

平面構造物と波動場

Structures of Large Horizontal Dimensions and Wave Fields

喜 岡 渉
Wataru KIOKA

1. はじめに

平面構造物周りの波動問題に関する最近の展開について述べたい。平面構造物としては、離岸堤などの島堤、潜堤、沖合い人工島、および港湾外郭施設を考え、打上げ高、波高分布、海浜流などの算定に際しての波動場の解析には、地形の変化による屈折と構造物による回折を同時に扱うものとする。この分野の研究は、海岸波動（土木学会編、1994）の刊行以降も活発に進められており、緩勾配方程式の拡張や非線形方程式への新たな展開がはかられている。このうち線形の緩勾配方程式に対する改良は、おもに緩勾配仮定下で省略されていた水深変化の影響を表す高次項、または水深急変に伴う散乱成分を取り込むという形でなされており、波動理論の枠組みにかかわる新たな展開は見当たらない。一方、非線形波動方程式については、波の非線形性や分散性を種々の近似精度で表現した一連の非線形分散波動方程式が提案されており、弱非線形・弱分散性の Boussinesq 方程式においても非線形性や分散性の精度を向上させたいくつかの新バージョンが登場している（本水工学に関する夏期研修会 B コースの磯部(1999)ならびに灘岡(1999)を参照されたい）。

本稿では、非線形波動方程式、おもに Boussinesq 方程式系の波動モデルを用いた平面構造物周りの波動場の解析に関する現在までの研究を整理して解説する。非線形波動方程式によれば、打上げ高や波高分布の再現精度が数段よくなるとともに、波動場解析の結果からラディエーションストレスを評価した上で長波方程式を解くというプロセスを経なくても、海浜流や長周期波を直接計算することが可能である。反面、境界条件の取扱いや数値計算の安定性上、その実用面での解析は難しく、所定の計算精度を得るためにはいくつか解決すべき問題も残されている。

2. モデル方程式の分類

平面構造物周りの波動場の計算に適応可能な鉛直積分型の非線形分散波動方程式を表-1 に分類して示す。波動方程式は流速場（または圧力場）の表示方法によって分類しており、代表流速を用いるタイプのものを Boussinesq 方程式系、多成分連成近似を用いるものを多成分連成型方程式系として二つにわけている。表中、 ε および μ はそれぞれ波の非線形性と分散性の近似度を表す微小パラメータで、代表的な波の振幅、水深、波数をそれぞれ a , h , k とすると $\varepsilon = a/h$, $\mu = kh$ で与えられる。水深変動については、Mei・LeMéhauté (1996)、Dingemans (1973) および Beji・Nadaoka (1996) のモデルを除くと基本的に $\nabla h/kh \ll 1$ である緩勾配近似が用いられ、 $O(\nabla^2 h)$ および $O((\nabla h)^2)$ 以上の高次項は無視されている。

Boussinesq 方程式の代表は、水深平均水平流速と水位変動を変数として用いた Peregrine (1967) の式で、現在までのところ最も広く使われている。Abbott et al. (1978) の式は、Peregrine 式から水深変化の項を落として水深平均流速に代えて線流量を用いて表記したものである。同様に線流量を変数とした式は Madsen et al. (1991) によっても示されており、運動量方程式に付加的な補正項を含めることにより Boussinesq 方

表－１ 非線形平面波動方程式モデルの分類

	流速の表記法	波動モデル	近似度	備考
代表流速（ブシネスク方程式系）	水深平均流速	Peregrine (1967)	$O(\varepsilon, \mu^2)$	広く普及
		Abbott et al. (1978)	$O(\varepsilon, \mu^2)$	線流量で表記
		Madsen et al. (1991)	$O(\varepsilon, \mu^2)$ 分散性を改良	線流量で表記，運動量方程式に付加的補正項
		Schäffer・Madsen (1995)	$O(\varepsilon, \mu^2)$ 分散性を改良	Madsen et al. (1991)の式を修正，分散性について Padé[4/4]近似
		Beji・Nadaoka (1996)	$O(\varepsilon, \mu^2)$ 分散性を改良	水深変化の高次項，分散性について Padé[2/2]近似
		筒井ら (1996)	$O(\varepsilon, \mu^2)$ 分散性を改良	深海における分散性についてほぼ厳密
	底面流速	Mei・LeMéhauté (1996)	$O(\varepsilon, \mu^2)$	水深平均流速の式も誘導
	表面流速	Dingemans (1973)	$O(\varepsilon \mu^2, \mu^4)$	同じ近似オーダーの水深平均流速表記による式も誘導
		Katopodes et al. (1998)	$O(\varepsilon \mu^2, \mu^4)$	Hamiltonian の近似式
	任意深度の流速	Nwogu (1993)	$O(\varepsilon, \mu^2)$ 分散性を改良	分散性について Padé[2/2]近似になるように代表流速の深度を選択，分散性について見かけ上 $O(\mu^4)$
		Schäffer・Madsen (1995)	$O(\varepsilon, \mu^2)$ 分散性を改良	Nwogu (1993)の式を修正，分散性について Padé[4/4]近似
		喜岡・柏原 (1995)	$O(\varepsilon \mu^2, \mu^4)$ 分散性を改良	Nwogu (1993)の式の拡張
		Wei et al. (1995)	$O(\mu^2, \varepsilon^3 \mu^2)$ 分散性を改良	Nwogu (1993)の式の拡張，複数の深度の代表流速で表示，分散性については Padé[4/4]近似
		Madsen・Schäffer (1998)	$O(\mu^2, \varepsilon^3 \mu^2)$ 分散性を改良	Nwogu (1993)の式の拡張，分散性については Padé[4/4]近似
		金山ら (1999)	μ^{2N} について任意 次数 N，強分散	分散性について Padé[2N/2N]近似
多成分連成	鉛直モードの重ね合せ	灘岡・中川 (1993)	μ^2 について任意， 強分散	ガラーキン法による連成式，双曲線関数を鉛直分布関数に使用
		磯部 (1994)	μ^2 について任意， 強分散	変分原理を用いた連成式，べき乗数を鉛直分布関数に使用
		後野 (1994)	μ^2 について任意， 強分散	ガラーキン法による圧力についての連成式，ルジャンドル多項式を鉛直分布関数に使用
	多層モデル	金山 (1997)	各層について $O(\varepsilon, \mu^2)$ ，強分散	Boussinesq 方程式の多層モデル

程式の深海域での分散特性を改善している。Schäffer・Madsen (1995)は、さらに分散性を向上させ Padé[4/4] 近似まで満たすよう Madsen et al.の式を改良している。一方 Beji・Nadaoka (1996)は、付加的な補正項を加えることなく、分散性を Padé[2/2]まで満足する Boussinesq 方程式を提案しており、筒井ら(1996)は、深海において分散性をほぼ厳密に満たす式を提案している。

底面流速および表面流速を代表流速に用いた式に、それぞれ Mei・LeMéhauté (1996), Dingemans (1973) の Boussinesq 方程式がある。最近, Katopodes et al. (1998)は、Hamiltonian の近似式として Dingemans の式と同様な高次 Boussinesq 方程式を提示している。

任意深度の流速を代表流速に用い、その深度を分散性について Padé[2/2]まで満足するように決めることによって、見かけ上 $O(\mu^4)$ の精度を満足する Boussinesq 方程式が Nwogu (1993)により提案されている。Schäffer・Madsen (1995)は、さらに Padé[4/4]近似まで満たすよう Nwogu の式を改良している。喜岡・柏原 (1995a)は、Nwogu の式を拡張して $O(\varepsilon\mu^2, \mu^4)$ の高次 Boussinesq 方程式を得ている。Wei et al. (1995) および Madsen・Schäffer (1998)は、それぞれ分散性について Padé[4/4]近似まで満足する $O(\varepsilon^3\mu^2, \mu^2)$ の強非線形 Boussinesq 方程式を示している。なお、Wei et al.の式では、分散性を改善するため複数の深度の代表流速が用いられている。最近、金山ら(1999)は、分散性について Padé[2N/2N]近似が成り立つ任意次数 N の強分散波動方程式を提案している。

流速場を多成分連成近似で表す波動方程式系は灘岡・中川(1993)によって提案され、磯部(1994)のモデル式、後野(1994)のモデル式が相次いで発表された。灘岡・中川は、ガラーキン法により連成式を求め、流速の鉛直分布関数には双曲線関数を適用している。磯部は変分原理とべき乗数を、後野はガラーキン法とルジャンドル多項式をそれぞれ連成式の誘導、鉛直分布関数に用いている。それぞれ異なる鉛直分布関数を用いているが、流速を鉛直モードの重ね合わせとして表記しており、 μ^2 については任意オーダーの強分散性の波動方程式となっている。

金山(1997)は、鉛直モードの重ね合わせを用いずに各深度の流速自体を多成分の構成要素とする多層モデルによる強分散波動方程式を提案している。

3. 適用例

(1) 柱状構造物

直立円柱による孤立波の回折、直角柱によるクノイド波の回折の計算に、Peregrine(1967)タイプの Boussinesq 方程式がそれぞれ Wang et al.(1991), 喜岡・長嶋(1993)によって適用されている。ともに一定水深下での回折波を扱っており、方程式中の水深変動項は省略されている。Wang et al.は、さらに速度ポテンシャルと水位変動を変数とする方程式に書き換え一般曲線座標系に変換して差分法により解いており、喜岡・長嶋はガラーキン法による有限要素法を用いて直接 Boussinesq 方程式を解いている。

図-1 に、幅 150m の水路中央に置かれた一辺 $b = 21\text{m}$ の正方形断面角柱まわりの回折波形を入射波周期 $T = 12\text{s}$ 、波高 $H_I = 2\text{m}$ のケースについて示す。図-2 に示すように、柱体近傍の回折波には非線形性の影響が強く現れる。

