

「波動問題」の歴史的変遷

On the Historical Development of the Mathematical Theory of Water Waves

合 田 良 実

Yoshimi Goda

1. はじめに

水面の波の問題は古くから人々の興味を引きつけてきた。レオナルド・ダヴィンチは流水の渦や波運動のスケッチを何枚も残しており、波は水粒子の回転運動であることを喝破している。しかし、ガリレオに始まり、ニュートンが確立した古典力学の枠組みのなかで水面波の問題を数式で取り扱うようになったのは18世紀後半からである。次項以降に紹介するように、20世紀半ばの海岸工学の誕生まで波動問題は数学者・物理学者の扱うところであり、土木・港湾工学の技術者の理解の外であった。

こうした状況を一変させたのが第二次世界大戦である。アメリカとイギリスは地中海、太平洋戦線の上陸作戦を成功させるために砕波状況の的確な予測を必要とした。そのため、風波の発達予測、浅海域での変形予測、さらに砕波高の見積もりの技術を発展させた。また、ノルマンディー上陸作戦では軍需物資を揚陸する基地として人工港湾を一気に建設したが、この計画立案に際しては電磁波の回折理論が波浪の問題に応用された。こうした軍事上の必要から誕生した技術の中軸として戦後後に海岸工学という新しい分野が成立したのである。

1950年代以降に波動問題の研究を推進した一つは石油需要の急激な増大である。海底石油の掘削は、1940年代までは水深数メートルの浅海域にとどまっていたが、1967年には水深104mの地点に大型プラットフォームを設置するようになり、今では500m以深の海底からも石油をくみ出している。こうした大水深の石油掘削・生産装置は波力が最大の設計外力であり、有限振幅波の計算理論が発展した。また、輸送コスト削減のためにタンカーは次々に大型化し、それを受け入れる大水深港湾の計画・建設のためにも波動理論の高度化が図られてきた。

さらに近年のコンピュータの高性能化・小型化は、精密な波の伝播・変形計算を可能とし、数値計算が水槽実験に取って代わる勢いを見せるようになってきている。本稿では、こうした水面の波に関わる諸問題がどのような経緯で研究されてきたかを紹介したい。当然のことながら、波動問題の研究は広大な範囲に広がっており、その全容を把握することは極めて困難である。ここでは、筆者がこれまでに勉強してきたものを中心に、私的な展望として述べていきたい。また、波動理論そのものについては本年度の講師である磯部(1999)他が紹介しているので、本稿では読み物風に記述する。筆者の勉強不足で波動研究の歴史の重要部分を見落とした個所も少なくないと思われる。読者各位のご寛恕を乞う次第である。

2. 波動理論の揺籃期

(1) 水面波の波速

波動理論の最初のテーマは波長と波速の関係であった。既にニュートン(Newton)は*Principia*のなかで、水面波ならびに音波の速度を振り子のアナロジーで論じている(Levi 1995, p.450)。プリンピキアの初版は1687年である。イギリスではこの2年前に、クロムウエルのピューリタン革命の

後で王政復古したチャールス 2 世が逝去しており、フランスではルイ 14 世が治世 44 年目の絶頂期にあった。産業革命の牽引役となったニューコメンの蒸気機関は、この 28 年後の 1705 年に発明されている。

18 世紀はベルヌイ (Daniel Bernoulli), オイラー (Euler), ダランベール (D'Lambert), ラグランジュ (Lagrange) などによって流体力学が確立した時代である。水面波については、ラグランジュが長波の波速公式 $c = \sqrt{gh}$ を 1783 年に発表し、1788 年にベルリンで刊行された「解析力学」(Mécanique analytique) に記載している。ただし、彼はこの公式が長波にとどまらず任意水深の波にも適用できるとしたために、ラプラス (Laplace) やポアソン (Poisson) からその誤りを指摘されている (Levi 1995, p.453)。ラプラスはラグランジュの 13 歳年下であり、ポアソンはさらに 32 歳若い。ラグランジュはルイ 16 世の帝政からフランス大革命の時代に活躍し、エコール・ポリテクニクの教授としてフランスの数学・解析力学を指導した。ラプラスもまた革命期からナポレオン時代、さらに王政復古の時期まで活躍した。潮汐理論の先駆者としても知られている。

ポアソンは、水面に石を投げ入れたときの波紋の伝播など、水面の一部が持ち上げられ、あるいは押し下げられたときの理論を 1816 年に発表した。この水面波の現象は、その前年に同様の理論を発表したコーシー (Cauchy) の名とあわせて、コーシー・ポアソン波と呼ばれている。

(2) トロコイド波の理論

水面波の波形や水粒子運動を数式の形で明示したのは、プラハ工科大学のゲルストナ (Gerstner) が最初である。1804 年¹ にボヘミア王立科学協会の機関誌に発表されたものの、その理論はフランスやイギリスなどの数学者に半世紀以上も知られずにいた (Levi 1995, p.456)。ストークス (Stokes 1847) によれば、ラッセル (Russel 1844) が深海域のトロコイド波の波形を描くといっていることであるが、確認していない。

トロコイド波を再発見したのはランキン (Rankin 1862) であり、波形や水粒子運動のみならず、水中圧力についても論じている。また、ストークス (Stokes 1847) の有限振幅波理論では水粒子の回転軌道が閉じずにわずかながら前進運動を伴うのに対し、トロコイド波ではそうした質量輸送が存在しないことを指摘している。ランキンは、ストークスは渦度ゼロを前提としているのに対し、トロコイド波では渦度が各深度ごとに一定であるための差異であると説明している。ゲルストナやランキンのトロコイド波理論は深海における大波高の理論として完結しており、水面波の特性を的確に記述している。しかしながら、完全流体の仮定の下では渦度を有する運動が人間の手を加えることなしに出現することができない。このため、ラム (Lamb 1932) が述べているように、その後の波動理論の主流からは外れてしまっている。唯一の例外は、サンフルーが重複波の波圧理論を導く際にトロコイド波理論を拡張した場合である。

