

海洋波の統計的性質とスペクトル

Stochastic Approach to Ocean Waves on the Basis of Spectrum

橋 本 典 明

Noriaki HASHIMOTO

1. はじめに

海の波は不規則である。この特性を考慮するために不確定な要素を含む確率論的な考え方が必要となる。現在行われている不規則波の取り扱いには2つに大別される。波別解析法とスペクトル解析法である。波別解析法ではゼロ・アップクロス法などにより定義された1波ごとの波高や周期の分布に着目して不規則波を取り扱う。スペクトル解析法では、不規則な波を種々の方向に伝わる様々な周波数の微小振幅の成分波が重ね合わさったものと考え、各成分波のエネルギーが周波数や方向に対してどのように分布しているかを表現して取り扱う。水深がある程度深く、微小振幅波理論が近似的に成立している場合には、成分波の重ね合わせが可能であることから、スペクトル解析法が有効である。しかし、浅海域で有限振幅の波を扱う場合などの非線形性を考慮しなければならない問題については、取り扱いが面倒である。一方、波別解析法では、1波ごとの波を対応する規則波に置き換えて議論する。このため、前後の波の影響が小さく、また伝播に伴う1波ごとの波の追跡が容易な浅海域では波別解析法が有効である。しかし、いずれの方法でも、不規則な波の力学的な内部構造を普遍的に議論できないので、それぞれの長所を生かした使い分けが必要である。

波別解析法により不規則波を取り扱う方法については、1996年度の夏期研修会において、木村により「短期波浪統計について」と題して詳細に述べられており、改めてここで述べるのは不要であろう。そこで、本稿ではスペクトル解析法による不規則波の取り扱いを中心に述べることにする。

2. 不規則波の表現とスペクトル

深海域の波浪や有限水深域における屈折や回折などの碎波を伴わない波浪の諸現象は、スペクトルの概念を導入すると不規則性に関する取り扱いが便利である。すなわち、現実のこれら諸現象では、波のスペクトル成分ごとに計算を行い、その結果を合成することにより不規則性が表現される。波浪予報モデルの研究分野では、不規則な海洋波の特性を表現するためにスペクトルの概念をいち早く導入し、著しい進歩を遂げた。このように、海の波の実験的な性質－不規則性－は、スペクトルの概念が導入されて以来、理解が著しく深まった。

(1) 不規則波の表現

海面を伝わる不規則な波浪は、第1近似として種々の方向に伝わる様々な周波数の微小振幅波の重ね合わせとして表現され、次式で表される(例えば、合田,1977, 光易,1995)。

$$\eta(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(k_n x \cos \theta_n + k_n y \sin \theta_n - 2\pi f_n t + \varepsilon_n) \quad (1)$$

ここに、 a_n は波の振幅、 $k_n (= 2\pi/L_n)$ は波数、 θ_n は波の進行方向と x 軸のなす角、 $f_n (= 1/T_n)$ は周波数、 ε_n は位相角で $0 \sim 2\pi$ の間に一様な確率でランダムに分布している。

第1近似の範囲内では、これらの成分波は、速度ポテンシャル理論から導かれる微小振幅波の性質を保有し、各成分波は他からの干渉なしに自由に進行するものとする。また、波数 k_n と周波数 f_n の間には次の関係が保持される。

$$\omega_n^2 = 4\pi^2 f_n^2 = gk_n \tanh k_n h \quad (2)$$

ここに、 ω_n は角周波数 ($= 2\pi f_n$) g は重力加速度、 h は水深である。

式(1)は不規則な波形が場所的、時間的に変化する状態を表示するものである。これに対して、波高計の記録のように1地点で観測された不規則波形は次のように表示することができる。

$$\eta(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi f_n t + \varepsilon_n) \quad (3)$$

(2) 周波数スペクトルの定義

式(3)の表示においては、各成分波の振幅 a_n はそれぞれ無限小の値であるけれども、周波数が f から $f + df$ までの範囲について振幅の自乗和を求めた結果が有限であってかつ確定値をとることが前提となっている。その確定値を $S(f)$ で表し、次式で定義する。

$$\sum_f^{f+df} \frac{1}{2} a_n^2 = S(f) df \quad (4)$$

この関数 $S(f)$ はパワースペクトル密度関数あるいは単に周波数スペクトルと呼び、成分波のエネルギーが周波数 f に関してどのように分布しているかを表す量である。

実際の計算においては、式(3)の表現は有限個のフーリエ級数を用いて表現され、次式で表される。

$$x(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{N-1} \{A_n \cos(2\pi f_n t) + B_n \sin(2\pi f_n t)\} + \frac{A_N}{2} \cos(2\pi f_N t) \quad (5)$$

ここに、 $A_n = a_n \cos \varepsilon_n$ 、 $B_n = a_n \sin \varepsilon_n$ である。あるいは、 $0 < n < N$ に対し、 $i = \sqrt{-1}$ として

$$X_n = \frac{1}{2}(A_n - iB_n), \quad X_{-n} = \frac{1}{2}(A_n + iB_n) \quad (6)$$

とおくと、

$$x(t) = \sum_{n=-N+1}^{N-1} X_n \exp(i2\pi f_n t) \quad (7)$$

のように複素数を用いて簡単に記すことができる。この複素振幅 X_n を用いれば、周波数スペクトル $S(f)$ は、

$$\lim_{\Delta f \rightarrow 0} S(f_n) \Delta f = 2 |X_n|^2 \quad (8)$$

で定義される。

周波数スペクトルの周波数 f に関する積分値は平均自乗値 $\overline{x^2}$ に等しく、

$$\overline{x^2} = \int_0^{\infty} S(f) df \quad (9)$$

である。すなわち、周波数スペクトルは平均自乗値 $\overline{x^2}$ への各周波数成分からの寄与を表す。

周波数スペクトルの解析法には、Blackman-Tukey 法、高速 Fourier 変換法(FFT)や最大エントロピー法(MEM)などの方法がある(例えば、日野, 1977)。

(3) クロススペクトルの定義

いま、式(7)で表される $x(t)$ とは別の時系列変動量 $y(t)$ を、式(7)の表現を用いて次式で表す。

$$y(t) = \sum_{n=-N+1}^{N-1} Y_n \exp(i2\pi f_n t) \quad (10)$$

このとき、

$$\lim_{\Delta f \rightarrow 0} \Phi_{xy}(f) \Delta f = 2 X_n^* Y_n \quad (11)$$

で定義される $\Phi_{xy}(f)$ をクロススペクトルと呼ぶ。ここに、 $*$ は共役の複素数を表す。周波数スペクトルが実

関数であるのに対して、クロススペクトル $\Phi_{xy}(f)$ は一般に複素数であり、実部と虚部に分けて、

$$\Phi_{xy}(f) = C_{xy}(f) - iQ_{xy}(f) \quad (12)$$

と表す。このとき、 $C_{xy}(f)$ をコ・スペクトル、 $Q_{xy}(f)$ をクオドラチャ・スペクトルと呼ぶ。クロススペクトルには次のような対称性がある。

$$\Phi_{xy}(-f) = \Phi_{yx}(f) = \Phi_{xy}^*(f) \quad (13)$$

クロススペクトルは複素数で、そのままでは波動量 $x(t)$ と $y(t)$ との関係を把握しにくい。次の2つの量が定義されている。

$$\text{コヒーレンス: } \text{coh}^2(f) = |\Phi_{xy}(f)|^2 / \{S_{xx}(f)S_{yy}(f)\} \quad (14)$$

$$\text{フェイズ: } \theta_{xy}(f) = \tan^{-1}\{Q_{xy}(f)/C_{xy}(f)\} \quad (15)$$

ここに、 $S_{xx}(f)$ 、 $S_{yy}(f)$ はそれぞれ波動量 $x(t)$ と $y(t)$ の周波数スペクトルである。コヒーレンス $\text{coh}^2(f)$ は2つの波動量 $x(t)$ と $y(t)$ の各角周波数成分ごとの線形性の程度を表すもので、 $0 \leq \text{coh}^2(f) \leq 1$ である。 $\text{coh}^2(f)$ が1に近いほど両者間で線形関係が強いことを示す。フェイズ $\theta_{xy}(f)$ は波動量 $x(t)$ と $y(t)$ の f 成分である $X(f)$ と $Y(f)$ の位相差を与える。

(4) 不規則波動量の相互関係

2つの波動量 $x(t)$ と $y(t)$ とが互いに線形関係にあれば、 $x(t)$ と $y(t)$ は次式で表される量み込み積分によって関連づけられる。

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \quad (16)$$

ここに、 $h(\tau)$ はインパルス応答と呼ばれる関数で、単位入力 $x(t) = u(t)$ が作用したときの出力 $y(t) = h(t)$ によって定義される。式(16)の両辺を Fourier 変換すると、波動量 $x(t)$ と $y(t)$ の f 成分である $X(f)$ と $Y(f)$ は次式で関係づけられる。

$$Y(f) = H(f)X(f) \quad (17)$$

ここに、 $H(f)$ は伝達関数（周波数応答関数）であり、インパルス応答 $h(\tau)$ と次式の Fourier 変換の関係がある。

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\exp(-i2\pi f\tau)d\tau \quad (18)$$

式(17)中の $X(f)$ と $Y(f)$ は一般に複素数であり、伝達関数 $H(f)$ も一般に複素数である。観測値に基づいて伝達関数 $H(f)$ を推定する場合、 $X(f)$ と $Y(f)$ が $x(t)$ と $y(t)$ から求まるサンプルで統計的変動が大きいことから、統計量である周波数スペクトル $S_{xx}(f)$ 、 $S_{yy}(f)$ やクロススペクトル $\Phi_{xy}(f)$ を用い、次式を利用して推定される。

$$\Phi_{xy}(f) = H(f)S_{xx}(f) \quad (19)$$

$$S_{yy}(f) = |H(f)|^2 S_{xx}(f) \quad (20)$$

表-1 は微小振幅波理論で求まる水面変動から他の波動量への伝達関数 $H(f, \theta)$ を示したものである。

水面勾配、水圧変動あるいは水粒子速度などの水面変動にともなって生ずる他の任意の波動量 $\xi_m(x, y, t)$ は、表-1 の伝達関数を $H_m(f, \theta) = \hat{H}_m(f, \theta)\exp(i\phi_m)$ と表現したときの振幅の変換率 $\hat{H}_m(f, \theta)$ と位相の変換角 ϕ_m を式(1)に導入して次式で表される。

$$\xi_m(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{H}_m(f_n, \theta_n) a_n \cos(k_n x \cos \theta_n + k_n y \sin \theta_n - 2\pi f_n t + \varepsilon_n + \phi_m) \quad (21)$$

式(21)を用いれば、周波数 f_n と波向 θ_n を有する各成分波の振幅 a_n を与えることにより、水面変動 $\eta(x, y, t)$ や

それに関連する任意の不規則波動量 $\xi_i(x, y, t)$ をシミュレートすることができる。線形重ね合わせによる不規則波のシミュレーション法については合田(1977)に詳述されている。