(2) 防波堤および直立壁

Larsen・Dancy(1983)は、防波堤まわりの回折波を Peregrine(1967)の式を用い、開境界にスポンジ層を配置して差分法により計算している。同様に Madsen・Warren(1984)は、Abbott et al.(1978)のモデル式を用いて防波堤による回折波を計算し、線形回折理論による回折係数と比較することによりモデルの適用性を調べている。Wang(1993)は、Wang et al.(1991)と同じ計算方法により防波堤による孤立波の回折を解析している。遮蔽域の回折波に対しては線形解よりも実験波形により近い結果を与えることを示しているが、防波堤の回折問題に対して非線形回折理論の高近似解は現在のところ求められていないので、数値計算の精度

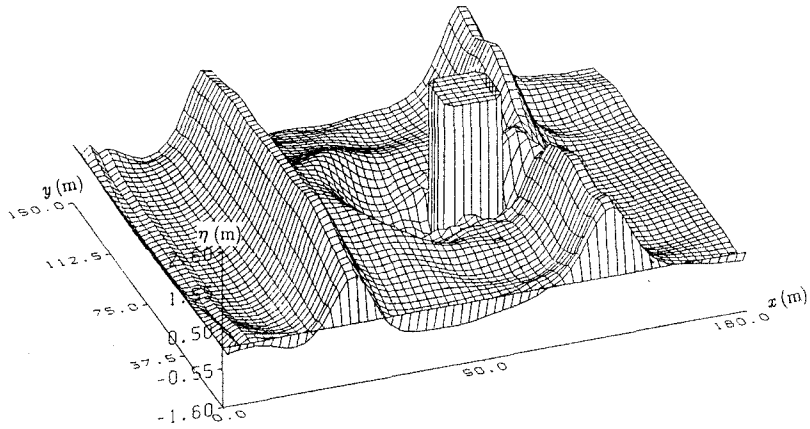


図-1 角柱まわりの回折波の計算 (喜岡・長嶋, 1993)

の検証はモデル方程式から非線形項を落として線形化した方程式による結果を線形解と比較することによって行われている (例えば Cruz ら, 1997)。

防波堤または直立壁に波が斜めに入射するとき, 入射角が小さい場合マッハ反射が生じ, 非線形干渉により反射面に沿ってステム波と呼ばれる特徴的な波が発達する. Yoon・Liu(1990)は, Boussinesq 方程式の放物型近似によるスペクトル法を用いて, 森屋ら(1995)は, Abbott et al. (1978)の Boussinesq 方程式を用いて差分法による数値解により直立壁に沿うステム波を調べている. スペクトル法は, 任意の方向に伝播する波成分から成る波動場に対しては適用できないが, 入射角が小さくステム波が形成されるような条件下では適用できる. 有川・磯部(1999)は, 磯部(1994)の非線形緩勾配方程式を用いて同様にマッハ・ステムを差分解により調べている. 彼らの計算によるステム波の発達の様子を図-3 に示す. 入射角 15° , 波高 1cm, 周期 2s の入射波に対して水深は 10cm で一定の条件下の計算結果で, 図の上面が反射壁, 波形は色が白いほど水位が高いことを示す. ステム波とともに亀甲形の波形が形成されいく様子が再現されている. Tanaka(1993)による数値的厳密解を用いた孤立波の計算結果と比較すると, 入射角がより小さいとき最大波高が生じるようであるが, 入射波高にも依存す

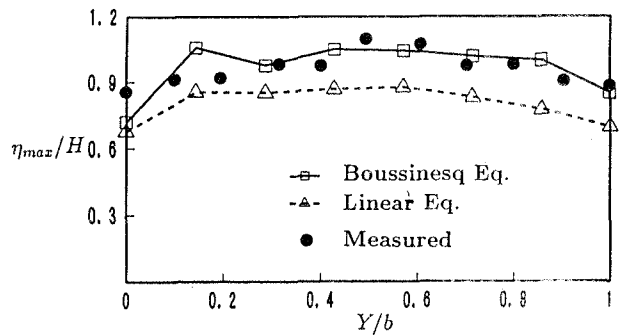


図-2 角柱前面への打上げ高 (喜岡・長嶋, 1993)

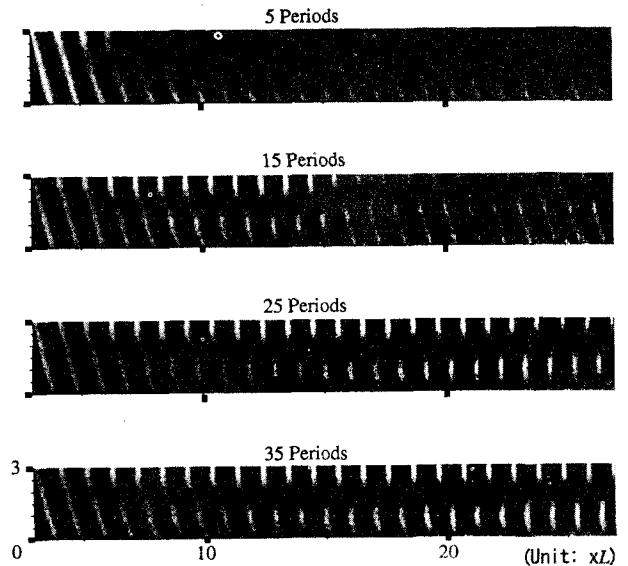


図-3 反射壁に沿うステム波の計算 (有川・磯部, 1999)

るので強非線形モデルによるさらなる検討が必要である。

(3) 離岸堤および潜堤

離岸堤については、波動場と海浜流の計算を同時に行えるという非線形平面波動方程式の有用性もあって、佐藤・Kabiling(1993)をはじめ喜岡ら(1994)、Cruz ら(1997)、Sørensen et al.(1998)など Boussinesq 方程式を用いた多くの計算例がある。離岸堤背後の波動場は、3 次元の碎波点の決定方法と碎波減衰の計算の仕方や遡上域の取扱いにより同じタイプの Boussinesq 方程式を用いてもその結果は幾分異なるようであるが、非碎波の場合は実験結果とよく一致している。図-4 に Cruz らの計算例を示す。

平面的に配置した不透透潜堤周辺の波と流れ場の解析については、柿沼ら(1997)が磯部(1994)の波動方程式の差分解を三角形潜堤に用いた計算例がある。一般に潜堤は透過性構造物であることから透水層上の Boussinesq 方程式タイプの非線形波動方程式による数値計算が Cruz et al.(1997)によってなされており、潜堤開口部付近の波動場の再現性について検討している。

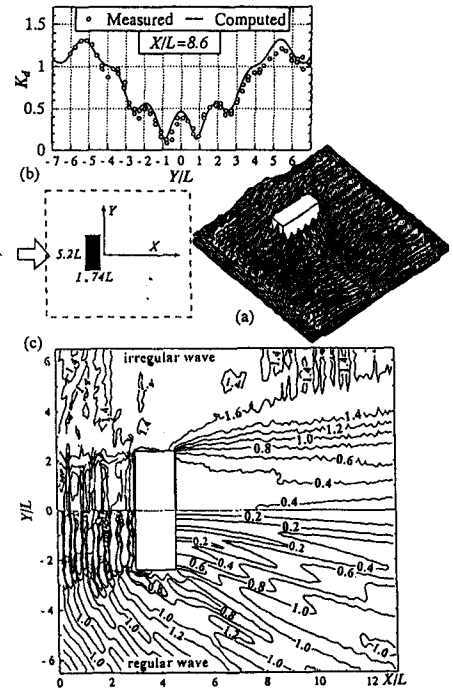
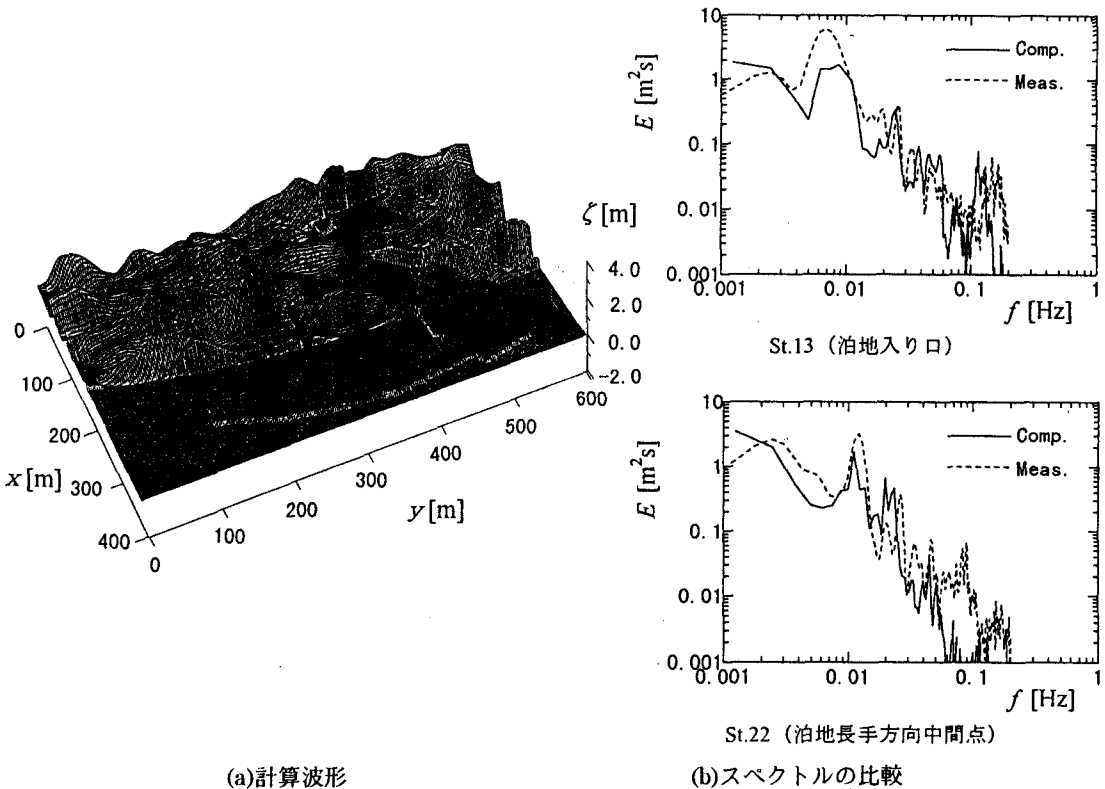