(3) 速度ポテンシャルに基づく波浪理論

オイラーによる流体の運動方程式を変形すると、流体運動の速度ポテンシャル ϕ が導かれる。このことを提示したのはラグランジュであり、ラプラスは完全流体の速度ポテンシャルの基本式としていわゆるラプラス方程式を明示した。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (1)$$

この速度ポテンシャルに基づく波動理論を最初に導いたのはエアリ (Airy 1845) である。当時のメトロポリタン百科事典に寄稿した「潮汐と波」の項で発表したもので、いわゆる微小振幅波の理論で

¹ ラウス&インス著『水理学史』98 頁による。ただし、Lamb(1932) 421 頁では 1802 年としている。また、Lamb はランキンがゲルストナの論文を知らなかったと判断している。

ある。その主要部分はそれ以来、多くの教科書に記載されており、現在の波動理論の基本となっている。ただし、筆者は原典を見ていない。波長と波速の関係、あるいは $\omega^2 = gk \tanh kh$ の分散関係式はエアリによるものである。

このエアリの理論の2年後に、ストークス (1847) は摂動展開による有限振幅波の理論を発表した。このときストークスは28歳の新進気鋭の学者であり、18歳年長のエアリの理論に触発されたものと推測される。ストークスの表式は今のものとやや異なるけれども、浅海表面波については第2次近似解、深海波では第3次近似解まで求めている。また、有限振幅波の質量輸送を指摘するとともに、密度成層の界面波についても論じている。ストークスはさらに1876年に二つの波群の重ね合わせとして群速度の理論を導いた。この当時、群速度の問題は数学・物理学者の関心を引いていたようで (Levi 1995, p.467)、レーリー (Rayleigh 1877) も直ちに群速度の一般理論を展開している。

3. 変形する波と定常波形の波

ストークスの1847年の論文には、エアリーが有限振幅の長波は進行するにつれて次第に波形が変化するとして述べたことに対し、 a/h が $(h/L)^2$ よりも小さければ変形しないとの記述がある。逆に言えば、振幅の大きな長波が変形することは、実際の波の観察から当然であると受け止められていたであろう。それに対して、一様断面の水路の形を変えることなしに波が伝播する場合があることを指摘したのはラッセル (Russell 1844) であった。

1834年、彼が26歳の若きエディンバラ大学の教師であったとき、スコットランド地方の運河会社がはしけを馬で牽引する代わりに外輪蒸気船の引き船を使う可能性の調査を依頼した (Levi 1995, p.180)。ラッセルはこのために幾度となく運河で観察を続けていたところ、あるとき2頭の馬に引かれたはしけが突然に止まったと思うと、やがて激しい勢いで前進を開始した。そのはしけは運河内で反対側から進んできた孤立波と遭遇して持ち上げられ、波峰の通過とともに孤立波の流速抵抗から解放されたのである。ラッセルはこうした孤立波の伝播を運河沿いに追跡して伝播速度や波高の減衰状況を記録した。なお、イギリスの1830年代というのは運河に代わって鉄道の主役になりつつあった時代であり、ラッセルに調査を依頼した会社も鉄道輸送との競争に打ち勝つ方策を探っていたのであろう。

孤立波の現象はこれよりも先にトリノのビドネ (Bidone 1826) が報告したとのことであるが (Levi 1995, p.180)、イギリスやオランダの研究者には気づかれなかったようである。ラッセルが報告した孤立波の現象は、その27年後にブーシネスク (Boussinesq 1871) およびその5年後のレーリー (1876) によって本格的に検討された。なお、レーリーの論文はその時点での波動理論を展望したものであり、深海波や円筒容器内の水面振動も扱っている。

孤立波の理論は、やがてマッカワン (McCowan 1891) によって精密化され、波形、水中圧力、有効波長、水粒子運動、波エネルギーなどが定式化された。この論文でマッカワンは孤立波の最大波高についても言及しているが、後の1894年の論文ではこの問題に絞って吟味し、水深の0.78倍が限界波高との結論を導いた。こうしたマッカワンの孤立波理論は、第二次世界大戦後にムンク (Munk 1949) が砕波指標をまとめる際の指針として活用された。さらに、海中構造物に作用する波力を計算する際には水平粒子速度の鉛直分布が必要であり、このためにもムンクがとりまとめた孤立波の計算図表が1960年代まで利用された。

一方、コルテベグとドフリース (1895) は周期性を持つ浅海域の定常波形の理論を導いた。波形がJacobiの楕円関数 cn を用いて表されるところから、彼らはクノイド波 (cnoidal waves) の名称を与えた。理論展開に当たっては水平・鉛直粒子速度について一種の摂動展開を行って速度ポテンシャル

と流れ関数に代入し、波形定常の条件を満足する波形の方程式を求めた。そして、高次近似解の条件式を導いた上で、最終的に2次近似解の波形を提示した。また、マッカワンの孤立波がクノイド波の極限形であることも証明している。なお、コルテベグとドフリースの理論は近年になって次のKdV方程式として書き改められ、電磁波、プラズマ、ソリトンなどの非線形分散波の挙動を数値解析する際の基本式として利用されている（たとえば、Zabusky & Galvin 1971）。

$$\frac{\partial(h+\eta)}{\partial t} + (h+\eta)\frac{\partial(h+\eta)}{\partial x} + \delta^2 \frac{\partial^3(h+\eta)}{\partial x^3} = 0 \quad (2)$$