(5) 水圧変動から水面変動への変換

海底に設置された水圧式波高計で計測された水圧変動の情報から水面変動の情報を推定する場合、式(16)や式(20)がしばしば利用される。図-1は超音波式波高計で計測された水面変動 $\eta(t)$ と水圧式波高計で計測された水圧変動 $p(t)$ の周波数スペクトルおよび式(20)で推定された伝達関数 $|H(f)|$ を図示したものである。伝達関数の図中に示す実線は、微小振幅波理論で求まる水圧変動から水面変動への伝達関数の理論値(表-1に示す水面変動から水圧変動への伝達関数の逆数)を示したものである。周波数スペクトルのピーク周波数を含むある範囲内で、微小振幅波理論がよく成立することが分かる。

図-1に示す伝達関数の理論値と式(20)を利用して水圧変動の周波数スペクトルから水面変動のスペクトルを推定する場合、図-1に見られるように、伝達関数の理論値は高周波数側で無限大に発散するため、このままでは水面変動のスペクトルを推定できない。このため、伝達関数の高周波数側を一定値に置き換えたり、0として無視するなどの便法がしばしば採用されている。

図-2の左図は、海洋波の非線形性と多方向性を考慮し(後述)、伝達関数の高周波数側を一定値で置き換えて修正した伝達関数、右図は左図の伝達関数をもとに式(18)の逆変換により求めたインパルス応答 $h(\tau)$ を図示したものである。このインパルス応答 $h(\tau)$ を用いれば式(16)により水圧時系列 $p(t)$ から水面変動の時系列 $\eta(t)$ を直接推定することができる。図-3は式(16)で水圧時系列 $p(t)$ から水面変動の時系列 $\eta(t)$ を推定した結果を超音波式波高計で計測した水面変動 $\eta(t)$ と比較したものである(橋本ら,1993)。

表-1 主な波動量の水面変動に対する伝達関数

波 動 量	記号	$H(f, \theta)$
水面変動	η	1
水圧変動	p	$\rho g \frac{\cosh kz}{\cosh kd}$
水面鉛直速度	η_t	$-i\omega$
水面鉛直加速度	η_{tt}	$-\omega^2$
水面勾配 (x)	η_x	$ik \cos \theta$
水面勾配 (y)	η_y	$ik \sin \theta$
水粒子速度 (x)	u	$\omega \frac{\cosh kz}{\sinh kd} \cos \theta$
水粒子速度 (y)	v	$\omega \frac{\cosh kz}{\sinh kd} \sin \theta$
水粒子速度 (z)	w	$-i\omega \frac{\sinh kz}{\sinh kd}$

k : 波数, ω : 角周波数, d : 水深, z : 底面からの高さ, ρ : 流体の密度, g : 重力加速度

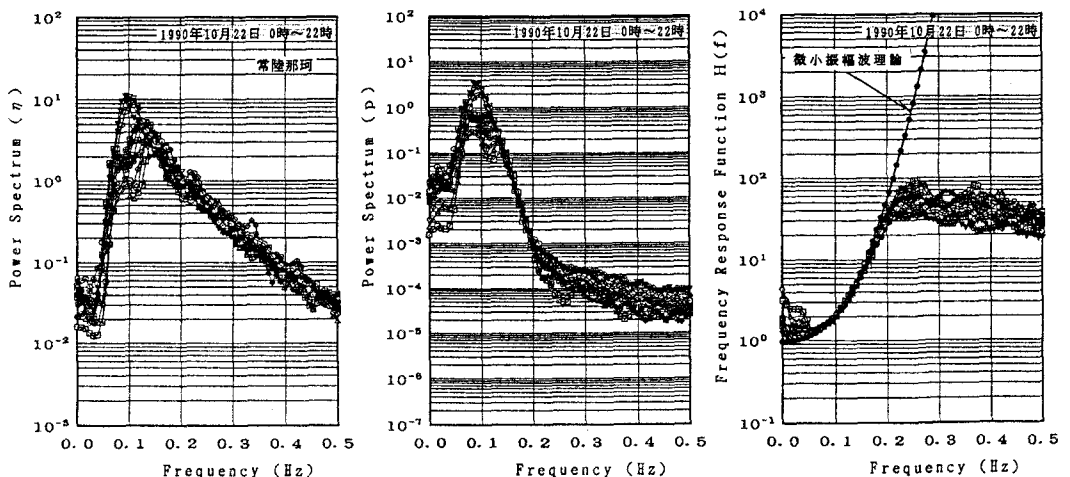


図-1 水面変動と水圧変動の周波数スペクトルおよび伝達関数

(左図: 水面変動の周波数スペクトル, 中図: 水圧変動の周波数スペクトル,
右図: 水圧変動から水面変動への伝達関数, 実線: 微小振幅波理論)

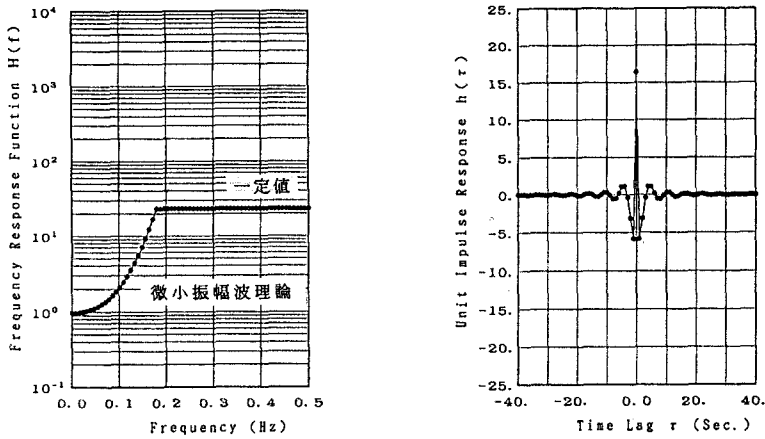


図-2 修正された伝達関数(左図)とインパルス応答(右図)

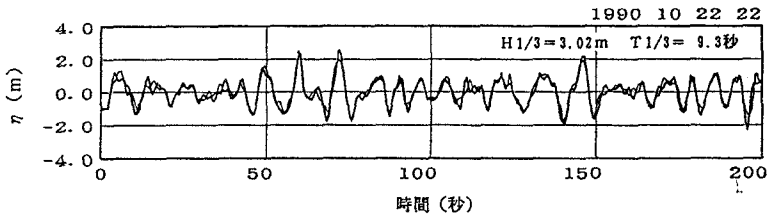


図-3 水圧変動から推定された水面変動と超音波式波高計で計測された水面変動との比較
(細線：水面変動の計測値，太線：水面変動の推定値)

(6) 方向スペクトルの定義

式(1)の表示において各成分波の振幅 a_n はそれぞれ無限小の値であるけれども、周波数が f と $f+df$ ，方向角が θ と $\theta+d\theta$ の範囲についてその自乗和を求めると有限でかつ確定した値をとる。この確定値を $S(f, \theta)$ で表し、次式で定義する。

$$\sum_f^{f+df} \sum_\theta^{\theta+d\theta} \frac{1}{2} a_n^2 = S(f, \theta) df d\theta \quad (22)$$

式(22)で定義される関数 $S(f, \theta)$ が方向スペクトル密度関数，略して方向スペクトルと呼ばれるもので，成分波のエネルギーが周波数 f および方向角 θ に関してどのように分布しているかを表す量である。

方向スペクトルと周波数スペクトルは次の関係を満たす。

$$S(f) = \int_{-\pi}^{\pi} S(f, \theta) d\theta \quad (23)$$

方向スペクトルは一般に次のように書き表される。

$$S(f, \theta) = S(f) G(\theta | f) \quad (24)$$

ここに、 $G(\theta | f)$ は方向分布関数または方向関数と呼ばれ、次元を持たず、次のように正規化されている。

$$\int_{-\pi}^{\pi} G(\theta | f) d\theta = 1 \quad (25)$$

すなわち、方向スペクトルのエネルギー密度の絶対値は $S(f)$ が受け持ち、 $G(\theta | f)$ は方向別の相対的な分布を表す。

(7) 方向スペクトルの推定

周波数スペクトルが1定点で計測された不規則時系列から計算できるのに対して、方向スペクトルでは3成分以上の複数の波動量を同時計測する必要がある。例えば、異なる3測点以上で水面変動を計測したり、同一地点で水面変動と2成分の水粒子速度(u, v)を同時計測するなどが行われる。

いま、 (x_m, y_m) と (x_n, y_n) の位置においてそれぞれ任意の波動量 $\xi_m(t)$ と $\xi_n(t)$ を計測したとすると、波動量 $\xi_m(t)$ と $\xi_n(t)$ のクロススペクトル $\Phi_{mn}(f)$ は、方向スペクトル $S(f, \theta)$ と次式で関係づけられる(磯部ら, 1984)。

$$\Phi_{mn}(f) = \int_0^{2\pi} H_m(f, \theta) H_n^*(f, \theta) \exp\{-ik(x_{mn} \cos \theta + y_{mn} \sin \theta)\} S(f, \theta) d\theta \quad (26)$$

ここに、 $x_{mn} = x_n - x_m$ 、 $y_{mn} = y_n - y_m$ であり、 $H(f, \theta)$ は表-1に示す伝達関数である。

複数の波動量を計測すれば、それぞれの波動量間でクロススペクトル $\Phi_{mn}(f)$ が得られる。それぞれのクロススペクトルに対応して式(26)で与えられる連立積分方程式が与えられる。方向スペクトルは、この連立積分方程式の非負の解 $\hat{S}(f, \theta)$ として推定される。

最近、我が国では推定精度および汎用性に優れたいくつかの方向スペクトル解析法が提案され、実務で用いられている。これらの内、計算が簡便で比較的精度のよい拡張最尤法(EMLM)がある(磯部ら, 1984)。計算がやや面倒であるが、拡張最尤法(EMLM)よりも精度の良い方向スペクトル推定法として、最大エントロピー原理法(MEP)(橋本ら, 1985)、ベイズ法(BDM)(橋本, 1987)、拡張最大エントロピー原理法(EMEP)(橋本ら, 1993)などの方法も提案されている。

なお、防波堤や護岸等の前面の入・反射波共存場で方向スペクトルを観測・解析する場合には、互いに対をなす入・反射波の位相がランダムでないために、従来の方向スペクトル推定法では問題が生じる(合田, 1980)。このような入・反射波共存場においても方向スペクトルを推定可能な方法として、既往の方法に入・反射波の位相干渉を考慮して修正された方法に、修正最尤法(MMLM)(磯部ら, 1983)、修正ベイズ法(MBM)(橋本ら, 1987)、拡張修正ベイズ法(EMBM)(橋本ら, 1987)、修正拡張最大エントロピー原理法(MEMEP)(橋本ら, 1993)がある。この他にも、横木ら(1994)やFujiwaraら(1996)の研究がある。

3. 波浪のスペクトルの標準形とパラメータ

波浪の方向スペクトルは、式(24)で表されるように、一般に、周波数スペクトルと方向関数の積で表されるため、周波数スペクトルと方向関数の標準形がそれぞれ個別に提案されている。

(1) 周波数スペクトルの標準形

従来提案されている周波数スペクトルの多くは共通して式(27)の形を有している。

$$S(f) = k_1 f^{-m} \exp\{-k_2 f^{-n}\} \quad (27)$$

式(27)中の指数 m 、 n の値および k_1 、 k_2 の形は式により若干異なるが、この式の形は風波の周波数スペクトルを大域的にうまく表現しており、計算が容易である点で実用性が高い。