図-4 離岸堤まわりの波動場の計算 (Cruz ら, 1997)



(a)計算波形 (b)スペクトルの比較

図-5 港内長周期波の計算例 (喜岡ら, 1996b)

(4) 港内波浪

非線形平面波動方程式、とくに Boussinesq 方程式タイプをモデルとした港内波動場の解析については、Abbott et al. (1978)をはじめとして比較的多数の研究例ある。当初は規則波による港内波高分布の再現性に力点が置かれていたが、最近では不規則波を用いた数値計算が行われるようになり、港内長周期波の予測モデルとしても用いられている。

Smallman・Cooper(1989)は、Boussinesq 方程式を用いて規則的な波群を入射させたときの港内長周期波の挙動を数値的に調べている。不規則波による実スケールでの計算は、金山ら(1994)、喜岡ら(1996b)および Cruz ら(1998)によって実施されており、港内長周期波の予測精度について調べられている。図-5に、喜岡らによる Nwogu(1993)の式を用いた多方向不規則波に対する港内波浪の計算結果を示す。図-5(b)は、駿河湾奥に位置する由比漁港において台風が近接したときの港内波浪を観測値と比べたものである。水深 25m の沖合い観測点における有義波高は 3.7m、有義波周期は 9.5s であった。沖合いの離岸堤の効果もあって短周期成分のエネルギーは相当にカットされているが、港内では周波数 0.0025~0.013Hz の長周期領域での副振動が観測されており、数値計算の結果は長周期応答をほぼ再現するものになっている。部分反射境界の合理的な設定法、短周期成分波の数値的ダンピング、有効計算時間における統計的変動量の再現性の問題などが検討すべき課題として残されているが、長周期波の予測モデルとして Boussinesq 方程式は有用である。ただし、線形緩勾配方程式モデルによる数値計算に比べて 1 波長あたり数倍から十倍程度多くのメッシュ数が必要であり、Boussinesq 方程式の適用は漁港やマリナ、比較的小規模な港湾に限られている。また、Nwogu の式をはじめ Boussinesq 方程式系のモデルでは、特に相対水深が大きいときサブハーモニックの長周期成分(セットダウン波)を幾分小さく評価する。長周期波の予測精度は ϵ および μ に依存するので、強非線形・強分散波動方程式によればセットダウン波の再現性は向上する。

4. 境界の取扱い

(1) 無反射境界

図-6 に示すような港湾外郭部を囲む計算領域を例に考える。計算精度を確保し計算領域をできるだけ小さく抑えるには、計算領域の流体運動は開境界から入射する波(と流れ)成分のみの影響を受け、計算領域から出て行くすべての波成分は境界で反射・回折することなく自由透過するような無反射境界を設定する必要がある。非定常非線形波動方程式を数値的に解くとき、この無反射境界の取扱いは計算の安定性を左右し、高精度の計算アルゴリズムを用いても開境界からの擾乱の影響が大きいと所定の計算時間に達する前に計算が不安定になってしまう。不規則波、とくに多方向不規則波の入射を考えると、構造物付近を計算有効領域に入れて所定の計算継続時間を得るためには、開境界の性能が計算モデルの適用性を支配する。

数値解法に有限要素法を用いる場合には、境界積分法と接続する方法、固有関数展開をハイブリッド接続する方法、ダンパー要素や無限要素のように無限遠方での境界条件を満足する特殊な要素を用いる方法、などが原理的に適用可能である。一般に用いられている差分法においては、Sommerfeld の放射条件、スポンジ層と呼ばれるエネルギー吸収帯 (Israeli・Orszag, 1981)、および両者を併用する方法があり、それぞれ

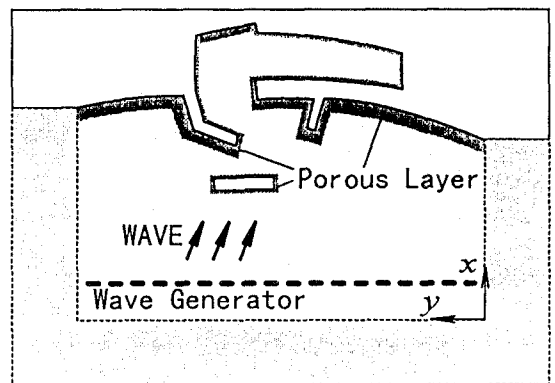


図-6 計算領域

の方法について改良が試みられている。

Sommerfeld 型の透過境界条件に関して、余(1998)は One-way 波動方程式に有理近似を導入した改良型の放射条件式を提案している。Sommerfeld 条件式と比べて境界により広角に入射する波に対して適用することが可能であり、平面構造物による回折計算においてその有用性を示している。Van Dongeren・Svendsen(1997)は、特性曲線法を用いて Sommerfeld の放射条件式を書き換え、より広角の入射波に対して有効な放射条件とするとともに、境界外からの入射波を開境界で与えることができる開境界の処理手法を示している。

不規則波動場を取り扱う場合、これら Sommerfeld 型の透過条件式において波速を規定するのが難しく、スポンジ層型のエネルギー吸収帯を境界外縁に設ける方法が最も広く用いられている。これを標準的な Peregrine(1967)の式に適用すると、次のように運動量方程式に流速に比例する（線形的な）抵抗として表される。

$$\eta_t + \nabla \cdot [(h + \eta)\mathbf{u}] = 0 \quad (1)$$

$$\mathbf{u}_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + g \nabla \eta - \frac{1}{2} h \nabla (h \nabla \cdot \mathbf{u}_t) + \frac{1}{6} h^2 \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}_t) + f_s \mathbf{u} = 0 \quad (2)$$

ここに、 η は水面変動、 $\mathbf{u}$ は水深平均流速ベクトル、 h は静水深、 $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right)$ は水平方向微分演算子、下付き添え字 t は時間による微分を表す。 f_s はエネルギー吸収帯内の減衰関数で、Cruz ら(1997)は次式で与えている。

$$f_s = \theta \sqrt{\frac{g}{h}} \frac{N+1}{2F^N} x'^N \quad (3)$$

ただし、 θ は減衰係数、 N は減衰関数の次数、 F はエネルギー吸収帯の幅、 x' は吸収帯先端からの座標である。 $N=1$ としたときの線形的エネルギー吸収帯からの反射率 K_r は、減衰係数 θ 、相対水深 kh および吸収帯の相対幅 F/h の関数として与えられ、不規則波に対して周波数域と許容される K_r の値から最適な θ と F/h を算定することができる図が Cruz らにより提案されている。長周期帯を含む不規則波に対しては、エネルギー吸収帯を相当に広くとらなければ吸収制御は難しく、大山・灘岡(1990)のように吸収帯の外側境界に Sommerfeld 型境界を設けて長周期波のエネルギーを透過させる方法が有用である。このようなエネルギー吸収帯と Sommerfeld 型境界を組み合わせた境界処理法においても、多方向不規則波動場に対しては放射される波の波速の与え方が難しく Sommerfeld 型境界が透過境界とならないことから、エネルギー吸収帯を十分に広くとって反射波の影響を抑制してやる必要がある。

(2) 造波境界

どのような波を入射させるかによって非線形波動方程式の解は異なってくる。解析条件によって適切な有限振幅波の理論解を選択することになるが、不規則波に対しては、入射境界を相対水深が十分に大きくそこでは波の非線形性の影響が十分に小さいと仮定して、低次オーダーの波動解が用いられる。入射波の水位変動を次の式(4)のように表すと、例えば Nwogu(1993)の方程式に対しては線形化した一定水深下の式により、各成分の流速は式(5)および(6)のように与えられる。

$$\eta^{(1)}(\mathbf{x}, t) = \sum_n a_n \cos(\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{x} - \omega_n t + \varepsilon_n) \quad (4)$$

$$u_a^{(1)}(\mathbf{x}, t) = \frac{\omega_n}{k'_n h} \cos \theta_n a_n \cos(\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{x} - \omega_n t + \varepsilon_n) \quad (5)$$

$$v_a^{(1)}(\mathbf{x}, t) = \frac{\omega_n}{k'_n h} \sin \theta_n a_n \cos(\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{x} - \omega_n t + \varepsilon_n) \quad (6)$$

ここに、 $\mathbf{x}$ は位置ベクトル、 $a_n, \mathbf{k}_n, \omega_n, \varepsilon_n$ はそれぞれ成分波の振幅、波数ベクトル、角周波数および初期位相であり、 x 軸に対する入射角 θ_n に対して $\mathbf{k}_n = (k_n \cos \theta_n, k_n \sin \theta_n)$ と表される。代表流速を定義する水深 z_a に関するパラメーター α 、 k' はそれぞれ次の各式で与えられる。

$$\alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{z_a}{h} \right)^2 + \frac{z_a}{h} \quad (7)$$

$$k' = k \left[1 - \left(\alpha + \frac{1}{3} \right) (kh)^2 \right] \quad (8)$$

$\alpha = -1/3$ と置くと水深平均流速で定義した Peregrine(1967)式に対する表示式になる。上式から求められる 1 次成分波は線形化された Nwogu の式しか満足しておらず、2 次波も考慮する場合は振幅に関して 2 次オーダーの式より得られる次の成分波を加えておく必要がある。

$$\eta^{(2)}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} \sum_n \sum_m a_n a_m G_{\pm}(\omega_n, \omega_m, \theta_n, \theta_m) \cdot \cos[(\mathbf{k}_n \pm \mathbf{k}_m) \cdot \mathbf{x} - (\omega_n \pm \omega_m) t + (\varepsilon_n \pm \varepsilon_m)] \quad (9)$$