ブーシネスク (1871) の研究は孤立波と周期波の両方を含み、伝播とともに変形する波の取り扱いも可能とするものであった。しかし、その後の文献を探索する限り、波動の分野でこの研究を引き継ぎ、発展させた論文は現れない。約100年後の1970年代になって、ようやくブーシネスク方程式が波浪の数値計算の寵児としてもてはやされるようになったのである。次項の極限波高の探求も含め、19世紀から20世紀初頭までの波動研究は数学者、物理学者のアカデミックな興味の対象であり、ラッセルが運河で孤立波を観察したことを除けば、現実の工学的な問題とは切り離されていたようである。波動を扱った論文は限られていて、数十年前の論文を引用した上で自己の研究成果を論述したものが少なくない。現代のように多くの研究者が次々に新しい論文を発表している状況と比べて、何かのんびりした雰囲気である。なお、19世紀後半のイギリスはビクトリア女王の治世下、大英帝国が世界の盟主であった時代であり、やがて1914～18年の第一次世界大戦によってパックス・ブリタニカの時代が終わるのである。

4. 極限波高へのアプローチ

マッカワンが孤立波の極限波高を計算する前年、ミッチェル (Michell 1893) は深海波の碎波限界を求めている。彼は、ストークスが極限波の頂部が120°の凸角を形成するとした定義に従い、摂動展開を精度良く計算することによって波形勾配の最大値が0.142であり、そのときの波速は微少振幅波の1.20倍となることを示した。

こうした摂動展開による級数表示で碎波限界を求めることは、レーリー (1917)、ハヴェロック (Havelock 1918) などによって継続された。しかし、そうした級数展開の収束性については疑念が残されていた。この問題を解決したのはローマ大学のレビチビタ (Levi Civita 1925) であった。論文はドイツの数学学会誌にフランス語で発表されており、筆者はその詳細について言及することはできないが、この論文以降は有限振幅波の級数展開の収束性についての議論は不要となったといわれる。

こうした限界波高の議論はそのほとんどが深海波を対象としていた。ハヴェロックの論文は有限水深を扱ったようであるが、その後ほとんど引用されていない。海岸工学の分野では、ミッシェ (Miche 1944) が浅海域の波浪の問題を広範に扱った中で碎波限界を論じており、下記の碎波限界式を提示している。

$$(H/L)_b = 0.142 \tanh 2\pi(h/L)_b \quad (3)$$

ミッシェは1747年に創立されたフランスの土木大学校（エコール・ポンネジョッセ）の教授であった。20世紀前半にはこの大学校が波浪理論の発展に大きく寄与しており、後述のサンフルーはこの機関誌 (Annales des Ponts et Chaussées) に重複波圧の理論を発表している。なお土木大学校は、ナポレオンによる理工科大学校（エコール・ポリテクニク）の1804年の改革によってその上級校として位置づけられて今日に至っている（栗田 1992, p.30）。

碎波限界波高の議論をさらに精緻化したのは、九州大学応用力学研究所の山田彦児であった (Yamada 1957a,b, Yamada et al. 1968a,b)。その理論と数値計算によって、一定水深における定常波形の限界

波高は確定したといつて良い。山田の研究は欧米の応用数学者によってときどき引用されるものの、海岸工学の分野では気づかれずにとどまっている。このため、孤立波の碎波限界波高の正しい値は山田による $0.8261h$ であるにも拘わらず、マッカワンによる $0.78h$ の値が未だに引用されることが多い。

5. 構造物に働く波力の諸問題

港湾技術者にとって、灯台や防波堤に働く波力の大きさは古くからの関心事であった。スコットランド地方の厳しい波浪条件の島嶼に灯台を建設したスティーブンソンは、既に1842年からバネ式の最大波圧記録計を工夫して波力の観測に努めていた (Stevenson, 1886)。また、米国のゲイリヤード (Gaillard, 1905) は五大湖沿岸における観測に基づいて、直立壁に衝突する水流の圧力水頭の形で波圧公式を提案している。日本では、広井 (Hiroi 1919, 1920) が小樽港での波圧観測を参考としつつ、碎波に伴う落水水流の圧力の考察から有名な広井公式を提案した。この公式は、60年以上にわたってわが国の防波堤設計の基本式として信頼されてきた。ただし欧米では、近年になって直立防波堤への関心が高まり、波圧に関する研究が進展する以前には、ほとんど知られていなかった。

こうした波圧公式は波浪理論とは無関係に経験的に導かれたものであった。波圧の問題を始めて理論的に導いたのはサンフルー (Sainflou, 1928) である。ヨーロッパでは20世紀初頭に直立防波堤の被災が相次ぎ、捨石防波堤への回帰が続いていただけに、壁面に作用する波圧を理論的に明らかにしたサンフルーの理論は港湾技術者から圧倒的な支持を勝ち得た (伊藤, 1969)。この理論は浅海域のトロコイド波に基づくもので理論式はかなり煩雑であった。しかし、サンフルー自身が土木大学校出身の技術者であり、使用に便利な簡略式をあわせて提示したところから多くの支持を得たものと思われる。サンフルーの簡略波圧式は、4年ごとに開催される国際航路会議 (PIANC) の1935年会議で基本公式として承認され、それ以来、欧米の教科書に記載されている。日本では松尾 (1941) が雑誌「港湾」にその訳文の形で紹介している。