以下では、これまでに提案され実用化されているいくつかの標準形の内、代表的なものを紹介する。

- 1) Pierson-Moskowitzスペクトル：外洋で十分に発達し、吹送距離 F と無関係になって平衡状態に達した風波に対するスペクトルで次式で表される(Pierson and Moskowitz, 1964)。

$$S(f) = 8.10 \times 10^{-3} g^2 (2\pi)^{-4} f^{-5} \exp\{-0.74(2\pi U_{19.5} f / g)^{-4}\} \quad (28)$$

ここに、 $U_{19.5}$ は海面上19.5mにおける風速で、10mの高度の風速 U_{10} とは $U_{19.5} = 1.07 U_{10}$ の関係がある。

- 2) Bretschneider-光易スペクトル：有限吹送距離 F で発達しつつある風波のスペクトルで、次式で表される(Bretschneider, 1968, 光易, 1970)。

$$S(f) = 0.257 H_{1/3}^2 T_{1/3}^{-4} f^{-5} \exp\{-1.03(T_{1/3} f)^{-4}\} \quad (29)$$

3) JONSWAPスペクトル：北海の波浪共同観測計画の成果に基づいてHasselmannら(1973)が提案した集中度の高いスペクトルで、次式で表される(合田, 1987).

$$S(f) = \beta_j H_{1/3}^2 T_p^{-4} f^{-5} \exp\{-1.25(T_p f)^{-4}\} \gamma^{\exp\{-(T_p f - 1)^2 / 2\sigma^2\}} \quad (30)$$

ここに、 $\beta_j \approx 0.0624\{1.094 - 0.01915 \ln \gamma\} / \{0.230 + 0.0336\gamma - 0.185(1.9 + \gamma)^{-1}\}$, $T_p \approx T_{1/3} / \{1 - 0.132(\gamma + 0.2)^{-0.559}\}$, $\sigma = 0.07$ ($f \leq f_p$), 0.09 ($f > f_p$), $\gamma = 1 \sim 7$ (平均 3.3) である.

上記の周波数スペクトル 1) ~ 3) は、高周波数側のスペクトルが f^{-5} に比例する形状を示しているが、近年ではこれが f^{-4} に比例するという考えが支持を広げている。Toba(1972)は無次元波高 $H^* = gH/u^2$ と無次元周期 $T^* = gT/u_*$ の関係に、 $H^* = BT^{*3/2}$ の「3/2乗則」が成立することを見いだした。Tobaはこれを、風の吹く海面の物理過程に一種の局所的平衡関係が存在し、風波の発達に吹送距離や吹送時間の増大につれて H^* や T^* が少しずつずれていく過程であると考えた。局所平衡はいろいろな素過程が複雑に結合した強い非線形のために生じるとしている。上記の 3/2乗則と矛盾しないスペクトルとして高周波数側のスペクトルが f^{-4} に比例する形状が導かれる。

この他、外洋上の波浪のスペクトルは、風波とうねりあるいは多方向からのうねりの重畳の結果として複数のピークを持つことが少なくない。このような外洋上のスペクトルの一般形として 6 つのパラメータを用い、2 つのピークを有する周波数スペクトル形が提案されている(Ochi and Hubble, 1976)。また、浅海域を進行する波浪スペクトルの高周波数側の減衰が式(29)や式(30)よりも緩やかなものが多いことから、このようなスペクトル形状の多様性を表示するためにWallops型スペクトルが提案されている(Huang et al., 1981)。

(2) 周波数スペクトルのモーメントを用いたパラメータの定義

周波数スペクトルは海面のもつエネルギーに対する周波数ごとの寄与を示すので、周波数スペクトルのモーメントから波浪場の波高や周期を代表するパラメータを定義することができる。周波数スペクトルを全周波数で積分し、波の総エネルギーの代表値 m_0 を求めると、この積分値は波形の分散に等しく、

$$\overline{\eta^2} = m_0 = \int_0^\infty S(f) df \quad (31)$$

が成立する。また、不規則波の統計理論によると、ゼロアップクロス法で定義した波の平均周期は周波数スペクトルの 2 次モーメントを使って、次式で計算できる(Rice, 1954)。

$$T_{02} = \sqrt{m_0/m_2} \quad (32)$$

ここに、 m_n は周波数スペクトルの n 次モーメントで次式で定義される。

$$m_n = \int_0^\infty f^n S(f) df \quad (33)$$

このほか、周波数スペクトルの帯域幅の指標として、次のスペクトル幅パラメータが一般に用いられる(Cartwright and Longuet-Higgins, 1956)。

$$\varepsilon = \sqrt{1 - m_2^2 / (m_0 m_4)} \quad : \quad 0 < \varepsilon < 1 \quad (34)$$

ε の値が 0 に近いときのスペクトルを狭帯域スペクトル、 ε の値が 1 に近いときに広帯域スペクトルと称する。 $\nu = \sqrt{m_0 m_2 / m_1^2} - 1$ も周波数スペクトルの帯域幅を表すパラメータで、この場合の狭帯域スペクトルとは $\nu^2 \ll 1$ の場合をいう(Longuet-Higgins, 1957)。また、周波数スペクトルのピークの尖鋭度を表す指標として

$$Q_p = (1/m_0^2) \int_0^\infty f S^2(f) df \quad (35)$$

が用いられる。波高の連長はこのパラメータによってかなりよく記述できるけれども、このパラメータはスペクトルの分解能によってその値がかなり変化するので注意が必要である(Goda, 1970)。

(3) 方向関数

光易らはクローバーリーフ型ブイ式波浪計を用いた綿密な観測結果に基づいて、方向関数の標準形として次式を提案している(Mitsuyasu et al, 1975).

$$G(\theta|f) = G_0 \cos^{2S} \left(\frac{\theta}{2} \right) \quad (36)$$

ここに、 G_0 は式(25)の正規化条件を満たすための定数、 S は波のエネルギーの伝播する方向集中度を表わすパラメータであり、光易らは S の最大値 $S_{\max}$ を主パラメータとして次式を提案している。

$$S = \begin{cases} S_{\max} (f/f_p)^5 & : f \leq f_p \\ S_{\max} (f/f_p)^{-2.5} & : f \geq f_p \end{cases} \quad (37)$$

合田と鈴木(1975)は $S_{\max}$ と波形勾配 H_0/L_0 の関係を示す図表を作成し、波浪条件と $S_{\max}$ の関係として次のような値を提案している。

$$\left. \begin{array}{ll} \text{I) 風波} & : S_{\max} = 10 \\ \text{II) 減衰距離の短いうねり} & : S_{\max} = 25 \\ \quad (\text{波形勾配が比較的大}) & \\ \text{III) 減衰距離の長いうねり} & : S_{\max} = 75 \\ \quad (\text{波形勾配が小}) & \end{array} \right\} \quad (38)$$

ただし、式(38)に示す関係は沖波に対するものである。

Borgmann(1969)によって提案され、山口ら(1977)によって現地観測結果の解析に用いられた円正規分布型方向関数は次式で表される。

$$G(\theta|f) = \frac{1}{2\pi I_0(\alpha)} \exp(\alpha \cos \theta) \quad (39)$$

ここに、 α は方向集中度を表すパラメータ、 $I_n(\alpha)$ は n 次の変形された第1種Bessel関数である。 $\alpha \gg 1$ で円正規分布型方向関数は光易型方向関数とほぼ同じ形となり、 α は光易型方向関数の方向集中度パラメータ S と $\alpha \approx S/2$ の関係がある。なお、式(39)の関数形は最大エントロピー原理を用いて理論的に求められる(橋本ら, 1985)。

この他、湖ならびに大型風洞水槽において波高計群を用いて高い分解能で方向スペクトルを計測して提案された双曲線関数型方向関数がある (Donelan et al., 1985)。

(4) 方向スペクトルのモーメントを用いたパラメータの定義

有義波や $1/10$ 最大波などの代表波高・周期が波別解析法によって定義されるのに対し、平均波向 $\bar{\theta}$ や主波向 θ_p などの波向パラメータは方向スペクトルの概念を用いて定義される(Longuet-Higgins, 1957)。いま、波数空間表示($k_x = k \cos \theta$, $k_y = k \sin \theta$)の方向スペクトルを $S(k_x, k_y)$ で表わし、その原点に関するモーメントを次のように表記する。

$$M_{pq} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S(k_x, k_y) k_x^p k_y^q dk_x dk_y \quad (40)$$

$p = q = 0$ の0次モーメントは $M_{00} = \overline{\eta^2}$ である。1次モーメントからは平均波数 $\bar{k}_x$, $\bar{k}_y$ が次のように定義される。

$$\bar{k}_x = M_{10}/M_{00}, \quad \bar{k}_y = M_{01}/M_{00} \quad (41)$$

このとき、平均波向 $\bar{\theta}$ は、 $\bar{k}_x$, $\bar{k}_y$ で与えられるスペクトルの重心と座標原点を結ぶ方向として、次式で定義される。

$$\bar{\theta} = \tan^{-1} \frac{\bar{k}_y}{\bar{k}_x} = \tan^{-1} \frac{M_{01}}{M_{10}} \quad (42)$$

また、2次モーメントからは座標軸を回転したときに座標軸上の自乗平均波数が最大、すなわち波の峰が最も密に並んでいる方向として、主波向 θ_p が次式で定義される。

$$\theta_p = \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{2M_{11}}{M_{20} - M_{02}} \quad (43)$$

平均波向 $\bar{\theta}$ が全平面 $(-\pi \sim \pi)$ で求められるのに対し、主波向 θ_p は半平面 $(-\pi/2 \sim \pi/2)$ でしか求められず、波の進行・逆行の判別は不能である。また、二方向波浪系に主波向を用いる場合には注意を要する。特に、二方向波浪系が $\pi/2$ 以上の交差角をなして来襲する場合には、主波向は方向スペクトルのエネルギーの平均的な伝播方向とは異なった方向を示すので注意が必要である(合田,1981)。

波の方向集中度の指標として、方向スペクトルのモーメントを用いた長波峰性パラメータが次式で定義されている。

$$\gamma = \left\{ \frac{(M_{20} + M_{02}) - \sqrt{(M_{20} - M_{02})^2 + 4M_{11}^2}}{(M_{20} + M_{02}) + \sqrt{(M_{20} - M_{02})^2 + 4M_{11}^2}} \right\}^{1/2} \quad (44)$$

γ は波数が最大である θ_p の方向と、これに直交する方向 $\theta_p \pm \pi/2$ における波数の比の逆数である。単一波群の場合には方向集中度が高いほど γ が0に近づき、無指向性が強まるほど1に近づき、 $0 \leq \gamma \leq 1$ である。しかしながら、二方向波浪系を対象とする場合、特に二方向波浪系が $\pi/2$ 以上の交差角をなして来襲する場合には、 γ は方向集中度を示す指標としては不都合となる(合田,1981)。

合田(1981)は二方向波浪系での γ の不都合を補う目的で次に示す平均分散角 θ_k を提案した。

$$\theta_k = \tan^{-1} \left\{ \frac{\sqrt{M_{00} M_{01}^2 M_{20} - 2M_{10} M_{01} M_{11} + M_{10}^2 M_{02}}}{M_{10}^2 + M_{01}^2} \right\} \quad (45)$$