ここに、 $G_{\pm}$ は 2 次の伝達関数（干渉係数）で、波向の角度差を $\Delta\theta = \theta_n - \theta_m$ として次式のように与えられる。

$$G_{\pm}(\omega_n, \omega_m, \theta_n, \theta_m) = \frac{\omega_n \omega_m (k_{\pm} h)^2 \cos \Delta\theta \left[1 - \left(\alpha + \frac{1}{3} \right) (k_{\pm} h)^2 \right]}{2\lambda k'_n k'_m h^3} + \frac{\omega_{\pm} [1 - \alpha (k_{\pm} h)^2]}{2\lambda k'_n k'_m h^3} \cdot [\omega_n k'_m h (k_n h \pm k_m h \cos \Delta\theta) + \omega_m k'_n h (k_n h \cos \Delta\theta \pm k_m h)] \quad (10)$$

ただし、 $\omega_{\pm} = \omega_n \pm \omega_m$ 、 $k_{\pm} = |\mathbf{k}_n \pm \mathbf{k}_m|$ で、 λ は次式で与えられる。

$$\lambda = \omega_{\pm}^2 [1 - \alpha (k_{\pm} h)^2] - g k_{\pm}^2 h \left[1 - \left(\alpha + \frac{1}{3} \right) (k_{\pm} h)^2 \right] \quad (11)$$

以上により求めた入射条件をそのまま沖側境界で与えるためには、その境界上で Sommerfeld 型の透過条件を課さなければならず、不規則波動場に対してエネルギー吸収型の開境界処理方法を適用する際には、造波ソースを用いて開境界より内側に設けた造波境界で入射波をインプットすることになる。この手法は、Boussinesq 方程式に対して Larsen・Dancy(1983)がその適用性を検討しており、造波境界を y 軸に平行に

とるとき造波境界で水位変動 η に加える η^* を入射させる波の水位変動 η^i に対し

$$\eta^* = 2\eta^i \frac{C\Delta t}{\Delta x} \cos \theta \quad (12)$$

のように与えている。ただし、 C は波速、 Δx 、 Δt はそれぞれ x 方向および時間のきざみ幅である。Lee・Suh(1998)は、波速に代えてエネルギー輸送速度 C_e を用いた

$$\eta^* = 2\eta^i \frac{C_e \Delta t}{\Delta x} \cos \theta \quad (13)$$

による造波方法を提案しているが、Boussinesq 方程式系に対する適用性については明らかでない。

Larsen・Dancy(1983)や Lee・Shu(1998)においては、計算領域内に設けられた線上で造波ソースを与え、造波境界について計算アルゴリズムを工夫しないと所定の波をうまく造波できないという問題点があった。とくに非線形波動方程式に対して非スタッガード格子を用いた差分解析においては、複数の格子点にわたり面的に造波ソースを与えた方が合理的であることから、その手法が Wei et al.(1999)によって検討されている。Wei et al.は線形化した Boussinesq 方程式系に対してソース関数 $f(x, y, t)$ をグリーン関数を用いて求めており、Nwogu(1993)の式に対して示すと次のようである。

$$\eta_t + h\nabla \cdot \mathbf{u} + \left(\alpha + \frac{1}{3} \right) h^3 \nabla^2 (\nabla \cdot \mathbf{u}) = f(x, y, t) \quad (14)$$

$$\mathbf{u}_t + g\nabla \eta + \alpha h^2 \nabla^2 \mathbf{u}_t = 0 \quad (15)$$

ここに、ソース関数はソース幅を決めるパラメーターを β 、 $\lambda = k \sin \theta$ として次式で与えられている。

$$f(x, y, t) = \exp(-\beta x^2) \frac{1}{4\pi^2} \iint D(\lambda, \omega) \exp[i(\lambda y - \omega t)] d\omega d\lambda \quad (16)$$

$$D = \frac{2a \left[\omega^2 - \left(\alpha + \frac{1}{3} \right) gk^4 h^3 \right] \cos \theta}{\omega k \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} \exp\left(-\frac{k^2 - \lambda^2}{4\beta}\right) [1 - \alpha(kh)^2]} \quad (17)$$

この造波方式の有用性については Wei et al.(1999)で議論されている。

(3) 構造物境界

不透過の完全反射境界においては運動学的条件より、構造物表面の外向き法線ベクトルを $\mathbf{n}$ とすると次式を満足する。

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (18)$$

ただし、非線形方程式において上式が成り立つのは、連続式が厳密に与えられている場合で、水深平均流速で定義された方程式系に対してのみである。任意深度の流速で定義された方程式系では、連続式は近似的しか表現できないので、式(18)による境界条件では質量が保存されない。繰り返し法により誤差を修正するなどの処理が必要となるが、次の境界条件を併用することにより誤差を小さくする方法が用いられることが多い (Wei・Kirby, 1995)。

$$\nabla \eta \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (19)$$

任意反射率境界に対する一般的な境界条件の構築は非線形波動場においては難しいことから、エネルギー吸収帯を境界に配置してそこからの反射率が所定のものになるように減衰係数等を調整して吸収制御する方法がとられる（例えば、金山ら, 1995；有川・磯部, 1999）。Cruz ら(1998)は、反射率と入射角を与えて volume flux 法による部分反射条件式を導いているが、反射境界への入射角を数値的に求めてやる必要があり多方向波動場においては適用しにくい。喜岡ら(1996)は、Nwogu(1993)の方程式を透水層中の流体運動に拡張した次の方程式を用いて、構造物前面に透水層を配置することによって任意の反射率を設定した。

$$\eta_i + \nabla \cdot [(\eta + h)\mathbf{u}_p] + \nabla \cdot \left[\left(\frac{1}{2} z_a^2 - \frac{1}{6} h^2 \right) h \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}_p) + \left(z_a + \frac{1}{2} h \right) h \nabla (\nabla \cdot (h \mathbf{u}_p)) \right] = 0 \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \frac{\tau}{n} (\mathbf{u}_p)_i + \frac{1}{2n^2} \nabla u_p^2 + g \nabla \eta + \frac{\tau}{n} \left[\frac{1}{2} z_a^2 \nabla (\nabla \cdot (\mathbf{u}_p)_i) + z_a \nabla (\nabla \cdot (h (\mathbf{u}_p)_i)) \right] \\ + \alpha \left[\mathbf{u}_p + \left[\frac{1}{2} z_a^2 \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}_p) + z_a \nabla (\nabla \cdot (h \mathbf{u}_p)) \right] \right] + \beta |\mathbf{u}_p| \mathbf{u}_p = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

ここに、 $\mathbf{u}_p$ は透水層内の任意水深 z_a における流量流速ベクトル、 n は空隙率、 τ は付加質量係数を κ として $\tau = 1 + \kappa(1 - n)$ で与えられる質量係数である。流体運動に Forchheimer 型抵抗則を適用しており、係数 α が乗じてある線形な層流抵抗項はエネルギー吸収帯の減衰項と本質的に同じ減衰特性を持つものである。透水層ではさらに非線形な乱流抵抗 $\beta |\mathbf{u}_p| \mathbf{u}_p$ の項が加えられる。係数 α 、 β は動粘性係数を ν 、透水層構成材の平均粒径を D としてそれぞれ次式で評価し、所定の反射率は空隙率と透水層幅を調整することによって得ている。

$$\alpha = 1000 \frac{(1-n)^3}{n^2} \frac{\nu}{D^2}, \quad \beta = 1.1 \frac{(1-n)}{n^3} \frac{1}{D} \quad (22)$$

鉛直壁での越波の境界条件として、森屋・水口(1996)は吉川らの堰の越流モデルを境界条件に用いる方法を提案するとともに、Boussinesq 方程式により防波堤まわりの越波伝達波を計算している。織田ら(1997)は、越波が打ち込む際の水塊の水平方向および鉛直方向流速を用いて、越波伝達波を考慮した Boussinesq 方程式を誘導している。織田らのモデルは、越波の打ち込み位置と流速成分が求まれば、原理的には平面 2 次元の越波伝達波の計算にも適用可能である。

5. その他の変形要素

(1) 碎波と波打ち帯

碎波点の決め方および碎波後のモデル化については間瀬(1999)が、碎波後の波打ち帯の波動運動については浅野(1999)がそれぞれ詳述しているので参照されたい。

碎波後の平面 2 次元波動場の計算例としては、碎波条件に波速と水平最大流速の比を用いた佐藤・Kabiling(1993)、波頭前面の傾斜角を用いた Schäffer et al.(1992)および喜岡ら(1994)、波高水深比を用いた柿沼ら(1997)のものがある。灘岡ら(1999)は、波頭で鉛直圧力勾配が 0 となる点を碎波判定に用いて、灘岡・中川(1993)の多成分連成モデルに灘岡・大野(1997)の水深積分型乱れエネルギー方程式を組み合わせることにより、碎波を含んだ多方向平面波動の非線形波動モデルを提案している。

砕波後の波打ち帯を汀線の境界条件として考慮したモデルには、Boussinesq 方程式を用いた Sørensen et al.(1998)のものがある。波打ち帯では Boussinesq 方程式をそのまま適用すると分散項のために数値的に不安定になるので、通常は分散項を落とした非線形長波方程式が適用される。非線形長波方程式による断面 1 次元波打ち帯の計算アルゴリズムの検討が、Balzano(1998)によってなされており、参考になる。

(2) 流れ

Yoon・Liu(1989)は、流速を波の軌道流速成分よりも大きく群速度よりも小さいとして、波長のスケールに比べてゆっくりとした変動を許した流れと波の共存場に対して成り立つ Boussinesq 方程式を導いている。最近 Chen et al.(1998)は、Yoon・Liu の方程式を群速度と同じオーダーの流速を持つ流れの場に拡張するとともに、流れによるドップラー効果を表す分散関係式に対し Padé[4/4]の精度を有する方程式に修正している。同様な波と流れの方程式は Nwogu(1993)の式に対しても誘導されている。