サンフルー波圧はトロコイド波理論に基づくために渦度が0でないことが難点であるが、波高中分面が平均水面よりも高いことを明示するなど、有限振幅効果を導入していた。あえて摂動展開のオーダーをあてはめると1.5次近似に相当しよう。ストークス波の理論に基づき、速度ポテンシャルの有限振幅理論を展開して壁面波圧を導いたのはグーレ (Gourret 1935) である。田中 (1958) が紹介しているところによれば、これは重複波圧の2次近似理論である。また田中は、ミッシェ (1944) が導いたラグランジュ座標による第2次重複波圧理論も紹介している。

こうした重複波圧理論を第2次近似から第3次にまで展開したのは、深海波に対してはペニーとプライス (Penney・Price 1952) であり、浅海表面波についてはタジバクシュとケラー (Tadjikash・Keller 1960) が理論解を提示した。合田・柿崎 (1966) は防波堤への設計波圧の観点からさらに第4次近似にまで理論式を展開した。ただし、この程度の近似精度では表面境界条件の収束誤差を伴う。このため、強制的な数値収束条件を付加して波圧を計算し、実験結果とほぼ合致する結果を得ている。

一方、海底石油掘削装置の設計の基本となる柱状部材に作用する波力については、モリソンほか (Morison et al. 1950) およびモリソン (1951) が抗力と慣性力との和として求める方式を提案した。この頃は、海底石油の掘削が浅水深から次第に沖合へ移っていったときであり、実用面から波力算定法が模索されていた。抗力と慣性力を加える方式の理論的根拠は薄いですが、1930年代から航空機の翼理論の発達で抗力係数についての実験データが蓄積されており、このことが実用式提案の背景にあったと推測される。理論的には慣性力の方が導きやすく、モリソンの発表から3年後には、マッカミーとフックス (MacCamy・Fucks 1954) が大口径の直円柱に働く慣性力を回折理論から求めている。

る。さらに、合田・吉村² (1971) は直立した楕円柱体による波の回折理論を展開し、波力を慣性力として表現したときの慣性力係数を提示した。

海洋構造物は一般に形状が複雑であるため、速度ポテンシャルを理論的に求めることがむずかしい。このため、近年は各種の技法を駆使して数値解析で速度ポテンシャルを解く方式が一般的となっている。

6. 水理模型実験のための造波理論

実験水槽内に波を起こして模型に作用させることは、かなり早くから行われていた。文献として特に調べていないけれども、1923(大正11)年に設立された旧内務省の土木試験所(現在の建設省土木研究所の前身)では少なくとも1930年代前半から港湾の遮蔽実験その他が行われていた。イギリスのフルードは船舶模型試験の元祖であり、船舶関係で最初に造波試験が行われた可能性もある。

そうした実験用の造波装置の設計・製作は、すべて経験に基づくものであった。周期は直流モーターの回転数あるいは交流モーターに連結した無段変速機の手数を調整して所定の値とし、波高は試行錯誤で造波板の振幅を変えて調整した。こうした造波装置に対する理論を示したのは、ビーゼル(Biesel 1951)によればハヴェロック(1929)であり、*Philosophical Magazine*に発表とのことである。文献を調べていないが、円筒状のプランジャー型造波装置に対するものであろう。これに対してビーゼル(1951)およびビーゼルとスーク(Biesel・Suquet 1951)はピストン型、フラップ型、およびその混合型造波板による発生波の速度ポテンシャルを求めた。その解は進行波と造波板近傍の定常減衰波の重ね合わせであり、発生波の波高だけでなく造波板に働く波力や所要馬力も算出される。後者の論文(フランス語)は発表後まもなく米国で英訳され、それが日本にもたらされて当時の運輸技術研究所港湾物象部(現在の運輸省港湾技術研究所)の105m大型造波水路の設計に利用された(鶴田・久田, 1957)。

造波水路で浅水深の大波高の波を起こすと、波の峯と峯の間に小さな2次波峯が現れることがある。この2次波峯は主峯よりも進行速度が遅いため、波の伝播とともに主峯に追いつかれて吸収され、それから少したつと主峯の背後に再び現れる。この現象は波浪の非線形性に起因するものである。すなわち、非線形性の強い発生波は、ストークス波理論で表示されるような2倍周波数の拘束波を付随している。この拘束波は、水中の水粒子に対して2倍周波数の水平運動を起こさせる。しかし、造波板は基本周波数の正弦波形の往復運動しか行わない。したがって、造波板位置で水粒子運動に不一致が生じる。このため現実には拘束波と逆位相の2倍周波数自由波が励起され、結果として造波板位置では水粒子が正弦波形の往復運動のみを行う。この2倍周波数の自由波は拘束波よりも伝播速度が遅く、そのために2次波峯が遅れて移動するように見えることになる。

さらに、2倍周波数の自由波は基本周波数の進行波と干渉しあって、3次オーダーの波を励起させる。そのため、水路内の各地点での波形記録をフーリエ解析すると、各周波数の振幅が一定間隔で増減を繰り返す。2倍・3倍周波数成分は同位相で変化し、1倍周波数成分はこれらと逆位相である。このようにフーリエ振幅が場所的に変化するところから、各周波数成分の間に共振によるエネルギーの交換が行われていると考えられやすい。しかし、基本周波数の進行波、それに随伴する2次、3次の拘束波、2倍周波数の自由波、および1倍・3倍周波数の干渉波はそれぞれ固有の振幅を保持して伝播しており、それらの間でエネルギーの授受は起きていない。ただ、これらの波が重ね合わされた結果として、水路内の固定位置で解析したフーリエ振幅が見かけ上変化するのである。