平均分散角 θ_k は方向スペクトルの重心と原点を結ぶ軸回りの2次モーメントとして定義され、平均波向からの波エネルギーの平均的分散角を表わす。

方向スペクトルが求められている場合には、上記の定義式によって代表波向と方向集中度が計算できる。しかしながら、波向観測の実務を考えると表面ブイあるいは2方向流速計などの出力から直接に波向等を算定できることが望ましい。この問題に対して、合田(1981)は観測値の時系列データ間の共分散を用いて代表波向と方向集中度を算出する方法を提示している。例えば、同一地点に設置された超音波式波高計と超音波式流速計で水面変動 $\eta(t)$ と水粒子速度 $u(t)$ と $v(t)$ を計測したとすると、平均波向、主波向、長波峰性パラメータおよび平均分散角は、 M_{00} 、 M_{10} 、 M_{01} 、 M_{11} 、 M_{20} 、 M_{02} をそれぞれ $\overline{\eta^2}$ 、 $-\overline{\eta u}$ 、 $-\overline{\eta v}$ 、 $\overline{uv}$ 、 $\overline{u^2}$ 、 $\overline{v^2}$ で代用することにより計算できる。ここに、 $\overline{\eta u}$ は $\eta(t)$ と $u(t)$ の共分散値である。他の変数も同様である。波浪観測で波向観測を行う場合には、波浪観測台帳には有義波や1/10最大波などの代表波高・周期に加えて、共分散法を用いて計算された波向パラメータを整理することが多い。

(5) 方向スペクトルと海洋波の波峰パターン

図-4は周波数スペクトルに式(30)で与えられるJONSWAPスペクトルを用い、方向関数に式(36)で与えられる光易型方向関数を用いて、式(1)による線形重ね合わせによって模擬海面をシミュレートしたものである。ただし、式(1)中の振幅は式(22)の定義から $a_n = \sqrt{2S(f_n, \theta_n) \Delta f \Delta \theta}$ で与えている。それぞれの段の図で計算条件は有義波高 $H_{1/3} = 3.0\text{m}$ 、有義波周期 $T_{1/3} = 8.0\text{秒}$ を共通とし、方向集中度パラメータを $S_{\max} = 10, 25, 75$ と変えた場合を示している。各段それぞれ左図は模擬海面、中図は方向スペクトルの等値線表示、右図は方向スペクトルの立体図表示である。図-4の $S_{\max} = 10$ の海面では波の峰が短く途切れていることを示しており、この特徴から特に風波は「切れ波」と呼ばれることがある。一方、 $S_{\max} = 25$ や75の例では、 $S_{\max} = 10$ の例に比べて峰が長く、比較的容易に波の進行方向を判別できる。

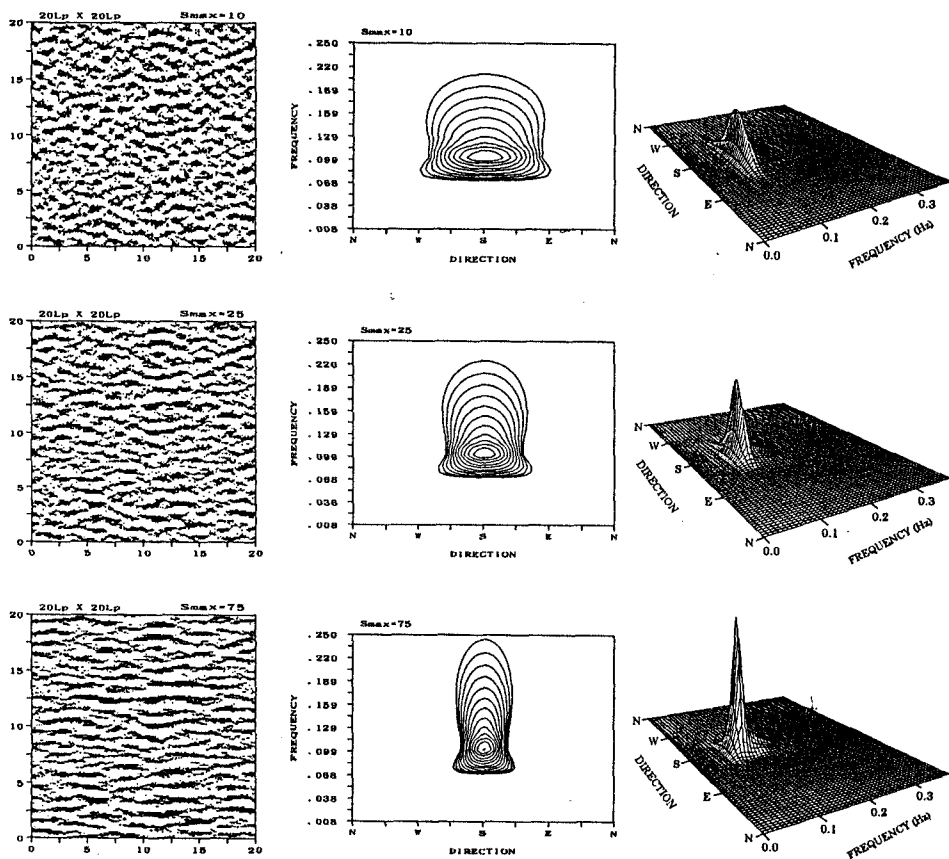


図-4 方向スペクトルと波峰パターンの計算例
(上段: $S_{\max} = 10$, 中段: $S_{\max} = 25$, 下段: $S_{\max} = 75$)

図-4の波峰パターンからは波浪場の特性を定性的には把握できるが、そのままでは定量的な評価は困難である。一方、図-4に示す方向スペクトルは不規則性に隠された波浪場の本質的構造を表現しており、定量的評価が可能である。この図からも方向スペクトルの有用性が理解できよう。

4. 海洋波の多次元のスペクトルと高次のスペクトル

前節まではすべて線形ガウス過程を対象としてきた。しかし現実に行っている波浪の諸現象はほとんど例外なく、多かれ少なかれ非線形的な性質を内在している。また、最近の海岸工学における研究対象は多次元で非線形な問題に向けられるようになってきている。非線形非ガウス過程を扱う一般的時系列解析法は十分開発されているとは言えないのが現状であるが、より進んだスペクトルの概念を用いていくつかの試みが行われている。

(1) Fourier-Stieltjes 積分による不規則波の表現

これまでは、不規則波を(離散)Fourier 級数を用いて表現した。不規則時系列に関する多くの書籍や論文では不規則時系列の表現を Fourier-Stieltjes 積分で表現することもしばしば行われる。Fourier-Stieltjes 積分による表現は、方向スペクトルのような多次元スペクトルや、非線形な不規則波の特性を記述するバイスペクトルなどの高次スペクトルを、簡潔かつ系統的に定義し、それらの特性を検討するのに便利である。

ランダムな波形を持つ海面波は、第1近似として微小な振幅をもつ多くの波数と角周波数の成分波がランダムな位相角をもって重合したものと解釈でき、Fourier-Stieltjes積分を用いて次式で表される(例えば、Phillips, 1977).

$$\eta(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbf{k}} \int_{\omega} dZ(\mathbf{k}, \omega) \exp\{i(\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega t)\} \quad (46)$$

ここに、 $\eta(\mathbf{x}, t)$ は平面座標 $\mathbf{x} = (x, y)$ 、時刻 t での水面変動、 $dZ(\mathbf{k}, \omega)$ は波数ベクトル $\mathbf{k}$ と角周波数 ω ($= 2\pi f$) の Fourier-Stieltjes 成分の複素振幅であり、次の対称性を有している。

$$dZ^*(\mathbf{k}, \omega) = dZ(-\mathbf{k}, -\omega) \quad (47)$$

式(46)の積分の範囲は負の周波数も含む角周波数 ω と波数ベクトル $\mathbf{k}$ のとりうるすべての範囲について行うが、式(47)の対称性を導入することによって、式(46)の $\eta(\mathbf{x}, t)$ を実数として扱うことができる(式(6)と式(7)を参照)。また、Fourier-Stieltjes 成分の複素振幅 $dZ(\mathbf{k}, \omega)$ は確定値ではなく、確率変数として取り扱われる。すなわち、式(1)中のランダム位相 ε_n は、 $dZ(\mathbf{k}, \omega)$ がある平均値の周りに分布する確率変数であることによって、その効果が取り込まれている。したがって、統計的期待値である種々のスペクトルの定義やそれに関連する統計的諸量の誘導においては、三角関数に含まれる ε_n ではなく、 $dZ(\mathbf{k}, \omega)$ に関する統計的演算により見通しのよい理論展開ができて便利である。

式(3)に対応する1地点で観測された不規則波形は、Fourier-Stieltjes 積分で次のように表示することができる。

$$\eta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dZ(\omega) \exp(i\omega t) \quad (48)$$

式(21)に対応する、水面勾配、水圧変動あるいは水粒子速度などの水面変動にともなう生ずる他の任意の波動量 $\xi(\mathbf{x}, t)$ は、式(21)に水面変動 η から波動量 ξ への伝達関数 $H(\mathbf{k}, \omega)$ を導入して次式で表される。

$$\xi(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbf{k}} \int_{\omega} H(\mathbf{k}, \omega) dZ(\mathbf{k}, \omega) \exp\{i(\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega t)\} \quad (49)$$

式(48)のような Fourier-Stieltjes 積分表示を用いると、周波数スペクトルやクロススペクトルは、 $\langle \cdot \rangle$ をアンサンブル平均を意味するものとして、それぞれ次式で定義される。

$$\langle dX(\omega_1) dX(\omega_2) \rangle = S(\omega_2) d\omega \quad (50)$$

$$\langle dX(\omega_1) dY(\omega_2) \rangle = \Phi_{xy}(\omega_2) d\omega \quad (51)$$

ただし、 $\omega_1 + \omega_2 = 0$ である。あるいは、 $dZ^*(\omega) = dZ(-\omega)$ の関係を用いれば、 $\langle dX^*(\omega) dX(\omega) \rangle = S(\omega) d\omega$ 、 $\langle dX^*(\omega) dY(\omega) \rangle = \Phi_{xy}(\omega) d\omega$ のようにも定義できる。

なお、式(8)や式(11)では周波数スペクトル $S(f)$ とクロススペクトル $\Phi_{xy}(f)$ は $0 \leq f \leq \infty$ で定義されているのに対し、ここで定義される $S(\omega)$ と $\Phi_{xy}(\omega)$ は $-\infty \leq \omega \leq \infty$ で定義されている。これは、式(48)の表現で三角関数の代わりに指数関数を用い、 $dZ^*(\omega) = dZ(-\omega)$ の条件で $\eta(t)$ が実数になるように負の角周波数を導入したためである。これは数学的記述のための便宜的なものであり、通常用いられる $0 \leq f \leq \infty$ で定義される $S(f)$ や $\Phi_{xy}(f)$ へは $S(f) = 2S(\omega) d\omega / df$ 、 $\Phi_{xy}(f) = 2\Phi_{xy}(\omega) d\omega / df$ によって変換できる。ここに、 $d\omega / df = 2\pi$ である。