(3) 透水層

人工リーフや潜堤など平面的な透水層上を伝播する非線形波動に対するモデル式としては、透水層内の流体運動に Forchheimer 抵抗則を用いた Boussinesq 方程式が磯部ら(1991)、喜岡ら(1996a)、Cruz et al.(1997)によって求められている。これらはすべて連続式と流体層と透水層の運動方程式を $O(\varepsilon, \mu^2)$ の精度で満足する連立偏微分方程式によって与えられている。喜岡ら(1996 a)による層平均流速についての Boussinesq 方程式を示すと次のようである。

$$\eta_t + \nabla \cdot [(\eta + h)\mathbf{u}] + \nabla[(d - h)\mathbf{U}] = 0 \quad (24)$$

$$\mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + g\nabla\eta = \frac{1}{2}h\nabla[\nabla \cdot (h\mathbf{u}_t)] - \frac{1}{6}h^2\nabla(\nabla\mathbf{u}_t) + \frac{1}{2}h\nabla[\nabla(d - h)\mathbf{U}_t] \quad (25)$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \frac{1}{2}h\nabla[\nabla \cdot (h\mathbf{u}_t)] - \frac{1}{3}h^2\nabla(\nabla\mathbf{u}_t) + \frac{1}{2}h\nabla[\nabla(d - h)\mathbf{U}_t] \\ & = \frac{\tau}{n} \left[\mathbf{U}_t - \frac{1}{2}(d - h)\nabla[\nabla \cdot (d\mathbf{U}_t)] + \frac{1}{6}(d - h)d\nabla(\nabla\mathbf{U}_t) - \frac{1}{3}(d - h)^2\nabla(\nabla\mathbf{U}_t) + \frac{\tau}{n^2}(\mathbf{U} \cdot \nabla)\mathbf{U} \right] \\ & + \alpha \left[\mathbf{U} - \frac{1}{2}(d - h)\nabla[\nabla \cdot (d\mathbf{U})] + \frac{1}{6}(d - h)d\nabla(\nabla\mathbf{U}) - \frac{1}{3}(d - h)^2\nabla(\nabla\mathbf{U}) \right] + \beta|\mathbf{U}|\mathbf{U} \end{aligned} \quad (26)$$

ここに、 η は水面変動、 $\mathbf{u}$ 、 $\mathbf{U}$ はそれぞれ水層の水深平均流速ベクトルおよび透水層の層平均流量流速ベクトル、 h は透水層までの水深、 d は透水層の下の不透過層表面までの全水深である。

6. モデル方程式の適用性

(1) 分散性と非線形性

非線形波動方程式の深海における適用性は、一定水深下で線形化した方程式により記述される定形進行波の分散性を調べることににより検討されている。

図-7 は、Nwogu(1993)の Boussinesq 方程式の深海への適用性を示すもので、Chen・Liu(1995)が任意深度を表す式(7)のパラメーター α を変えて波速 C 、群速度 C_g および振幅 A それぞれについて微小振幅波との比を相対水深 h/λ_0 (λ_0 は深海波の波長)に対して求めたものである。パラメーター α の値は、-0.3803 (図中の実線)、-0.3855 (破線) および -2/5 (点線) の3種類に変化させ、このうちの $\alpha = -2/5$ は Madsen et al.(1991)の分散近似に一致する。群速度の適合性を考慮して $\alpha = -0.3855$ を最適値としているが、

$h/\lambda_0 > 0.35$ の相対水深では浅水係数の誤差が大きくなっている。浅水係数の誤差は α の値を変えることにより、小さくすることができるが、今度は分散性をそこなうことになる。

図-8 は、 $O(\varepsilon\mu^2, \mu^4)$ まで考慮した高次 Boussinesq 方程式の分散性を同様に線形化した方程式により求めたものである。図中のパラメーター $\alpha' = z_a/h$ は代表深度を水深比で表し、 $\alpha' = 0$ は水面、 $\alpha' = -1.0$ は水底における代表流速をとることを意味する。波速については $\alpha' = -0.625$ ($\alpha = -0.4297$) で深海における適用性が最も改善される。

ところで、非線形波動方程式の持つ分散特性は数値計算における数値的な安定性を（理論的に）支配する。例として Nwogu(1993) の線形方程式における次の分散関係式を考える。

$$C^2 = gh \left[\frac{1 - \left(\alpha + \frac{1}{3} \right) (kh)^2}{1 - \alpha (kh)^2} \right] \quad (27)$$

パラメーター α は負の値をとるので分母は k^2 が正のとき常に正となることから、 $\alpha < -1/3 + (kh)^{-2}$ の範囲で α を選択する限り C^2 は正の値をとり、数値的には安定である。 $\alpha = 0$ の静水面の流速を代表流速とする Boussinesq 方程式では、 $kh < \sqrt{3}$ で擾乱が時間とともに増幅されて数値的不安定となる。図-9 は、喜岡・柏原(1995a) の高次 Boussinesq 方程式について同様に安定性を調べたもので、図中の黒く塗りつぶした部分、すなわち $\alpha' < 0.5$ で相対水深 $k_0 h$ が大きい領域において不安定である。

一方、Peregrine(1967) の水深平均流速を用いた Boussinesq 方程式に対する分散関係式は、式(27)で $\alpha = -1/3$ と置いて

$$C^2 = gh \left[1 + \frac{1}{3} (kh)^2 \right]^{-1} \quad (28)$$

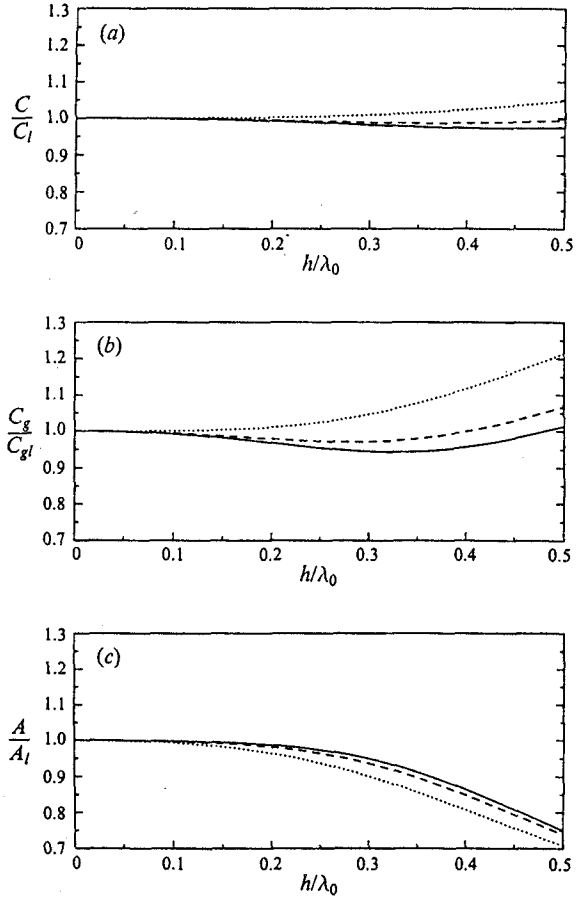


図-7 Nwogu(1993)の式による波速，群速度および浅水係数の再現性(Chen・Liu, 1995)

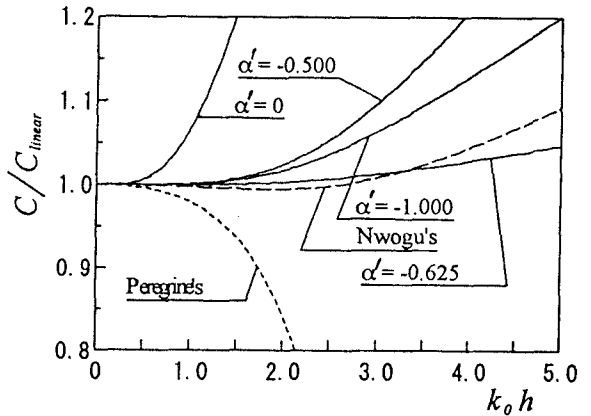


図-8 高次 Boussinesq 方程式の分散特性 (喜岡・柏原, 1995a)

と表される． k^2 が正の値をとる限り常に正の波速 C^2 を持つ．上式を角周波数 ω の関数に変形すると，次式で示すように C^2 は負の値を取り得る．

$$C^2 = gh \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{\omega^2 h}{g} \right) \right]^{-1} \tag{29}$$

すなわち， $\omega^2 h / g > 3$ となる領域では波数は虚数を取り進行に伴い減衰していく波動方程式になる．この領域での計算例としては，Nikolaos et al. (1998)のものがある．

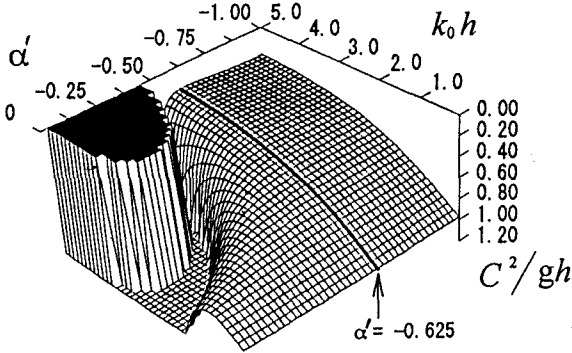
非線形性の改善度は一般に，非線形波動方程式から求まる 2 次の伝達係数（干渉係数）をラプラス方程式の 2 次解（すなわち Stokes 第 2 次近似解）と比較することによって評価される．図－10(a), (b)は，Nwogu(1993)の Boussinesq 方程式（図中の破線）および Wei et al.(1995)の式（一点鎖線）の 2 次伝達係数を Stokes 型の摂動展開を用いて求められる 2 次の伝達係数と比べたもので，それぞれ周波数和(superharmonic)，周波数差(subharmonic)の伝達係数を示す．図中の上方の曲線群は一方向進行波について，下の曲線群は波向き角 $\Delta\theta = 40^\circ$ で交差する波の伝達係数を示す．非線形性に関して高次の Boussinesq 方程式である Wei et al.の式の方が，相対水深 h/ℓ_0 （ ℓ_0 は沖波波長）の大きい領域まで 2 次のオーダーの非線形干渉項についても Stokes 解とよく一致している．ただし， $h/\ell_0 > 2.0$ の深い領域では Nwogu の式よりもとくに superharmonic に対して一