こうした非線形の造波現象については、まずフォンタネ(Fontanet 1961)が2次オーダーの理論を導いた。これはラグランジュ座標を使って速度ポテンシャルを解いたもので、2倍周波数の拘束波

² 現在は高山

と自由波の発生を明示し、2倍周波数フーリエ振幅の変調間隔が拘束波と自由波の波数の差の逆数で与えられることを示唆した。ただし、この論文はフランス語で発表されたために、英語圏の研究者にはあまり知られずにいた。オイラー座標系での非線形造波理論はフリックとグザ (Flick・Guza 1980)、ベンディコウスカとマセル (Bendykowska・Massel 1988) その他が2次オーダーの解を与え、著者 (Goda 1997) が3次干渉を含めた理論解を提示した。この3次干渉の解によって、長い間、原因不明とされてきた2次波峯の移動現象のメカニズムが明らかになったのである。

7. 海岸工学の誕生と波浪変形計算の導入

ここで年代を20世紀前半に戻してみると、波浪の数学理論はかなり高度に発展しており、その状況はラム (Lamb 1932) の教科書で概観することができる。しかし、こうした波浪理論は港湾技術者にとっては無縁のものであり、海岸・港湾構造物は経験公式によって設計されていた。唯一の例外はサンフルー (1928) の重複波圧理論であった。また、実際の海でどれだけの大きさの波浪が発生するかという問題は、各地での目視観測から得られた経験公式によるほかなかった。スチーブンソン (Stevenson)、広井、モリター (Molitor) などは波高と風速の関係を対岸距離をパラメータとして表示していた。また、港口を防波堤で狭めたときの港内波高についても経験公式が与えられており、港湾工学の教科書などに引用されていた (鈴木雅次 1932, 51-52 頁)。しかし、波の回折や屈折の概念は工学には知られていなかった。

こうした状況を一変させたのが第二次世界大戦の勃発であった。多くの書物に紹介されているように、太平洋、大西洋、地中海を越えて戦火が広がり、敵の占拠する海岸への上陸作戦の敢行が不可避であった。兵士を上陸用舟艇に乗せて敵地へ突入させるとき、海が荒れていては舟艇が転覆し、兵士を無駄死にさせてしまう。このため、上陸作戦決行日の天候ならびに波浪状況の正確な予報がまず求められ、気象学者や海洋学者が動員された。日本でもこの種の研究が開始されていたが、波浪予報法の確立に成功したのはアメリカであった。カリフォルニア大学スクリップス海洋研究所長のスベドランプ (Sverdrup) の指導の下に、研究所員のムンク (Munk) が陸軍航空隊本部気象部海洋課の所属となって多くの洋上波浪データを解析し、風洞水路での実験データと組み合わせ、風から波へのエネルギー移行のモデルを考案して、これまでにない新しい科学的波浪推算法を開発した。これが有義波法の始まりであり、後にさらに多くのデータを追加して再整理したブレットシュナイダー (Bretschneider) の頭文字を加えたSMB法として普及した。

第二次大戦中の上陸作戦に対する波浪予報の貢献については、ベイツ (Bates 1949) が紹介している。スベドランプとムンクの波浪予報法は戦時中は軍事機密であり、戦後の1946年になってようやく両者共著で米国地球物理学会で公表された。また、両者は実務者用のマニュアルを米国海軍水路部の出版物No. 601号として1947年に刊行し、これによって多くの人々が新しい波浪予報法を利用できるようになった。

上陸作戦の敢行にあたっては、洋上の波浪だけではなく、砕波帯の情報が必要である。このため、波の屈折効果の算定図表や砕波指標の情報がとりまとめられ、マニュアルとして気象士官の手元に届けられた (U.S. Hydrographic Office 1944)。後にムンク (Munk 1949) が発表した砕波の論文はこのときのデータを修正孤立波理論を使って再整理したものと思われる。屈折図の作成についてはジョンソンほか (Johnson et al. 1948) が初期の方法をとりまとめ、やがてより便利な波向線法がアーサー (Arthur et al. 1949) によって発表された。

一方、1944年6月のノルマンディー上陸作戦に際しては、上陸成功後の軍事物資揚陸のための橋頭堡を長く連なる砂浜海岸に確保しなければならなかった。このため、イギリスで製作した多数の浮

き防波堤や簡易防波堤を曳航していき、沖合に沈設して人工の港を一気に建設した。この計画のためには、防波堤による遮蔽効果を適切に評価しなければならない。そこで、誰かが物理学で確立していたゾンマーフェルト (Sommerfeld) の電磁波回折理論を水面波に適用することを思いついたのである。回折波高の計算結果を論文としてとりまとめて発表したのはペニーとプライス (Penney・Price 1944) であり、その後、ジョンソン (Johnson 1951) は防波堤の開口幅をいろいろ変えた場合の回折図表を作成し、これが教科書や技術指針に引用されることが長く続いた。

このような戦時の必要性から急激に発達した波浪の計算手法を多くの技術者に利用して貰うことを一つの狙いとして、「海岸工学」という新しい学際分野に関する講演会が 1951 年に米国カリフォルニアのロングビーチ市で開催された。仕掛けたのはカリフォルニア州立大学パークレー校のオブライエン (O'Brien) 教授であり、土木工学のみならず、気象、地質、その他の分野の専門家に声をかけて波浪研究協議会 (Wave Research Council) を組織し、海岸工学会議を主催した。周知のように、これが海岸工学の発祥であり、当初は米英だけであったのがやがて世界各国の関係者の注目を集め、2 年ごとの国際会議に成長した。