(2) 波数・角周波数スペクトルと方向スペクトルの定義

Fourier-Stieltjes積分を用いて表現された式(46)は不規則な水面変動が成分波の積分で表されることを示しており、 $|dZ(\mathbf{k}, \omega)|^2$ は、波数ベクトル $\mathbf{k}$ 、角周波数 ω をもつ成分波の波動エネルギーを代表するものである。したがって、波数ベクトルと角周波数に関するエネルギー密度を表すものとして波数・角周波数スペクトル $S(\mathbf{k}, \omega)$ を考えれば、 $\mathbf{k} \sim \mathbf{k} + d\mathbf{k}$ 、 $\omega \sim \omega + d\omega$ の領域の波動エネルギーは $S(\mathbf{k}, \omega) d\mathbf{k} d\omega$ であり、次式により波数・角周波数スペクトル $S(\mathbf{k}, \omega)$ が定義される(例えば、Phillips, 1977)。

$$\langle dZ^*(\mathbf{k}, \omega) dZ(\mathbf{k}, \omega) \rangle = S(\mathbf{k}, \omega) d\mathbf{k} d\omega \quad (52)$$

分散関係式の成立を前提とし、式(46)を f と θ の関数に変換する。このとき、周波数が $f \sim f + df$ 、方向角が $\theta \sim \theta + d\theta$ の領域の波動エネルギー $S(f, \theta)df d\theta$ を式(52)と同様に

$$\langle dZ^*(f, \theta) dZ(f, \theta) \rangle = S(f, \theta) df d\theta \quad (53)$$

で定義すれば、波のエネルギー分布を周波数 f と伝播方向 θ の関数として表現する方向スペクトル $S(f, \theta)$ が定義できる。

(3) バイスpekトルの定義

非線形性の強い時系列データは、通常その分布関数がガウス分布からはずれ、歪んだり尖ったりしており、周波数スペクトルではその特性を把握することはできない。このような非線形・非ガウス過程を扱う時系列解析法の1つとしてバイスペクトル解析がある。

バイスペクトルは式(48)のFourier-Stieltjes成分 $dZ(\omega)$ を用いて、次式で定義される(Hasselmann et al., 1963)。

$$\langle dZ(\omega_1) dZ(\omega_2) dZ(\omega_3) \rangle = B(\omega_1, \omega_2) d\omega_1 d\omega_2 \quad (54)$$

ただし、 $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0$ である。 $x(t)$ が実数ならば、

$$B(\omega_1, \omega_2) = B(-\omega_1, -\omega_2) \quad (55)$$

の対称性がある。また、 $x(t)$ が定常過程の時系列であれば、次のような対称性がある。

$$\begin{aligned} B(\omega_1, \omega_2) &= B(\omega_2, \omega_1) = B(\omega_1, -\omega_1 - \omega_2) = B(-\omega_1 - \omega_2, \omega_1) \\ &= B(\omega_2, -\omega_1 - \omega_2) = B(-\omega_1 - \omega_2, \omega_2) \end{aligned} \quad (56)$$

バイスペクトルの基本的性質は、式(55)と式(56)から分かるように、 $0 \sim \pi/4$ の $1/8$ 平面内にすべての値が現れ、全平面ではその共役な値も含めて12回の繰り返しになっている(図-5)。

バイスペクトル $B(\omega_1, \omega_2)$ の角周波数 ω に関する積分値は $x(t)$ の平均立方値 $\overline{x^3}$ に等しく、

$$\overline{x^3} = \iint_{-\infty}^{\infty} B(\omega_1, \omega_2) d\omega_1 d\omega_2 \quad (57)$$

の関係がある。すなわち、バイスペクトルは角周波数の和が0である3つのFourier-Stieltjes成分が $\overline{x^3}$ へ寄与する割合を表す。また、バイスペクトルの実部は不規則波動量の上下の非対称性に、虚部は前後の非対称性に関係づけられることが知られている(Masuda and Kuo, 1981)。

バイスペクトルは成分波間の非線形2次干渉の状況を明らかにするのに有効である。海洋波をバイスペクトルを用いて解析した例はHasselmannら(1963)が最初であり、浅海波の波形の歪を対象として検討している。浅海波に関連したバイスペクトルの計算は、我が国でも柿沼ら(1968)や榎木ら(1972)の例がある。この他、Elgar and Guza(1985)もバイスペクトルを用いて波の浅海域への進入にともなう波形の歪に関する研究を行っている。

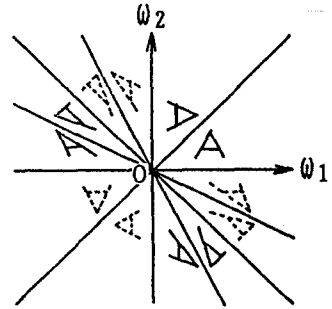


図-5 バイスpekトル $B(\omega_1, \omega_2)$ の対称性

(4) 弱非線形な海洋波の周波数スペクトルとバイスペクトル

非線形効果がバイスペクトル上に表現されていることは間違いないが、その非線形性についてはっきりした理論モデルが存在しない場合にはバイスペクトルの意味を読みとることは難しい(永田, 1976)。特別な場合として、時系列が弱非線形・疑似ガウス過程に従うならば、各線形成分波間の非線形干渉の度合いを示す非線形核関数を介してバイスペクトルの意味を読みとることができる(橋本, 1990)。

いま、波高計の記録のように1地点で観測された不規則波形 $\eta(t)$ が弱非線形、疑似ガウス過程に従うならば、微小パラメータ ε に関して、 $\eta(t)$ は次式のように摂動展開できる(Tick, 1959, Hasselmann et al., 1963)。

$$\eta(t) = \eta^{(1)}(t) + \eta^{(2)}(t) + \dots \quad (58)$$

ここに、 $\eta^{(n)}(t)$ は ε の n 乗のオーダーの項 ($\eta^{(n)}(t) = O(\varepsilon^n)$) である。ここで、式(58)の右辺第1項 $\eta^{(1)}(t)$ はガウス過程に従うものとする。ここで、Fourier-Stieltjes変換、

$$\eta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dZ(\omega) \exp(i\omega t) \quad (59)$$

$$\eta^{(n)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dZ^{(n)}(\omega) \exp(i\omega t) ; (n=1, 2, \dots) \quad (60)$$

を用いれば、式(58)から次式が得られる。

$$dZ(\omega) = dZ^{(1)}(\omega) + dZ^{(2)}(\omega) + \dots \quad (61)$$

ここに、 $dZ^{(n)}(\omega)$ は n 次（線形成分波）のFourier-Stieltjes成分の複素振幅で、1次の複素振幅 $dZ^{(1)}(\omega)$ を用いて、

$$dZ^{(n)}(\omega) = \int \dots \int G^{(n)}(\omega_1, \dots, \omega_n) dZ^{(1)}(\omega_1) \dots dZ^{(1)}(\omega_n) \quad (62)$$

$$(\text{ただし、} \omega_1 + \dots + \omega_n = \omega)$$

で表される。また、 $G^{(n)}(\omega_1, \dots, \omega_n)$ は n 次の非線形核関数と呼ばれる量で、1次の線形成分 $dZ^{(1)}(\omega_1), \dots, dZ^{(1)}(\omega_n)$ が n 次の非線形成分 $dZ^{(n)}(\omega)$ へ寄与する度合いを表す量である。

式(61)を式(50)の周波数スペクトルの定義式に代入し、 $dZ^{(1)}(\omega)$ がガウス過程に従う量であることから、平均値が0のガウス過程の積に関する公式を用いて整理すると、周波数スペクトル $S(\omega)$ は次式で与えられる(Tick, 1959)。

$$S(\omega) = S^{(1)}(\omega) + S^{(2)}(\omega) + \dots \quad (63)$$

$$S^{(2)}(\omega) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} |G^{(2)}(\omega_1, \omega - \omega_1)|^2 S^{(1)}(\omega_1) S^{(1)}(\omega - \omega_1) d\omega_1 \quad (64)$$

ここに、 $S^{(1)}(\omega)$ 、 $S^{(2)}(\omega)$ はそれぞれ1次（線形成分波）および2次オーダーの周波数スペクトルで、 $G^{(2)}(\omega_1, \omega_2)$ は2次の非線形核関数である。式(63)と式(64)は、観測して得られる周波数スペクトルのエネルギー分布 $S(\omega)$ は、自由に伝播する自由波のエネルギー成分 $S^{(1)}(\omega)$ と2次の非線形干渉によって生じる拘束波のエネルギー分布 $S^{(2)}(\omega)$ の和で表現できることを示している。

同様に、式(61)を式(54)のバイスペクトルの定義式に代入して整理すると、平均値が0のガウス過程の積に関する公式を用いて、

$$B(\omega_1, \omega_2) \approx 2 \left\{ G^{*(2)}(\omega_1, \omega_2) S^{(1)}(\omega_1) S^{(1)}(\omega_2) + G^{(2)}(\omega_1 + \omega_2, -\omega_1) \times S^{(1)}(\omega_1 + \omega_2) S^{(1)}(\omega_1) + G^{(2)}(\omega_1 + \omega_2, -\omega_2) S^{(1)}(\omega_1 + \omega_2) S^{(1)}(\omega_2) \right\} \quad (65)$$

が得られる(Hasselmann et al., 1963)。すなわち、バイスペクトルの1つの値 $B(\omega_1, \omega_2)$ には、角周波数が ω_1 と ω_2 の組合せ、 $\omega_1 + \omega_2$ と $-\omega_1$ の組合せ、および $\omega_1 + \omega_2$ と $-\omega_2$ の組合せの、それぞれ3つの2次の非線形干渉の影響が含まれていることが分かる。これら3つの非線形干渉の内、 ω_1 と ω_2 の項は2つの成分波の周波数の和の干渉を表し、 $\omega_1 + \omega_2$ と $-\omega_1$ および $\omega_1 + \omega_2$ と $-\omega_2$ の項はそれぞれ2つの成分波の周波数の差の干渉を表す(橋本, 1990)。

なお、2次の非線形核関数は次の対称性を有している。

$$\left. \begin{aligned} G^{(2)}(\omega_1, \omega_2) &= G^{(2)}(\omega_2, \omega_1) \\ G^{*(2)}(\omega_1, \omega_2) &= G^{(2)}(-\omega_1, -\omega_2) \end{aligned} \right\} \quad (66)$$

すなわち、非線形核関数 $G^{(2)}(\omega_1, \omega_2)$ は $-\pi/4 \sim \pi/4$ の $1/4$ 平面内にすべての値が現れ、全平面内ではその共役な値も含めて4回の繰り返しになっている(図-6)。