致度が悪くなっている．

図－11 に拘束長周期波 (set-down 波) の再現性の指針となる subharmonic の伝達係数を Nwogu の式（図中の $\alpha = -0.390$ ）および Peregrine(1967)の式（ $\alpha = -1/3$ ）について示す．図の(a), (b)は，それぞれ周波数差を $\omega_- = \omega_1 - \omega_2 = 0.1\omega$ （ただし， $\omega = (\omega_1 + \omega_2)/2$ ）および $\omega_- = 0.2\omega$ としたときの伝達係数と Stokes 解の伝達係数の比をとって set-down 波の振幅比として表したものである．Boussinesq 方程式による set-down 波の振幅は， $\Delta\theta$ が非常に小さいときには中間水深において Stokes 解に比べて過小値を与え，逆に $\Delta\theta$ がある程度大きくなると過大に評価する傾向がある．Nwogu の式は Peregrine の式と比べると Stokes 近似により近い値を与えているが，いずれの式においても $k_0 h > 1.0$ の水深における set-down 波の計算には不向きである．

以上に示した分散性・非線形性の近似精度の議論は，モデル方程式を線形化または振幅について摂動展開した方程式に対してのものであり，厳密にモデル方程式の精度を評価したものではない．その意味で，図－7～図－12 は解析精度に対しておおよその指針を与えるものでしかない．Sobey(1993)は，流れ関数法を用いたフーリエ級数解（定形進行波に対する数値的厳密解）を Boussinesq 方程式の各項に代入して，運動量保存がどの程度満足されているかを調べている．また Otta・Schäffer(1999)は，一定水深における断面 1 次元式に書き換えた Nwogu(1993)，Wei et al.(1995)および Madsen・Schäffer(1998)の式に対し，定形進行波の数値解を流れ関数法を用いて算定し，非線形性および分散性が相互に及ぼす精度の影響について調べている．

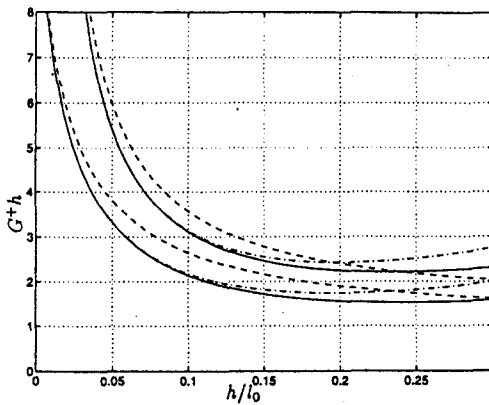
(2) ライン法による検証



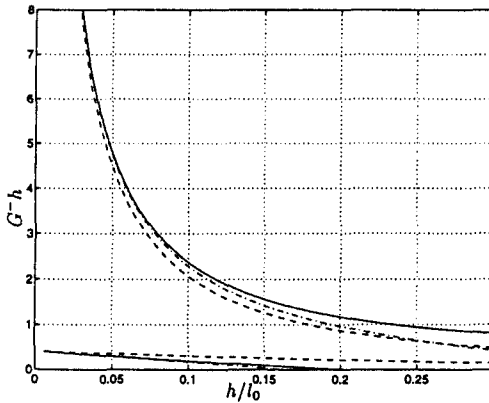
図－9 高次 Boussinesq 方程式の安定領域
（喜岡・柏原，1995a）

弱分散性の波動方程式は、共通して運動方程式中に $\nabla^2 \mathbf{u}$ と表される周波数分散を有し（例えば式(2)、式(15)）、方程式のもつ分散特性によってはこの項が高周波数成分をカットするフィルターとして働く。さらに、差分法において陰的解法がとられるとき、この高次の微分項はさらに数値的フィルターとしても働き、数値的なダンピングをもたらす。

数値計算において、この分散項に 2 次オーダーの差分スキームを用いる場合、打ち切り誤差が分散項と同じオーダーになる。このため、この打ち切り誤差を利用して所定の精度を得るようにスキームを工夫するか（例えば Abbott et al., 1978 ; Nwogu, 1993）、分散項の打ち切り誤差に対して高精度の差分スキームを用いないと（例えば、喜岡・柏原, 1995a ; Wei・Kirby, 1995 ; 鄭ら, 1998）、数値解における分散項の特性が変わってしまう。また、移流項などの非線形項は差分法または有限要素法においては離散化過程において線形化され、繰り返し計算などによりその近似精度を上げておかないと、方程式が本来持つ非線形性を数値的に歪めてしまう。すなわち、モデル方程式のもつ分散性や非線形性を損なうことなく数値計算を行うには、こうした打ち切り誤差をできるだけ抑えて所定の精度を得ることができるスキームを用いなければならない。これは非線形波動方程式系、とくに 3 次以上の導関数を含む高次 Boussinesq 方程式や 2 元以上の非線形連立微分方程式を解くことになる多成分連成型波動方程式においては、相当にやっかいである。

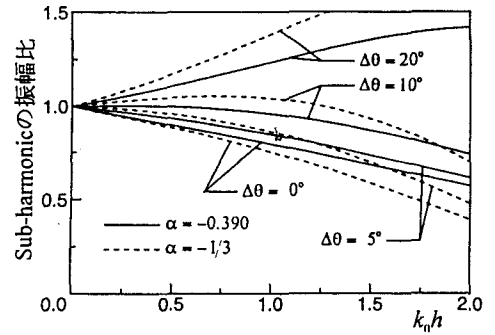


(a) Superharmonic

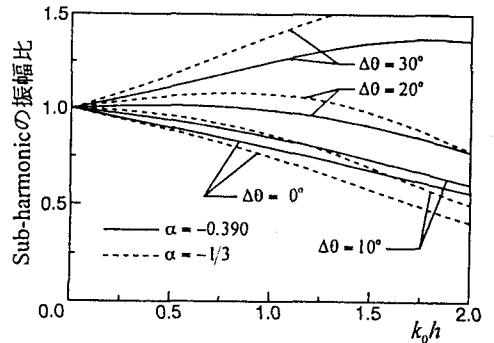


(b) Subharmonic

図-10 2 次の伝達係数の比較
(Kirby・Wei, 1994)



(a) $\omega_- = 0.1\omega$



(b) $\omega_- = 0.2\omega$

図-11 2 次の subharmonic の振幅比
(喜岡・柏原, 1995b)

ここでは、数値的な分散性や非線形性の歪みを生じさせないで、方程式が本来もつ性能を評価するためにライン法 (Method of Lines) による数値解を用いて検討を加えた。ライン法は見かけ上、差分解法と似ているが差分スキームとは全く異なるスキームで、ロシアの Liskovets により開発されたとしている (Schiesser, 1991)。流体分野においても K-dV 方程式に対して適用した Schiesser (1994) や地盤の浸透流の解析に用いた Greenblatt・Sobey (1997) の例があるものの、差分法や有限要素法と比べて適用例は少ない。

表示を簡潔にするため一定水深における次の断面 1 次元 Boussinesq 方程式についてライン法を適用する。Peregrine (1967)

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + (h + \eta) \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \quad (30)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{1}{3} h^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} = 0 \quad (31)$$

Nwogu (1993)

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + (h + \eta) \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} + \left(\alpha h^2 + \frac{1}{2} \alpha^2 h + \frac{1}{3} h^2 \right) \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \quad (32)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} + \alpha h \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} + \frac{1}{2} \alpha^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} = 0 \quad (33)$$

Beji・Nadaoka (1996)

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + (h + \eta) \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \quad (34)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} - (1 + \beta) \frac{1}{3} h^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} - \beta g \frac{1}{3} h^2 \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0 \quad (35)$$

空間に対して適当に離散点を取りそれぞれの点を $x_i = i\Delta x$ ($i=1, N$) とする。 Δx は計算領域で一定である必要はない。まず変数関数 $\eta(x, t)$, $u(x, t)$ の空間に対して適当な内挿関数を用いて、導関数を時間についての項のみに書き換える。通常は Taylor 展開が用いられ、4 次の項までとると次のように表される。

$$\eta(x, t) = \eta_0(t) + \eta_1(t)x + \eta_2(t)x^2 + \eta_3(t)x^3 + \eta_4(t)x^4 + O(\Delta x^4) \quad (36)$$

$$u(x, t) = u_0(t) + u_1(t)x + u_2(t)x^2 + u_3(t)x^3 + u_4(t)x^4 + O(\Delta x^4) \quad (37)$$

平面 2 次元問題においては上式に代えて 2 変数関数に対する Taylor 展開が適用される。水深の変動を考えると、水深についても次のように展開しておく必要がある。

$$h(x) = h_0 + h_1 x + h_2 x^2 + h_3 x^3 + h_4 x^4 + O(\Delta x^4) \quad (38)$$

式(36)および(37)の導関数は、 $x=0$, Δx , $-\Delta x$, $2\Delta x$ および $-2\Delta x$ における変数 u_i , u_{i+1} , u_{i-1} , u_{i+2} および u_{i-2} に関する代数方程式を解くことによって求められ、 u について示すと次のように与えられる。 $i=1, 2, N-1, N$ に対しても、例えば $i=1$ については $i=2, 3, 4, 5$ における変数に対して同様に求めることができる。

$$\frac{du_i}{dx} \equiv u_1(t) = \frac{u_{i-2} - 8u_{i-1} + 8u_{i+1} - u_{i+2}}{12\Delta x} \quad (39)$$

$$\frac{d^2 u_i}{dx^2} \equiv 2! u_2(t) = \frac{-u_{i-2} + 16u_{i-1} - 30u_i + 16u_{i+1} - u_{i+2}}{12\Delta x^2} \quad (40)$$

$$\frac{d^3 u_i}{dx^3} \equiv 3! u_3(t) = \frac{-u_{i-2} + 2u_{i-1} - 2u_{i+1} + u_{i+2}}{2\Delta x^3} \quad (41)$$

$$\frac{d^4 u_i}{dx^4} \equiv 4! u_4(t) = \frac{u_{i-2} - 4u_{i-1} + 6u_i - 4u_{i+1} + u_{i+2}}{\Delta x^4} \quad (42)$$