8. 海底石油生産プロジェクトによる波動理論の進展

波動理論を発展させた次の契機は、海底石油掘削プロジェクトの大水深域への進展である。油田は海底下数 km のところにあり、何本もの試掘ボーリングを行った末に、幸運に恵まれればようやく油田探索に成功する。この試掘、さらに油田を発見して石油を汲み出すには、波高 10~30 m の高波にも耐えるような構造物を海中に建てなければならない。石油掘削用の海洋構造物の多くは大口径の鋼管を立体トラス状に組み上げたもの (プラットフォーム) であり、波浪荷重は抗力が主体となる。抗力は水粒子速度の 2 乗に比例するので、大波高の波浪に対する精度の高い理論が求められた。このため、1950 年代後半から高次の有限振幅波理論の発表が相次いだ。

まず、チャップリヤー (Chappelear 1959) は深海域から水深波長比 0.1 程度までの浅海表面波の碎波限界およびその近傍の波の粒子運動について考察した。ただし、山田 (Yamada 1957a) に比べると近似精度がやや劣っていた。また、ストークス (1847) の 2 次オーダーの有限振幅波理論を 3 次近似にまで拡張することは容易であったが、スケルブレリアとヘンドリクソン (Skejlbreia・Hendrikson 1960) は摂動展開による 5 次オーダーの理論式を発表した。一方、レイトン (Laiton 1960) は極浅海域を対象として、クノイド波と孤立波に対する第 2 次近似解を導いた。ストークス波に比べて、極浅海域の波の場合には 2 次近似であってもかなり複雑な数式の展開を必要とする。

有限振幅波理論が高精度化するにつれて、具体的に波形や水粒子運動を求めるには多量の数値計算が必要となる。そのため、たとえばスケルブレリアとヘンドリクソンは、あらかじめ水深波長比と波形勾配の広い範囲についてコンピュータで計算を行い、その結果を 400 頁を超える数表にまとめて利用者の便宜を図った。しかし、実際の設計条件はこうした数表の条件にぴったり一致するわけではない。このため、コンピュータの利用を前提として、大波高の波動運動を直接に数値計算する方向へ研究が向かっていった。チャップリヤー (1961) はそうした先駆者の一人である。やがて、当時は石油会社に勤務していたディーン (Dean 1965)³ が、流れ関数を任意の次数までコンピュータで自動的に展開する数値計算法を開発し、これによって非常に高い精度で波動運動を求めることができるようになった。この流れ関数法は、今でも海洋構造物の設計計算の基本として使われているようである。

こうした有限振幅の規則波の理論は、その後もいろいろ研究されており、クノイド波などに成果が挙げられているが、これらについては本年度の夏期研修会の磯部 (1999) その他を参照していただきたい。

³ その後 Dr. Robert G. Dean は大学に移り、主に漂砂問題を扱って人工養浜の設計法などを研究している。

9. 波浪変形の数値解析法の発展

電子計算機の大形化・高性能化は、波浪の諸問題の数値解析を飛躍的に発展させてきた。当初は、防波堤による波の回折問題やストークス波の第5次近似解のように、既に与えられている理論解に従って数値計算を実行するものが多かった。やがて、電子計算機による屈折図の作成のように、波浪変形を規定する方程式を海底地形に応じてステップ毎に解いていく方法が発達した。いわば波浪変形の数値シミュレーションである。これに関する理論ならびに手法については、本研修会の灘岡(1999)を参照されたい。

屈折図の数値解析手法の発達を促進させたのは、作業効率の向上とそれによる経費の削減の要請であるといえよう。風波の発達に対する波浪推算法についていえば、深海域で場所的・時間的に変動する風場について1955年にウィルソン(Wilson)が図式解法を開発した。また、浅海域での変動風場に対しては坂本ほか(1960)がウィルソンの方法を発展させた図式解法を提案した。こうした図式解法は作業が繁雑で時間がかかるため、やがて電子計算機による自動解析プログラムが作成され、実際の問題に使用されていった。

こうした数値解析は線形理論に基づくものであり、津波に対する湾の応答や港の水面の共振解析などもこの範疇に属する。また、球面浅瀬の上など海底地形が複雑なところでは屈折図の波向線が交差することがある。そうした場所では、波形の水面勾配の急激な変化によって回折波が発生する。このことは実験的には知られていたが、その数値解析を可能としたのはバーコフ(Berkhoff 1972)である。波浪変形の基本式として緩勾配方程式を提示し、その数値解析によって波高分布が求められることを明らかにした。さらに、ラッダー(Radder 1979)はその近似式としての楕円型方程式を提示した。これ以降、線形波浪の変形問題については数多くの論文が発表されている。ただし、どちらかといえば研究者の興味の対象にとどまり、実際問題への活用はあまり活発でない。これは、実務では港内の波高分布を解析することに主眼があり、このためグリーン関数法に基づくバレイリャーとゲイリャード(Barailler・Gaillard 1967)の方法その他が開発されてきた。ただし、これらは規則波に対するものであったため、実際の不規則波浪に対しては必ずしも実用的であるとはいえない。

これに対して、波浪の非線形性を取り込んだ数値計算を可能とするのがブーシネスク方程式である。とくに砕波直前の波形の前傾や、潜堤上での波の分裂現象などはブーシネスク方程式によってかなり精度良く再現できる。最初に非線形波浪の変形問題を取り扱ったのはビーゼル(Biesel 1951)である。彼は水深が変化する場における微小振幅波の伝播に対して、波数 k が場所的に変化することを積分形で取り込み、斜面上で砕波直前までの波形の変化を例示した。ただし、この論文はそれ以降の研究にあまり影響を与えなかったようである。やがて、ペレグリン(Peregrine 1966, 1967)がKdV方程式を用いて斜面上の長波の変形やボアの発生問題を論じた。これに触発されたのか、ビヤットスミス(Byatt-Smith 1971)がブーシネスク方程式の適用について論じている。