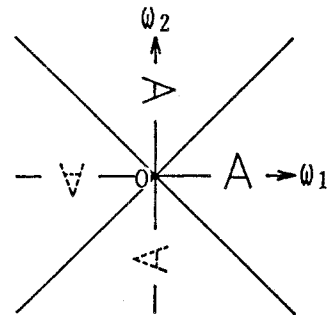


図-6 非線形核関数 $G^{(2)}(\omega_1, \omega_2)$ の対称性

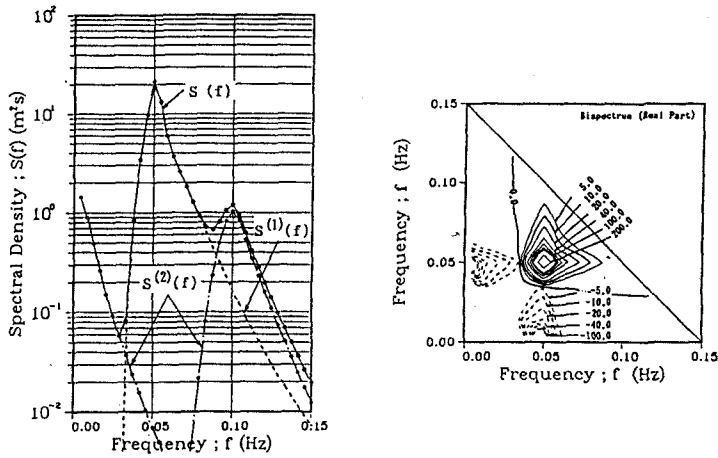


図-7 周波数スペクトル（左図）とバイスペクトル（右図）

図-7はHamada(1965)が導いた非線形核関数 $G^{(2)}(\omega_1, \omega_2)$ を用い、式(63)～(65)によって周波数スペクトルとバイスペクトルの関係を理論的に計算した例である。周波数スペクトル $S(f)$ は $S^{(1)}(f)$ と $S^{(2)}(f)$ の和で表されており、バイスペクトル上には非線形性の影響が現れている。すなわち、バイスペクトルの (f_p, f_p) 近傍には周波数の和の干渉（周波数スペクトルの高周波数側の非線形性）、 $(f_p, 0)$ あるいは $(0, f_p)$ 近傍には周波数の差の干渉（周波数スペクトルの低周波数側の非線形性）の影響が現れている（橋本, 1990）。

式(63)と(64)に基づき、理論的に導かれた非線形核関数を用いて、観測して得られた周波数スペクトルから自由波成分と拘束波成分を分離する試みは、Masudaら(1979)とGoda(1983)により行われている。また、非線形核関数の理論値の代わりに、バイスペクトルをもとに式(65)を用いて推定された非線形核関数を介して、周波数スペクトルから自由波成分と拘束波成分を分離する試みは、橋本(1990)やAhn(1993)により行われている。

（５）弱非線形な海洋波の方向スペクトル

（４）と同様な展開を弱非線形、疑似ガウス過程に従う海面波 $\eta(x, t)$ に適用し、２次オーダーまで展開すると、式(63)と式(64)に対応して、次式が得られる。

$$S(k, \omega) = S^{(1)}(k, \omega) + S^{(2)}(k, \omega) + \dots \quad (67)$$

$$S^{(2)}(k, \omega) = 2 \int_{\mathbf{k}} \int_{\omega} |G^{(2)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k} - \mathbf{k}_1, \omega_1, \omega - \omega_1)|^2 \times S^{(1)}(\mathbf{k}_1, \omega_1) S^{(1)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1, \omega - \omega_1) d\mathbf{k}_1 d\omega_1 \quad (68)$$

ここに、 $S^{(1)}(k, \omega)$ 、 $S^{(2)}(k, \omega)$ はそれぞれ１次（線形成分波）および２次オーダー（拘束波）の波数・角周波数スペクトルである。また、 $\mathbf{k}_1$ と ω_1 および $\mathbf{k}_2 (= \mathbf{k} - \mathbf{k}_1)$ と $\omega_2 (= \omega - \omega_1)$ はそれぞれ線形成分波の波数ベクトルと角周波数であり、次式を満足する。

$$\omega_i^2 = g|\mathbf{k}_i| \tanh|\mathbf{k}_i|/h \quad (69)$$

$$\mathbf{k}_i(-\omega_i) = -\mathbf{k}(\omega) \quad (70)$$

ただし、 $\mathbf{k} (= \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)$ と $\omega (= \omega_1 + \omega_2)$ は拘束波の波数ベクトルと角周波数であり、分散関係式を満足しない。また、波数ベクトル $\mathbf{k}$ の向き、すなわち拘束波の伝播方向 θ は次式で与えられる。

$$\theta = \tan^{-1} \left\{ \frac{|\mathbf{k}_1| \sin \theta_1 + |\mathbf{k}_2| \sin \theta_2}{|\mathbf{k}_1| \cos \theta_1 + |\mathbf{k}_2| \cos \theta_2} \right\} \quad (71)$$

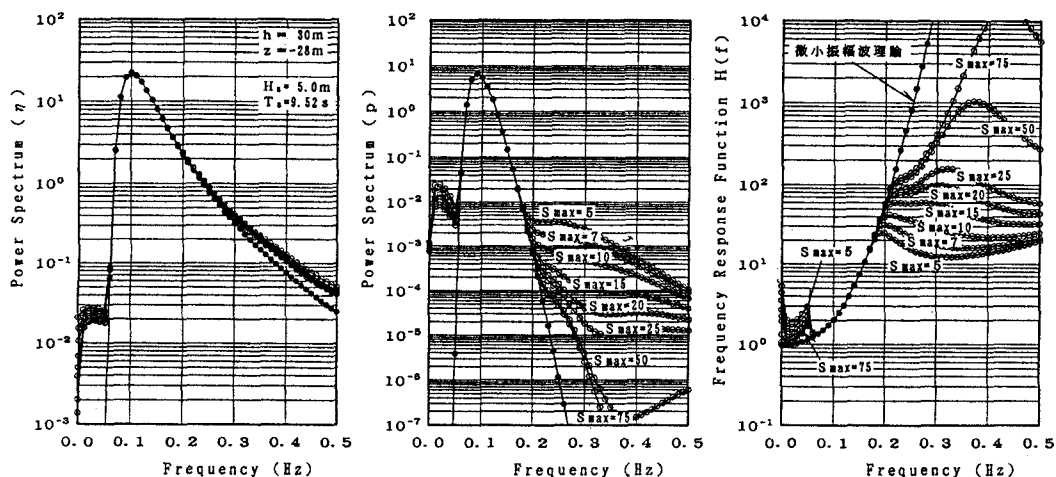


図-8 多方向性と非線形性を考慮した水面変動と水圧変動の周波数スペクトル（左図と中図）および伝達関数（右図）の理論的關係

ここに、 θ_1 と θ_2 はそれぞれ k_1 と $k_2(=k-k_1)$ のベクトルの向きである。式(64)や式(68)中の2次の非線形核関数 $G^{(2)}(\omega_1, \omega_2)$ や $G^{(2)}(k_1, k-k_1, \omega_1, \omega-\omega_1)$ に関しては、Tick(1959,1963), Hamada(1965), Masudaら(1979), 浜中ら(1980,1982,1984,1986), 木村(1985)の研究がある。

図-8(a)は、Hamada(1965)が導いた水面変動の非線形核関数 $G^{(2)}(k_1, k-k_1, \omega_1, \omega-\omega_1)$ を用い、式(67)～式(71)にもとづいて波浪の多方向性と2次の非線形性まで考慮して計算した方向スペクトルを、方向角 θ について積分して得られた水面変動の周波数スペクトルである(橋本ら,1993)。ここでは、線形成分波の方向スペクトル $S^{(1)}(f, \theta)$ として、周波数スペクトルに式(29)で与えられるBretschneider-光易スペクトルを用い、方向関数に式(36)で与えられる光易型方向関数を用い式(68)の数値積分を行った。計算条件は、水深 $d=30\text{m}$ 、有義波高 $H_{1/3}=5.0\text{m}$ 、有義波周期 $T_{1/3}=9.52\text{s}$ とし、式(37)で導入された方向集中度パラメータ $S_{\max}$ を種々変えた計算結果を示している。図-8(b)は、Hamada(1965)が導いた水圧変動に関する非線形核関数を用い、(a)と同一の条件下で、水圧変動の周波数スペクトルを $S_{\max}$ をパラメータとして計算した例を示したものである。ただし、水圧計設置水深は $z=-28\text{m}$ として計算した。また、図-8(c)は水面変動と水圧変動の周波数スペクトルの計算値を用い、式(20)に基づいて計算された伝達関数 $|H(f)|$ を、 $S_{\max}$ をパラメータとして示したものである。図-8に見られるように、水面変動のスペクトルには、方向集中度 $S_{\max}$ の相違によるスペクトル形状の相違は顕著ではないが、水圧変動のスペクトルには高周波数側と低周波数側で $S_{\max}$ の差違によるスペクトル形状の相違が顕著に現れている。これは以下の理由によるものである。

波浪の非線形性によって波形は歪む。この歪みの影響は、角周波数と波数ベクトルの和と差のFourier成分に分解されてスペクトル上に現れる。すなわち、波数・角周波数スペクトル $S(k, \omega)$ 上では、 n 次の非線形性によって、

$$\omega = \pm\omega_1 \pm \omega_2 \pm \dots \pm \omega_n, \quad k = \pm k_1 \pm k_2 \pm \dots \pm k_n \quad (72)$$

で与えられる (ω, k) 成分上に非線形性の影響が現れる。しかしながら、角周波数 ω はスカラーで、波数 k はベクトルであるため、方向スペクトルの分布形状に依存して非線形性の現れ方が異なってくる。例えば、図-9(a)では、 k_1 と k_2 の和によって生じる k の絶対値 $|k|$ はもとの波数、 $|k_1|$ 、 $|k_2|$ よりも大きい。図-9(b)では逆に小さくなる。このため、 $\omega = \omega_1 + \omega_2$ によって同一の角周波数成分に非線形性の影響が現れる場合でも、 $k = k_1 + k_2$ の相違によってその成分波の伝播方向や波長 $(L = 2\pi/k)$ が異なり、非線形性の現れ方が異なる。

ってくる。図-8では方向スペクトルの相違を $S_{\max}$ をパラメータとして示したが、図-8に見られるように $S_{\max}$ が小さいほど、すなわち方向スペクトルの方向集中度が小さいほど、微小振幅波理論からのずれが大きくなる。図-8の計算条件は、図-1に示した伝達関数の観測条件に近く、図-1の高周波数側の変動は図-8(c)の $S_{\max} = 10 \sim 20$ に対応しているのが分かる。このように波浪の本質的な特性である不規則性と弱非線形性および多方向性を考慮することにより、波浪観測結果が合理的に説明できることがわかる。

なお、図-8(c)に見られるように、伝達関数の低周波数側にも角周波数と波数ベクトルの差の干渉による非線形性と多方向性の影響が現れるため、水圧式波高計で長周期波を計測する場合には注意が必要である。

5. 方向スペクトルに基づく波浪推算モデル

波浪推算法はSMB法に代表される有義波法とスペクトル法に大別されるが、現在ではスペクトル法が主流となっている。風によって発生・発達し、減衰する波浪の方向スペクトルの時間的・空間的变化は、次のエネルギー平衡方程式の数値解として求められる。

$$\frac{\partial S(f, \theta)}{\partial t} + C_g \nabla S(f, \theta) = F_{\text{net}}(f, \theta) \quad (73)$$

ここに、式(73)の左辺の第一項はスペクトルエネルギー $S(f, \theta)$ の局所的な時間変化を表し、第二項はスペクトルエネルギーの移流効果による変化を表す。 C_g は群速度である。また、右辺の $F_{\text{net}}(f, \theta)$ はスペクトル成分の変化に関わるエネルギーの入出力を表す項でエネルギーソース関数と呼ばれ、一般に、次のような3つの物理機構に分けて扱われる。

$$F_{\text{net}} = F_{\text{in}} + F_{\text{nl}} + F_{\text{ds}} \quad (74)$$

ここに、 F_{in} は風波が発達するための外力となる風から波へとエネルギーが輸送される効果を表す。 F_{nl} は波数の異なる成分波間でエネルギーがやりとりされて、波浪の成分波エネルギーの再配分を行う非線形相互作用によるエネルギー輸送の効果を表す。 F_{ds} は砕波や内部粘性等により波浪のエネルギーが消散する効果を表す。これらのソース項が時空間的に与えられれば式(73)を適切な初期条件と境界条件のもとに数値積分することによって、波浪のエネルギースペクトルの時空間変化を求めることができる。

