 1997 年度水工学に関する夏期研修会講義集, pp. B-4-1-B-4-18.
- 合田良実・小舟浩治 (1989) : 波浪の極値統計における分布関数のあてはめ基準, 海岸工学論文集, 第 36 巻, pp.134-138.
- 合田良実・小長谷修・永井紀彦 (1998) : 極値波浪統計の母分布関数に関する実証的研究, 海岸工学論文集, 第 45 巻, pp.211-215.
- 合田良実・竹下直樹・永井紀彦 (1999a) : 太平洋南岸の極値波高の母分布関数について, 海洋開発論文集, Vol. 15, pp. 309-314.
- 合田良実・高木泰士 (1999b) : 信頼性設計におけるケーソン防波堤設計波高の再現期間の選定, 海岸工学論文集, 第 46 巻, pp. 921-925.
- 坂本慶行・石黒真木夫・北川源四郎 (1983) : 情報量統計学, 共立出版, pp. 27-64.
- 関本恒浩・花山格章・片山裕之・清水琢三 (1999) : 設計波周期の設定法, 海岸工学論文集, 第 46 巻, pp. 256-260.
- 高棹琢馬・宝 馨・清水 章 (1986) : 琵琶湖流域水文データの基礎的分析, 京都大学防災研究所年報, 第 29 号, B-2, pp.95-101.
- 宝 馨 (1998) : 現代水文統計論—水文頻度解析のモデル, 手法とその評価—, 1998 年度水工学に関する夏期研修会講義集, pp. A-8-1-A-8-20.
- 宝 馨・高棹琢馬 (1988) : 水文頻度解析における確率分布モデルの評価基準, 土木学会論文集, 第 393 号, II-9, pp. 151-160.
- 宝 馨・高棹琢馬 (1989) : 水文頻度解析における確率分布モデルの評価基準への合田良実の討議に対する回答, 土木学会論文集, 第 405 号, II-11, pp. 267-272.

- 藤野陽三・伊藤 学・酒井利夫(1981): 年最大風速記録による設計基本風速の算定に関する研究, 土木学会論文報告集, No. 305, pp. 23-34.
- 山口正隆・畑田佳男・中村雄二・大木泰憲(1994): わが国太平洋岸における超長期の台風発生波高の極値の推定, 海岸工学論文集, 第41巻, pp.206-210.
- 山口正隆・畑田佳男・花山格章(1994): わが国太平洋岸における高潮の極値の推定, 海岸工学論文集, 第41巻, pp.281-285.
- 山口正隆・畑田佳男・中村雄二・大木泰憲(1995): 波高の極値統計解析における母数推定法の比較, 海岸工学論文集, 第42巻, pp.231-235.
- 山口正隆・畑田佳男他(1995a): 観測資料に基づくわが国沿岸での確率波高の推定, 海岸工学論文集, 第42巻, pp.241-245.
- 山口正隆・畑田佳男・大木泰憲・西村教博・中村雄二(1995b): 確率的台風モデルに基づく台風時浅海波浪の極値推算システムの適用性, 海岸工学論文集, 第42巻, pp.246-250.
- 山口正隆・大木泰憲・前川隆海(1996): 最小2乗法に基づく極値統計解析システムの精度の検討, 海岸工学論文集, 第43巻, pp.231-235.
- 山口正隆・前川隆海・大木泰憲・中村雄二(1997): 波高の極値統計解析における最尤法の適用性の検討, 海岸工学論文集, 第44巻, pp.176-180.
- 山口正隆・大福学・畑田佳男(1997): わが国沿岸における気象・海象要素の極値の再評価, 海岸工学論文集, 第44巻, pp.186-190.
- 山口正隆・畑田佳男・大福学・前川隆海(1998): censoring を考慮した極値統計解析モデルおよび現地観測資料への適用, 海岸工学論文集, 第45巻, pp.216-220.
- 山口正隆・畑田佳男・大福 学(1999): 波高の極値統計解析における層別化手法の精度の検討, 海岸工学論文集, 第46巻, pp.241-245.
- 山口正隆・畑田佳男・大福学・野中浩一(1999): 波高の極値統計解析手法に関する国際共同研究成果との比較, 海岸工学論文集, 第46巻, pp.246-250.
- 山口正隆・畑田佳男・野中浩一・羽間義晃(1999): 確率的低気圧モデルに基づく波高の極値推算システムの適用性, 海岸工学論文集, 第46巻, pp.251-255.
- Akaike, H.(1974): A new look at the statistical model identification, IEEE Trans. on Autom. Contr., AC-19, pp. 716-723.
- Cunnane, C.(1978): Unbiased plotting positions - A Review, Jour. of Hydrology, Vol. 37, pp. 205-222.
- Efron, B.(1979): Computers and the theory of statistics - Thinking the unthinkable, SIAM Review, Vol. 21, No. 4, pp. 460-480.
- Fisher, R.A. and L.H. Tippet(1928): Limiting form of the frequency distribution of the largest or smallest member of a sample, Proc. Cambridge Phil. Soc., pp. 24-180.
- Goda Y, et al.(1993): Intercomparison of extremal wave analysis methods using numerical simulated data, Proc. WAVES '93 Conf., ASCE, pp.963-977.
- Greenwood, J. A., et al. (1979): Probability weighted moments: Definition and relation to parameters of several distributions expressible in inverse form, Water Resources Res., Vol. 15, pp. 1049-1054.
- Gringorten, I.I.(1963): A plotting rule for extreme probability paper, Jour. Geophys. Res., Vol. 68, No.3, pp. 813-814.
- Gumbel, E. J.(1958): Statistics of Extremes, Columbia Univ. Press, New York, 375p.
- Jenkinson, A. F.(1955): The frequency distribution of the maximum or minimum of meteorological elements, Quart. Jour. Roy. Meteorol. Soc., Vol. 81, pp. 158-171.
- Petruaskas, C. and P. M. Aagard(1970): Extrapolation of historical storm data for estimating design wave heights, Prepr. 2nd Ann. Offshore Tech. Conf., OTC1190.
- Vledder, G. V., et al.(1993): Case studies of extreme wave analysis: a comparative analysis, Proc. WAVES '93 Conf., ASCE, pp.978-992.