このブーシネスク方程式の可能性に着目して数値計算モデルの開発を推進したのは、オランダの国際水理環境工学センター(International Institute for Hydraulic and Environmental Engineering)のアボット(Abbott)教授のようである。著者はこうした数値計算モデルに詳しくないので、どの時点で最初のモデルを実用に供されたかを述べるのが出来ないが、文献としてはアボットほか(Abbott et al. 1978)が早い時期のものと思われる。ブーシネスク方程式はもともと長波を対象としたため、周期の短い波の伝播速度に対する計算精度が低い。このため、方程式を部分修正して近似精度を高める工夫がいろいろ行われており、現在では水深波長比の広い範囲にわたって適用可能になっている。2次元の変形問題だけでなく、港の泊地を含む3次元地形に対する計算プログラムも開発され、実

際問題に利用されている。特に、沖側境界で方向スペクトルを持つ不規則波の時空間波形を入力として与えることで、不規則波浪の変形問題を一気に計算することが可能である（たとえば、ヌォグ・マンサード [Nwogu・Mansard], 1994）。ただし、計算にかなりの時間を必要とするので実務計算に利用するにはもう少しコンピュータの性能向上を待つ必要があろう。

10. 不規則波浪理論の発展

現実の波浪は方向スペクトルで表されるような不規則波であり、波動理論を実際問題に適用するには波の不規則性を取り込まなければならない。不規則波の研究の流れについては著者が1992年度の夏期研修会で述べたので（合田 1992）、それと若干重複するけれども以下に簡単に紹介する。

海の波が不規則波であり、その構造はスペクトルによってのみ明らかにされることは、海面波の波形記録が取得できるようになったときから海洋物理学者の常識であったといつて良い（たとえば、ディーコン [Deacon] 1949）。したがって、1961年には研究最先端の科学者・技術者を集めて『海洋波浪スペクトル』と題するワークショップが開催され、その会議録が討議も付して1963年にプレントイスホール (Prentice-Hall) 社から出版された。この会議録には、方向スペクトル解析の基本式を論じたバーバー (Barber 1963)、2方向傾斜ブイによる方向スペクトル観測を紹介したロンゲット-ヒギンスほか (Longuet-Higgins et al. 1963)、周波数スペクトル構造のなかでの成分波の2次干渉理論を提示したティック (Tick 1963) など多くの基本文献が含まれていた。著者 (Goda 1970) が周波数スペクトルを与えて時間波形をシミュレートし、波高・周期の統計的性質を分析したのも、この会議での討議にヒントを得たものであった。

方向スペクトルは、海洋波浪が周波数・波向きが異なる無数の成分波の線形重ね合わせであるとの認識に立っている。この概念に基づいて波浪の浅水・屈折変形を解析したのがピアソンほか (Pierson et al. 1952) であった。この論文は第3回海岸工学会議で発表されたものの、海岸工学の研究者・実務者からは無視されてしまった。海岸工学の分野では有義波概念に基づく屈折図の作図法がようやく定着した段階であり、あまりに先端的な研究の重要性が理解されなかったためかもしれない。また、この時点ではスペクトル成分毎の屈折図を描く手間が大変であり、非実用的と考えられたのかもしれない。

次に方向スペクトルを波浪変形計算に導入したのはカールソン (Karlsson 1969) であった。この研究は、方向スペクトルエネルギー密度の輸送方程式を解くもので、スペクトル概念に基づく波浪推算法と同じ方式である。ただし、屈折によって各成分波の進行方向が変化するので、直交座標2軸に加えて波向きも変数として加えた3次元の微分方程式を解く。なお、波浪推算では時間が変数であるけれども波浪変形では定常状態を仮定し、時間項は取り除かれている。また、計算は沖から岸へ進むものとし、沖向きの反射波は無視する。このカールソンのエネルギー平衡方程式も、海外の海岸工学者の間ではしばらく取り上げられずにいた。これを実務計算に採択したのはわが国の港湾グループ（永井ほか 1974、合田・鈴木 1975）が最初である。欧米でエネルギー平衡方程式を取り上げるようになったのは1980年代後半からである。わが国ではこれと同時に、波の回折を方向スペクトル成分波の重ね合わせによって算定する方法を実務計算に導入し、1979年には運輸省港湾局長の「港湾の施設の技術上の基準にかかわる通達」において正式に採択された。もともと欧米も、近年は不規則波浪の変形計算の研究に力を入れており、PC上で作動するプログラムをいろいろ開発し、開発途上国などへの普及を図っている。

波浪の統計的性質に関しては、ロンゲット-ヒギンス (1952) による波高のレーリー分布の理論がもっともよく知られている。しかし、基本的文献としては彼の1957年のもののほうが重要である。波高

だけでなく、周期や水面勾配の統計量を方向スペクトルとの関連において論じている。ただし、やや難解であって他の研究者に引用されることが少なかったため、ロングゲット-ヒギンスはこの中から波高・周期の結合分布に関する部分をやや分かりやすくした論文を1975年に発表している。内容として優れた論文であっても、それを咀嚼し利用する者とのギャップが大きいと、十分に評価されないことがある一例かもしれない。