成分波間の非線形エネルギー輸送に対する表現 F_{nl} を理論的に最初に導いたのはHasselmann(1962)であり、次式で与えられる。

$$F_{\text{nl}} = \omega \iiint G(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4) \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_4) \delta(\omega_1 + \omega_2 - \omega_3 - \omega_4) \times \{n_1 n_2 (n_3 + n_4) - n_3 n_4 (n_1 + n_2)\} d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3 \quad (75)$$

ここに、 $n_i = n(\mathbf{k}_i) = S(\mathbf{k}_i, \omega_i) / \omega_i$ ($i=1, \dots, 4$)は、波数ベクトル $\mathbf{k}_i$ 、角周波数 ω_i を有する波の作用(密度)である。また、 $G(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4)$ は相互作用係数でHerterich and Hasselmann(1980)に示されている。式(75)は4つの成分波間の非線形相互作用を表す式で、4波共鳴条件：

$$\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4, \quad \omega_1 + \omega_2 = \omega_3 + \omega_4 \quad (76)$$

を満足する成分波間で非線形エネルギー輸送が生じることを示している。4波の非線形相互作用は方向スペクトルの形状を変化させるが、波浪エネルギーの総和、運動量の総和、波作用の総和は保存される。式(75)の厳密計算法はMasuda(1980)により提案されている。また、小松ら(1993)はMasudaの計算法をもとにより効

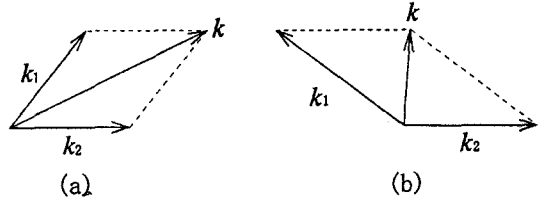


図-9 海洋波の2次の非線形性により生じるベクトル成分の例

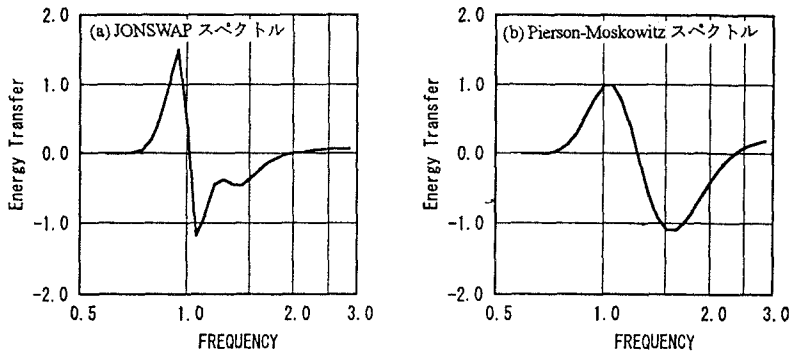


図-10 海洋波の非線形エネルギー輸送の計算例
((a) JONSWAP スペクトル, (b) Pierson-Moskowitz スペクトル)

率的な計算法を開発している。橋本ら(1996)は小松らの方法を有限水深域に適用できるように拡張し、小松ら(1998)は橋本らの計算法を改良し精度を向上させた。

図-10(a)は、JONSWAP型周波数スペクトルおよび $\cos^2 \theta$ 型方向関数を用いた方向スペクトルを仮定して式(75)の数値積分を行い、さらにこれを方向角について積分して、周波数に関する非線形エネルギー輸送を計算したものである。図-10(b)は、周波数スペクトルにPierson-Moskowitzスペクトル、方向関数に $\cos^2 \theta$ 型を用いて同様の計算を行ったものである。計算条件はいずれの場合も周波数スペクトルのピーク周波数を $\omega_p = 1$ として計算した。図-10の非線形エネルギー輸送の負の領域から正の領域へエネルギーが輸送されることを示している。発達過程にあるJONSWAPスペクトルのように、スペクトルのピーク付近で尖鋭な形状を有するスペクトルの場合には、図-10(a)に見られるように、高周波数側からピーク周波数の少し低周波数側にエネルギーを輸送し、スペクトルのピークを低周波数側に移動させるような非線形エネルギー輸送が生じる。一方、Pierson-Moskowitzスペクトルのようなピーク周波数付近のエネルギー分布がなだらかな形状の場合には、高周波数側からピーク周波数付近にエネルギーを輸送し、スペクトルピークを持ち上げるような非線形エネルギー輸送が生じる。このように、海洋波の非線形エネルギー輸送は方向スペクトル形の自己安定性と密接な関係があることが分かる(Masuda,1980, 小松ら,1993)。

非線形相互作用は、高精度な波浪推算法を開発する上で、考慮しなければならない重要なメカニズムであるが、式(75)の数値積分には膨大な計算が必要であり、式(75)を直接波浪推算モデルに組み込むことは現段階では困難である。このため、式(75)を近似的に計算する離散相互作用近似(Hasselmann and Hasselmann, 1985)が提案された。しかしながら、離散相互作用近似は、JONSWAPスペクトルのようなエネルギー分布の鋭いスペクトルに対しては近似精度が著しく低下することから、さらに高精度で効率的な計算法の開発が進められている(Suzuki, 1995, 小松,1996, 植野・石阪,1997, 橋本ら,1999)。

なお、スペクトル法による波浪推算法は、非線形相互作用 F_{nl} の項の扱い方の相違により、分離伝播(DP)モデル、結合ハイブリッド(CH)モデル、結合分離(CD)モデルなどに分類される。DPモデルでは非線形相互作用による成分波間のエネルギー輸送の項を直接的には取り入れておらず、各周波数・方向ごとの波浪成分が相互結合していない。CHモデルでは成分波間の非線形干渉をパラメータ化して取り入れている。CDモデルでは何らかの形で直接的に取り入れている。これらのモデルは風波理論やコンピュータの発展に伴って段階的に開発されてきており、DPモデルを第一世代モデル、CHモデルを第二世代モデル、CDモデルを第三世代モデルと分類することもある。わが国の気象庁の波浪予報業務では、第一世代モデルのMRI (Isozaki and Uji,1973)、第二世代モデルのMRI-II (Uji,1984)、MRI-II_{new} (宇治・植野,1987)へと発展し、現在では第

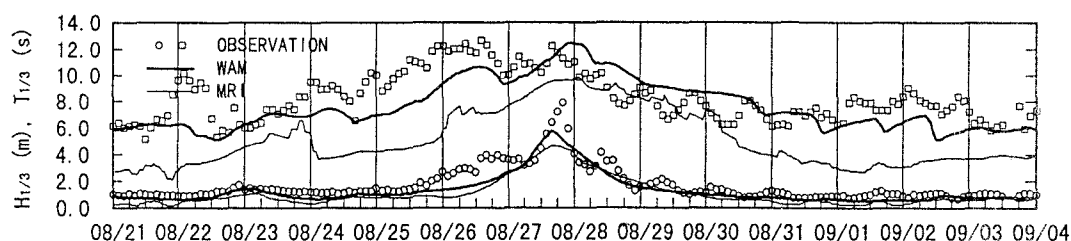


図-11 有義波高 $H_{1/3}$ と有義波周期 $T_{1/3}$ の時系列変化図（波浪観測値と波浪推算値）
 (○：有義波高の観測値，□：有義波周期の観測値，太線：WAM，細線：MRI)

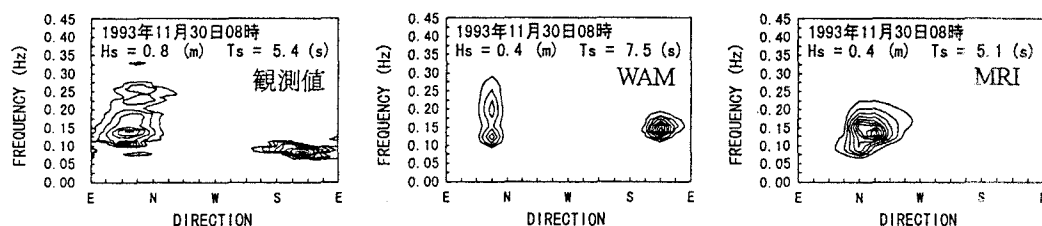


図-12 方向スペクトルの比較（左図：観測値，中図：WAM，右図：MRI）

三世モデルのMRI-Ⅲが用いられている。諸外国においても第三世代波浪推算モデルであるWAM (Komen et al., 1994)が、既に実務的なレベルで用いられている。WAMでは、非線形相互作用の効果を導入することによって複雑に変動する風場への応答特性が従来の波浪推算モデルに比べて向上したと報告されている。

橋本ら(1999)は、WAMとMRIを用いて波浪推算を行い、実際に観測された高精度な方向スペクトルと比較して、それぞれの推定精度を検討している。図-11は、高波期間の有義波高 $H_{1/3}$ と有義波周期 $T_{1/3}$ の波浪観測値と波浪推算値の時系列変化図の一例である。WAMとMRIともに高波浪時に有義波高を過小評価しているが、過小評価する傾向はMRIで大きく、WAMの方がより観測値に近い。有義波周期についてもMRIに比べてWAMの方が適合性が高いことがわかる。図-12は、波浪観測と波浪推算により得られた方向スペクトルの一例を示したものである。波浪観測結果では二方向波浪場であるにもかかわらず、MRIでは一方向波浪場として推定されており、実際の波浪場を再現できていない。一方、WAMでは二方向波浪場となっており、より現実に近い波浪場を再現できることがわかる。

最近、浅海域における風波の発達・減衰を計算するモデルとして、WAMの成果を多く取り入れて開発されたSWAN(Ris, 1997)が提案されている。

6. おわりに

海洋波の統計的性質とスペクトルに関する調査・研究は範囲が非常に広く、浅学非才な著者にはその全容を理解し、要領良くまとめることは到底不可能である。本稿は、著者の独断的な選択により、その一部を述べたに過ぎない。また、いささか内容に片寄りがあることを反省している。この分野では、合田(1977)の著書が名著として内外で有名であるが、最近では、Massel (1996)やOchi (1998)も出版されている。これらの著書では不規則波への統計的アプローチが幅広く紹介されており、参考になると思う。