これらの式をモデル方程式に代入すると、すべての方程式は次のように連立常微分方程式に変換される。

$$\frac{d\eta_i}{dt} = A_0 \quad (43)$$

$$A_1 \frac{du_{i-2}}{dt} + A_2 \frac{du_{i-1}}{dt} + A_3 \frac{du_i}{dt} + A_4 \frac{du_{i+1}}{dt} + A_5 \frac{du_{i+2}}{dt} = A_6 \quad (44)$$

ここに、例として Nwogu(1993)のものを示すと次のようである。

$$\begin{aligned} A_0 &= -u_i \frac{8(\eta_{i+1} - \eta_{i-1}) - (\eta_{i+2} - \eta_{i-2})}{12\Delta x} - (h_i + \eta_i) \frac{8(u_{i+1} - u_{i-1}) - (u_{i+2} - u_{i-2})}{12\Delta x} \\ &\quad - \left(\alpha h_i^2 + \frac{1}{3} h_i^2 + \frac{1}{2} \alpha^2 h_i \right) \frac{(u_{i+2} - u_{i-2}) - 2(u_{i+1} - u_{i-1})}{2\Delta x^3} \\ A_1 &= -(2\alpha h_i + \alpha^2) \frac{1}{24\Delta x^2} \\ A_2 &= (2\alpha h_i + \alpha^2) \frac{2}{3\Delta x^2} \\ A_3 &= 1 - (2\alpha h_i + \alpha^2) \frac{5}{4\Delta x^2} \\ A_4 &= A_2 \\ A_5 &= A_1 \\ A_6 &= -g \frac{8(u_{i+1} - u_{i-1}) - (u_{i+2} - u_{i-2})}{12\Delta x} - u_i \frac{8(u_{i+1} - u_{i-1}) - (u_{i+2} - u_{i-2})}{12\Delta x} \end{aligned} \quad (45)$$

ライン法の本質は、式(43)、(44)のように連立偏微分方程式系を連立常微分方程式系に置き換えて解くことにあり、離散化において非線形項は非線形のまま取り扱われる。この連立常微分方程式は、Runge-Kutta 法や Adams-Bashforth-Moulton 法により高精度で時間積分することが可能である。ここでは 5 次および 6 次の Runge-Kutta-Verner 法を用いた。

3 タイプの Boussinesq 方程式(30)～(35)により、相対水深 $h/L_0 > 0.5$ の深海の領域で規則波および 2 成分合成波を計算して、その変形特性を調べた。紙面スペースの都合上、例として Peregrine と Nwogu 式を規則波 ($h=10m$, $T=3s$, $H_1=1m$) に対して比較した結果を図-12 に、2 成分合成波 ($h=10m$, $T_1=12s$, $T_2=3s$, $H_{11}=1m$, $H_{12}=0.4m$) に対するものを図-13 に示す。Peregrine 式では、強いダンピングが見られ、合成波形では短周期波が消滅してしまうのに対して、Nwogu 式によるとほぼ同じ振幅で進行してい

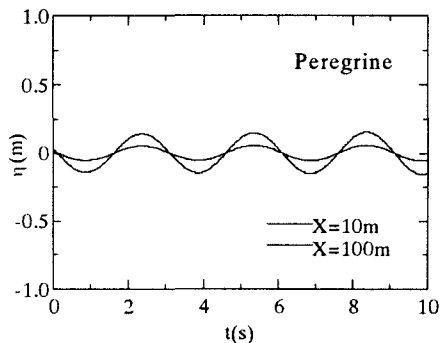


図-12 規則波の計算結果

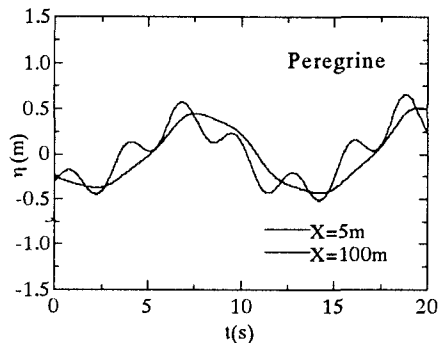
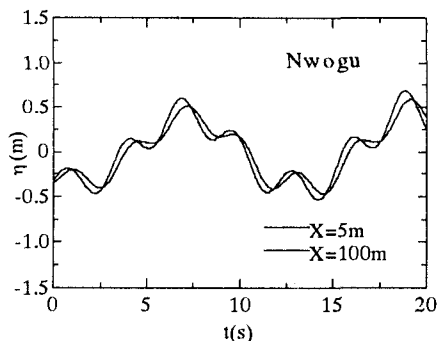
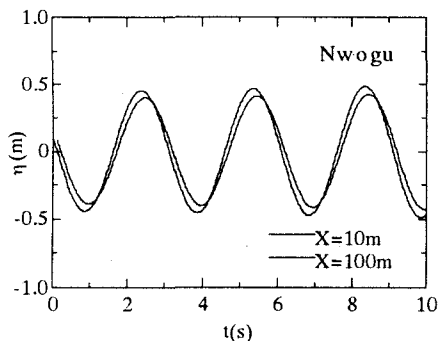


図-13 2成分合成波の計算結果



る。Nwogu 式と Beji・Nadaoka 式による結果はほぼ一致しており、これは両 Boussinesq 方程式とも分散性において同じ Padé[2/2]近似を満足していることによる。両方程式とも用いた計算条件 $k_0 h < 9$ では数値計算上安定しており、演算上の労力もほぼ同じであるが、連続式が厳密になる水深平均流速を用いた Beji・Nadaoka 式の方が境界条件の取扱いやすさにおいて優れているといえよう。

7. おわりに

非線形波動場の問題では、波の非線形性と分散性、水深変化およびその他変形要素それぞれの近似度のバランスが解析精度を左右する。そこで、例えば構造物への打上げの問題において、非線形性に関する近似オーダーをどこまでとれば（数值的）厳密解と一致するのかということを明らかにしていくべきであろう。近似オーダーをいたずらに上げていっても得られるモデル方程式による計算労力は、非回転の流体運動を取り扱う場合、ポテンシャル理論に基づく境界積分方程式法による厳密解のものとほとんど変わらない。平面構造物まわりの多方向波動場の解析には、位相平均型のスペクトル法は不向きで差分法など時間ステップの計算が用いられる。優れたモデル方程式には数値計算上安定であることも要求される。

平面波動場の解析は、波動理論の枠組みから見れば断面 1 次元問題で得られた知見を踏まえた拡張でしかすぎず、面白くない。しかしながら、本稿で取り上げた鉛直積分型波動方程式の目的とするところは、平面波動場をいかに合理的に精度よく記述するかであり、平面構造物まわりの波動場を含む平面 2 次元問題での波動運動の再現性がモデル方程式の優劣を決定する。

参考文献

- 浅野敏之 (1999): 波打ち帯における波動場について, 水工学における夏期研修会講義集, B コース。
- 有川太郎・磯部雅彦 (1999): 非線形緩勾配方程式を用いた任意反射率を持つ構造物周辺の入・反射波浪共存場の解析, 海岸工学論文集, 第 46 巻。(印刷中)
- Abobadima, Samir・余 錫平・磯部雅彦 (1998): 非線形波理論の最適分散特性について, 海岸工学論文集, 第 45 巻, pp.6-10.
- 石井敏雅・磯部雅彦・渡辺 晃 (1993): 非定常緩勾配不規則波動方程式における境界条件の改良と実用化の試み, 海岸工学論文集, 第 40 巻, pp.31-35.
- 石井敏雅・磯部雅彦・渡辺 晃 (1994): 有理式近似に基づく緩勾配不規則波動方程式を用いた平面 2 次元波浪場計算, 海岸工学論文集, 第 41 巻, pp.6-10.
- 磯部雅彦・芝和彦・Cruz, Eric Cruz・渡辺 晃 (1991): 透過潜堤による非線形波浪変形について, 海岸工学論文集, 第 38 巻, pp.551-555.
- 磯部雅彦 (1994): 非線形緩勾配方程式の提案, 海岸工学論文集, 第 41 巻, pp.1-5.
- 磯部雅彦 (1999): 波の基礎理論, 水工学における夏期研修会講義集, B コース。
- 大山 巧・灘岡和夫 (1990): 数値波動水槽における開境界処理のための数値消波フィルターの開発, 海岸工学論文集, 第 37 巻, pp.16-20.
- 大山 巧・喜岡 渉・多田彰秀 (1993): 非線形分散波動場に対する数値モデルの適用性について, 海岸工学論文集, 第 40 巻, pp.11-15.
- 織田幸伸・東江隆夫・灘岡和夫 (1997): 運動量を考慮した越波伝達波の算定法, 海岸工学論文集, 第 44 巻, pp.751-755.
- 柿沼太郎・渡辺 晃・磯部雅彦 (1997): 三角形潜堤周辺の碎波を伴う波・流れ場の非線形数値計算, 海岸工学論文集, 第 44 巻, pp.111-115.
- 金山 進・清水琢三・磯部雅彦 (1994): ブシネスク方程式を用いたサーフビート・水位上昇の平面二次元計算, 海岸工学論文集, 第 41 巻, pp.61-65.
- 金山 進・田口 智・清水琢三・長船 徹・植木一浩・中原和彦 (1995): ブシネスク方程式による港内長周期水位変動の数値計算, 海岸工学論文集, 第 42 巻, pp.291-295.
- 金山 進・田中 仁・首藤伸夫 (1999): 分散性を任意次数まで考慮した高次 Boussinesq 方程式の一般形について, 海岸工学論文集, 第 46 巻。(印刷中)
- 喜岡 渉・長嶋禎泰 (1993): Boussinesq 方程式による構造物近傍の非線形平面波の解析, 海岸工学論文集, 第 40 巻, pp.596-600.
- 喜岡 渉・石原健司・長谷川勝彦 (1994): 離岸堤による遡上波の制御について, 海岸工学論文集, 第 41 巻, pp.651-655.
- 喜岡 渉・柏原謙爾 (1995a): 高次 Boussinesq 方程式とそのステップ地形への適用性, 海岸工学論文集, 第 42 巻, pp.166-170.
- 喜岡 渉・柏原謙爾 (1995b): 2 次長周期波の湾水振動に及ぼす来襲波の多方向性の影響, 海岸工学論文集, 第 42 巻, pp.296-300.
- 喜岡 渉・甲斐宏典・安江 輝 (1996a): 透水層上の Boussinesq 方程式による波浪減衰の計算, 海岸工学論文集, 第 43 巻, pp.101-105.
- 喜岡 渉・柏原謙爾・相川久紀・田中正博 (1996b): 多方向不規則波による港内副振動の予測モデルとその適用性, 海岸工学論文集, 第 43 巻, pp.196-200.
- Cruz, Eric C.・石倉正英・青野利夫 (1997): 非線形分散波モデルを用いた開境界処理に関する研究, 海岸工学論文集, 第 44 巻, pp.46-50.
- Cruz, Eric C.・青野利夫・堀沢真人・早川 淳 (1998): 拡張ブーシネスク方程式を用いた港内長周期波の解析, 海岸工学論文集, 第 45 巻, pp.266-270.
- 佐藤慎司・Kabiling, Michael (1993): Boussinesq 方程式を用いた波浪・海浜流・海浜変形の数値計算, 海岸工学論文集, 第 40 巻, pp.386-390.