ここで述べた内容が、読者の今後の調査・研究に少しでもお役に立てばと願っている。

参考文献

- 磯部雅彦・近藤浩右(1983)：入・反射波の共存場における方向スペクトルの推定法，第30回海岸工学講演会論文集，pp.44-48.
- 磯部雅彦・近藤浩右・堀川清司(1984)：方向スペクトルの推定におけるMLMの拡張，第31回海岸工学講演会論文集，pp.173-177.
- 宇治豪・植野耕治(1987)：波浪モデルMRI-II New，気象研究所海洋研究部，118p.
- 植野耕治・石阪正雄(1997)：風波の非線形エネルギー輸送の効率的な計算法，測候時報，第64巻，pp.75-80.
- 柿沼忠男・石田 昭・門司剛至(1968)：記録に基づく海岸波浪の非線形性の解析，第15回海岸工学論文集，pp.73-79.
- 木村 晃(1985)：非線形長周期波の2次元スペクトル，第32回海岸工学講演会論文集，pp.155-158.
- 合田良実・鈴木康正(1975)：光易型方向スペクトルによる不規則波の屈折・回折計算，港湾技術資料，No.230，45p.
- 合田良実(1977)：港湾構造物の耐波設計——波浪工学への序説——，鹿島出版会，333p.
- 合田良実(1980)：波高計群による方向スペクトルを用いた反射波推定法の検討，港湾技術研究所報告，第19巻，第3号，pp.37-70.
- 合田良実(1981)：共分散法を用いた波向推定方式の数値的検討，港湾技術研究所報告，第20巻，第3号，pp.53-92.
- 合田良実(1987)：数値シミュレーションによる波浪の標準スペクトルと統計的性質，第34回海岸工学講演会論文集，pp.131-135.
- 小松幸生・草場忠夫・増田 章(1993)：風波成分波間の非線形エネルギー伝達—新しく開発した効率的な計算法について—，九州大学応用力学研究所報，第75号，pp.121-146.
- 小松幸生(1996)：新しい非線形エネルギー伝達計算に基づく次世代型波浪予報モデルの開発，九州大学学位論文.
- 小松幸生・草場忠夫・増田 章(1998)：沿岸域における風波成分波間の非線形エネルギー伝達，1998年度日本海洋学会秋季大会講演要旨集，p.151.
- 榎木 亨・田端竹千穂(1972)：減衰域における不規則波の変形について，第19回海岸工学講演会論文集，pp.143-148.
- 永田 豊(1976)：スペクトル解析の概念と海洋学における時系列解析，海洋物理学Ⅱ(寺本俊彦監修)，東京大学出版会，251p.
- 橋本典明・小舟浩治(1985)：最大エントロピー原理(MEP)を用いた方向スペクトルの推定，港湾技術研究所報告，第24巻，第3号，p.123-145.
- 橋本典明(1987)：ベイズ型モデルを用いた方向スペクトルの推定，港湾技術研究所報告，第26巻，第2号，pp.97-125.
- 橋本典明・小舟浩治(1987)：ベイズ型モデルを用いた方向スペクトルの推定—入・反射波共存場を対象として—，港湾技術研究所報告，第26巻，第4号，p.3-33.
- 橋本典明(1990)：ベイズ型モデルを用いた海洋波浪の非線形核関数の数値的推定，港湾技術研究所報告，第29巻，第3号，pp.27-56.
- 橋本典明・永井紀彦・浅井 正・菅原一晃(1993)：海洋波の方向スペクトルの推定における最大エントロピー原理法(MEP)の拡張，港湾技術研究所報告，第32巻，第1号，pp.3-25.
- 橋本典明・永井紀彦・菅原一晃・浅井正・朴慶寿(1993)：波浪の多方向性と弱非線形性を考慮した水圧波から表面波への換算法について，港湾技術研究所報告，第32巻，第1号，pp.27-51.
- 橋本典明・永井紀彦・浅井 正(1993)：海洋波の方向スペクトルの推定における拡張最大エントロピー原理法の修正—入・反射波共存場を対象として—，港湾技術研究所報告，第32巻，第4号，pp.25-47.
- 橋本典明・鶴谷広一・中川康之(1996)：有限水深域における海洋波の非線形相互作用に関する数値計算，海岸工学論文集，第43巻，pp.191-195.
- 橋本典明・川口浩二・鈴木正芳(1999)：海洋波の非線形相互作用における離散相互作用近似の拡張，海岸工学論文集，第46巻.
- 橋本典明・川口浩二・真期俊行・永井紀彦(1999)：方向スペクトル観測値に基づく第3世代波浪推算法(WAM)の推定精度に関する検討，海岸工学論文集，第46巻.
- 浜中建一郎・川崎 清(1980)：浅海不規則波の波動解について，第27回海岸工学講演会論文集，pp.16-19.
- 浜中建一郎・加藤一之(1982)：有限振幅波の浅水変形に対する摂動解，第29回海岸工学講演会論文集，pp.65-69.
- 浜中建一郎・佐藤典之(1984)：不規則波の非線形浅水変形について，第31回海岸工学講演会論文集，pp.138-142.
- 浜中建一郎・日比康生・佐伯 浩(1986)：高次の自由波を考慮した波の浅水変形について，第33回海岸工学講演会論文集，pp.119-122.
- 日野幹雄(1977)：スペクトル解析，朝倉書店，300p.
- 光易 恒(1995)：海洋波の物理，岩波書店，210p.
- 光易 恒(1970)：風波のスペクトルの発達(2)，第17回海岸工学講演会論文集，土木学会，pp.1-7.
- 山口正隆・土屋義人・小矢田宏(1977)：一様風域場における波浪の方向スペクトルの特性について，第24回海岸工学講演会論文集，pp.97-101.
- 横木裕宗・磯部雅彦・渡辺 晃(1994)：円正規分布関数を用いた入・反射波共存場における方向スペクトルの推定法，海岸工学論文集，第41巻，pp.41-45.

- Ahn, K. (1993) : Nonlinear analysis of waves in finite water depth, Dr. Thesis, University of Florida, 61p.
- Borgman, L. E. (1969) : Directional spectra models for design use for surface waves, HEL1-12, Hydraulic. Eng. Lab., Univ. of California, 56p.
- Bretschneider, C. L. (1968): Significant waves and wave spectrum, Fundamentals in ocean engineering-Part 7, Ocean Industry, Feb., pp. 40-46.
- Cartwright, D.E. and Longuet-Higgins, M.S. (1956): The statistical Distribution of the maxima of a random function, Proc. Roy. Soc., Ser. A, Vol. 237, pp. 212~ 232.
- Donelan, M. A., Hamilton, J. and Hui, W. H. (1985) : Directional spectra of wind-generated waves, Phil. Trans. Roy. Soc., London, (A)315, pp.509-562.
- Elgar, S. and R. T. Guza (1985) : Observations of bispectra of shoaling surface gravity waves, Jour. Fluid Mech., 161, pp.425-448.
- Fujiwara, R. and M. Isobe (1996) : A method for estimating standardized bimodal directional spectra, Proc. 25th ICCE, ASCE, pp.16-29.
- Goda, Y. (1970) : Numerical experiments on wave statistics with spectral simulation, Rept. Port and Harbour Res. Inst., Vol.9, No.3, pp.9-57.
- Goda, Y. (1983): Analysis of wave grouping and spectra of long-traveled swell, Rept. Port and Harbour Res. Inst., Vol. 22, No.1, pp.3-41.
- Hamada, T. (1965) : The secondary interactions of surface waves, Rept. Port and Harbour Res. Inst., No. 10, 28p.
- Hasselmann, K. (1962): On the non-linear energy transfer in a gravity-wave spectrum, Part 1, General theory, J. Fluid Mech., 12, pp.481-500.
- Hasselmann, K., W. Munk and G. MacDonald (1963) : Bispectra of ocean waves, Time Series Analysis, ed. by Rosenblatt, M., John Wiley & Sons, Inc., pp.125-139.
- Hasselmann, K. et al. (1973) : Measurements of wind-wave growth and swell decay during the Joint North Sea Waves Project (JONSWAP), Deutsche Hydr. Zeit, Reihe A (8°), No. 12.
- Hasselmann, S and K. Hasselmann (1985): Computations and parameterizations of the nonlinear energy transfer in a gravity wave spectrum, Part I: A new method for efficient computations of the exact nonlinear transfer integral, J. Phys. Oceanogr., 15, pp.1369-1377.
- Herterich, K. and K. Hasselmann (1980) : A similarity relation for the nonlinear energy transfer in a finite-depth gravity-wave spectrum, Jour. Fluid Mech., 97, pp.215-224.
- Huang, N. E. et al. (1981) : A unified two-parameter wave spectral model for a general sea state, Jour. Fluid Mech., Vol. 112, pp.203-224.
- Isozaki, I. and Uji, T. (1973): Numerical prediction of ocean wind waves, 気象研究所報告, 第24巻, 第2号, pp.207-231.
- Komen, G. J. et al. (1994) : Dynamics and Modeling of Ocean Waves, Cambridge Univ. Press, 532p.
- Longuet-Higgins, M. S. (1957) : The statistical analysis of a random, moving surface, Phil. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A (1966), Vol. 19, No. 4, pp.321-387.
- Massel, S. R. (1996) : Ocean surface waves: their physics and prediction, Advanced series on ocean engineering, Vol.11, World Scientific, 491p.
- Masuda, A., Y. Y. Kuo and H. Mitsuyasu(1979) : On the dispersion relation of random gravity waves, Part 1. Theoretical framework, Jour. Fluid Mech., Vol.92, pp.717-730.
- Masuda, A. (1980): Nonlinear Energy Transfer Between Wind Waves, J. Phys. Oceanogr., 10, pp.2082-2092.
- Masuda, A and Y. Kuo (1981): A note on the imaginary part of bispectra, Deep-Sea Res., Vol. 28 A, No.3, pp.213-222.
- Mitsuyasu, H. et al. (1975): Observation of the directional spectrum of ocean waves using a cloverleaf buoy, J. Phys. Oceanogr. Vol. 5, pp.750-760.
- Ochi, M. K. and e. n. hubble (1976) : On six-parameter wave spectra, Proc. 15th Conf. Coastal Engg., Hawaii, pp.301-328.
- Ochi, M. K. (1998) : Ocean waves -The stochastic approach -, Cambridge ocean technology series 6, Camb. Univ. Press, 319p
- Phillips, O. M. (1977) : The dynamics of the upper ocean, 2nd ed., Camb. Univ. Press, 336p.
- Pierson, W.J. and Moskowitz, L. (1964): A proposed spectral form for fully developed wind seas based on the similarity theory of S.A. Kitaigorodskii, J. Geophys. Res., Vol. 69, No. 24, pp. 5181-5190.
- Rice, S. O. (1954) : Mathematical analysis of random noise, 1944, reprinted in Selected Papers on Noise and Stochastic Processes, Dover Pub., Inc., pp.133-294.
- Ris, R. C. (1997): Spectral modeling of wind waves in coastal areas, Communications on Hydraulics and Geotechnical Engineering, Department of Civil Engineering, Delft University of Technology, Report no. 97-4 (ISSN 0169-6548), 160p.
- Suzuki, Y. (1995):Development and Application of a Global Ocean Wave Prediction Model including Nonlinear Interactions and Dissipation, Dr. Thesis, University of Tokyo, 182p.
- Tick, L. J. (1959) : A non-linear random model of gravity waves I, J. Math. and Mech., Vol, 8, No. 3, pp.643-652.
- Tick, L. J. (1963) : Nonlinear probability models of ocean waves, Ocean Wave Spectra, Prentice-Hall, Inc., pp.163-169.
- Toba, Y. (1972): Local balance in the air-sea boundary processes, I. On the growth process of wind waves, J. Oceanogr. Soc. Japan, 28, pp.109-120.
- Uji, T. (1984) : A coupled discrete wave model MRI-II, J. Oceanogr. Soc. Japan, 40, pp.303-313.