- 鄭 培喜・余 錫平・磯部雅彦 (1998): Boussinesq 方程式に対する高次数値計算モデルの開発, 海岸工学論文集, 第 45 巻, pp.21-25.
- 筒井茂明・鈴山勝之・大木洋典 (1996): 浅海での非線形分散波のモデル方程式とそのステップ型リーフへの適用, 海岸工学論文集, 第 43 巻, pp.16-20.
- 灘岡和夫・中川康之 (1993): 新しい非線形・分散性波動方程式による非線形波動場解析の試み, 海岸工学論文集, 第 40 巻, pp.6-10.
- 灘岡和夫・大野修史 (1997): 水深積分型乱流エネルギー輸送方程式を連結させた碎波帯内波動場モデルの提案, 海岸工学論文集, 第 44 巻, pp.106-110.
- 灘岡和夫 (1999): 波動方程式—理論と数値シミュレーション—, 水工学における夏期研修会講義集, B コース.
- 灘岡和夫・田村 仁・清川哲志 (1999): 多方向平面波浪場における非線形分散性波動の碎波モデルに関する研究, 海岸工学論文集, 第 46 巻. (印刷中)
- 後野正雄 (1994): 強非線形不規則波動場に対する連成振動方程式とその基本特性, 海岸工学論文集, 第 41 巻, pp.16-20.
- 間瀬 肇 (1999): 風波の浅水・碎波変形, 水工学における夏期研修会講義集, B コース.
- 森屋陽一・菊地正行・松立博樹・水口 優 (1995): 浅海域における周期波のマッハ反射について, 海岸工学論文集, 第 42 巻, pp.6-10.
- 森屋陽一・水口 優 (1996): 回折散乱波を考慮した越波問題, 海岸工学論文集, 第 43 巻, pp.711-715.
- 余 錫平 (1998): 無反射境界条件としての One-Way 波動方程式について, 海岸工学論文集, 第 45 巻, pp.31-35.
- Abbott, M. B., Petersen, H. M. and Skovgaard, O. (1978): On the numerical modelling of short waves in shallow water, J. Hydraulic Res., Vol.16, pp.173-204.
- Balzano, A. (1998): Evaluation of methods for numerical simulations of wetting and drying in shallow water flow models, Coastal Eng., Vol.34, pp.83-107.
- Beji, S. and Nadaoka, K. (1996): A formal derivation and numerical modeling of the improved Boussinesq equations for varying depth, Ocean Eng., Vol.23, pp.691-704.
- Chen, Y. and Liu, P. L.-F. (1995): Modified Boussinesq equations and associated parabolic models for water wave propagation, J. Fluid Mech., Vol.288, pp.351-381.
- Chen, Q., Madsen, P. A., Schäffer, H. A. and Basco, D. R. (1998): Wave-current interaction based on an enhanced Boussinesq approach, Coastal Eng., Vol.33, pp.11-39.
- Cruz, E. C., Isobe, M. and Watanabe, A. (1997): Boussinesq equations for wave transformation on porous beds, Coastal Eng., Vol.30, pp.125-156.
- Greenblatt, M.S. and Sobey, R.J. (1997): Saturated/unsaturated subsurface flow and salinity using method of lines, Proc. 27th Congress IAHR, pp. 907-912.
- Israeli, M. and Orszag, S. A. (1981): Approximation of radiation boundary conditions, J. Comp. Phys., Vol.41, pp.113-115.
- Katopodes, N. D., Sanders, B. F. and Boyd, J. P. (1998): Short-wave behavior of long-wave equations, J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Eng., Vol.124, pp.238-247.
- Kirby J. T. and Wei, G. (1994): Derivation and properties of a fully nonlinear model for weakly dispersive waves, Proc. Int. Sym. on Waves-Physical and Numerical Modelling, IAHR, pp.386-395.
- Larsen, J. and Dancy, H. (1983): Open boundaries in short wave simulations—a new approach, Coastal Eng., Vol.7, pp.285-297.
- Lee, C. and Suh, K. D. (1998): Internal generation of waves for time-dependent mild-slope equations, Coastal Eng., Vol.34, pp.35-57.
- Madsen, P. A. and Warren, I. R. (1984): Performance of a numerical short-wave model, Coastal Eng., Vol.8, pp.73-93.
- Madsen, P. A., Murray, R. and Sørensen, O. R. (1991): A new form of the Boussinesq equation with improved linear dispersion characteristics, Coastal Eng., Vol.15, pp.371-388.
- Madsen, P. A. and Schäffer, H. A. (1998): Higher order Boussinesq-type equations for surface gravity waves—deviation and analysis, Philos. Trans. R. Soc., Ser. A 356, pp.3123-3184.
- Mei, C. C. and Le Méhauté, B. (1966): Note on the equations of long waves over an uneven bottom, J. Geophys. Res., Vol.71, pp.393-400.
- Nwogu, O. (1993): Alternative form of Boussinesq equations for nearshore wave propagation, J. Waterway, Port, Coastal and

- Ocean Eng., Vol.119, pp.618-638.
- Otta, A. K. and Schäffer, H. A. (1999): Finite-amplitude analysis of some Boussinesq-type equations, Coastal Eng., Vol.36, pp.323-341.
- Peregrine, D. H. (1967): Long waves on a beach, J. Fluid Mech., Vol.27, pp.815-827.
- Schäffer, H. A., Deigaard, R. and Madsen, P. (1992): A two-dimensional surf zone model based on the Boussinesq equations, Proc. 23rd Int. Conf. on Coastal Eng., pp.576-589.
- Schäffer, H. A. and Madsen, P. A. (1995): Further enhancements of Boussinesq-type equations, Coastal Eng., Vol.26, pp.1-14.
- Schiesser, W. E. (1991): The numerical method of lines, Academic Press, 326p.
- Schiesser, W. E. (1994): Method of lines solution of the Korteweg-de Vries equation, Computers Math. Applic., Vol.28, pp.147-154.
- Sobey, R. J. (1993): Conservation properties of the mild slope and Boussinesq equations, Proc. 2nd Int. Sym. Ocean Wave Measurement and Analysis, ASCE, pp. 135-149.
- Sørensen, O. R., Schäffer, H. A. and Madsen, P. A. (1998): Surf zone dynamics simulated by a Boussinesq type model. III. Wave-induced horizontal nearshore circulations, Coastal Eng., Vol.33, pp.155-176.
- Smallman, J. V. and Cooper, A. J. (1989): A mathematical model for set down in harbours, Coastal Eng., Vol.13, pp.247-261.
- Tanaka, M. (1993): Mach reflection of a large-amplitude solitary wave, J. Fluid Mech., Vol.248, pp.637-661.
- Van Dongeren, A. R. and Svendsen, I. A. (1997): Absorbing-generating boundary condition for shallow water models, J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Eng., Vol.123, pp.303-313.
- Wang, K.-H., Wu, T. Y. and Yates, G. T. (1991): Three-dimensional scattering of solitary waves by vertical cylinders, J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Eng., Vol.118, pp.551-566.
- Wang, K.-H. (1993): Diffraction of solitary waves by breakwaters, J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Eng., Vol.119, pp.49-69.
- Wei, G. and Kirby, J. T. (1995): Time-dependent numerical code for extended Boussinesq equations, J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Eng., Vol.121, pp.251-261.
- Wei, G., Kirby, J. T., Grilli, S. T. and Subramanya, R. (1995): A fully nonlinear Boussinesq model for surface wave. Part 1. Highly nonlinear unsteady waves, J. Fluid Mech., Vol.294, pp.71-92.
- Wei, G., Kirby, J. T. and Sinha, A. (1999): Generation of waves in Boussinesq models using a source function method, Coastal Eng., Vol.36, pp.271-299.
- Yoon, S. B. and Liu, P. L.-F. (1989): Interactions of currents and weakly nonlinear water waves in shallow water, J. Fluid Mech., Vol.205, pp.397-419.