不規則波浪に関しては、成分波間の非線形干渉理論のほか実用的にも重要なテーマが数多い。ただし、本稿の主題である『波動問題』からはやや逸脱するので、それらについては適切な文献等を参照していただきたい。

11. むすび

波動問題は、土木工学のなかでは数学理論によって高度な解を求めることが出来る数少ない分野である。最初に述べたように、ニュートン、ラグランジュ、ラプラスなど近代科学の創始者たちも波動問題に関心を寄せていた。本稿では、波動問題の研究の歴史を、その当時の時代背景のもとで理解できるように努めてみた。

どの分野でもそうであるが、研究は時代的要請から孤立したものではない。特に工学の分野では、現実の問題への応用があつて初めて理論が成熟し、発展する。あまりに先鋭的な理論研究は、その価値が十分に理解されずに無視されることがある。ゲルストナのトロコイド波理論はその一例であり、ピアソンほかの方向スペクトル波の屈折計算法は、理論が実務家によって棚上げされた例である。また、ブーシネスク(1871)の研究のように100年以上も利用されなかった場合もある。

研究テーマには流行があり、一つの優れた研究が発表されるとそれに触発された研究が数多く続く。ミッチェル(1893)とマッカワシ(1894)の極限波高の計算はその例である。ただし、テーマの後追いは「労多くして功少なし」である。先に発表された研究を凌駕する成果を挙げることは容易でない。海外のジャーナルの論文査読では、二番煎じの研究はなかなか取り上げてもらえない。研究において最も力を入れるべきところは、理論展開や実験技術に磨きをかけるのではなく、新鮮でかつ応用範囲の広い優れたテーマの発掘である。自らの問題意識を高め、どのようなことの解決が求められているかを探さなければならない。会議の講演集や論文集から研究テーマを借りてきたのでは、研究が完成してもその成果が取り上げられる機会は少ない。研究テーマの発掘は常に頭を悩ますところであるが、その重要性に気づくことが優れた研究成果への第一歩といえよう。

参 考 文 献

- 磯部雅彦(1999): 波の基礎理論, 第35回水工学に関する夏期研修会講義集, 土木学会海岸工学委員会.
伊藤喜行(1969): 防波堤構造論史, 港湾技研資料No.69, 78p.
栗田啓子(1992): 「エンジニア・エコノミストフランス公共経済学の成立」, 東京大学出版会, 305p.
合田良実(1992): 不規則波の研究の流れと展望, 第28回水工学に関する夏期研修会講義集, 土木学会水理工学委員会, pp.B-5-1~20.
合田良実・柿崎秀作(1966): 有限振幅重複波ならびにその波圧に関する研究, 港湾技術研究所報告, 第5巻, 第10号, 57p.
合田良実・鈴木康正(1975): 光型方向スペクトルによる不規則波の屈折・回折計算, 港湾技研資料, No.230, 45p.
合田良実・吉村友司(1971): 海中に孤立した巨大構造物に働く波力の計算, 港湾技術研究所報告, 第10巻, 第4号, pp.3-52.
坂本信雄・井島武士・佐藤昭二・青野 尚(1960): 浅海における風波の図式計算法, 第7回海岸工学講演会講演集, pp.137-147.
鈴木雅次(1932): 「港工学」, 風間書房(1952年増補改訂版)。

- 田中 清・室田 明 (1958): 海岸と港湾の問題, 「応用水理学中 II 応用水理学 (II) (石原藤次郎・本間仁編)」, 丸善, pp.568-569.
- 鶴田千里・久田安夫 (1957): 大型造波水路の設計について, 運輸技術研究所報告, 第7巻, 第11号, pp.253-325.
- 永井康平 (1972): 不規則な海の波の屈折および回折計算, 港湾技術研究所報告, 第11巻, 第1号, pp.3-37.
- 永井康平・堀口孝男・高井俊郎 (1974): 方向スペクトルを持つ沖波の浅海域における伝播の計算について, 第21回海岸工学講演会論文集, pp.437-448.
- 灘岡和夫 (1999): 波動方程式—理論と数値シミュレーション—, 第35回水工学に関する夏期研修会講義集, 土木学会海岸工学委員会.
- 広井 勇 (1920): 「築港 (上)」, 丸善.
- 松尾春雄 (1941): サンフルー公式及其適用, 港湾 第19巻 第1号, pp.67-77, 第2号, pp.50-61.
- H. ラウス・S. インス (高橋 裕・鈴木高明訳): 「水理学史」, 鹿島出版会, 1974年.
- Abbott, M.B., Petersen, H.M., and Skovgaard, O. (1978): Computation of short waves in shallow water, *Proc. 16th Int. Conf. Coastal Engrg.*, Hamburg, ASCE, pp.414-433.
- Airy, G.B. (1845): "Tides and Waves," *Encyclopaedia Metropolitana*, London*.
- Arthur, R.S., Munk, W.H., and Isaacs, J.D. (1952): The direct construction of wave rays, *Trans. American Geophys. Union*, Vol. 33, No. 6.*
- Barailler, L. et. Gaillard, P. (1967): Evolution récente des modèles mathématiques d'agitation due à la houle: Calcul de la diffraction en profondeur non uniforme, *La Houille Blanche*, Vol. 22, No.8, pp.267-275.
- Barber, N.F. (1963): The directional resolving power of an array of wave detectors, *Ocean Wave Spectra*, Prentice-Hall Inc., pp.137-150.
- Bates, C.C. (1949): Utilization of wave forecasting in the invasions of Normandy, Burma, and Japan, *Annals New York Acad. Sciences*, Vol. 51, Art. 3, pp.545-572.
- Bendykowska, G. and Massel, S.R. (1988): On theory and experiment of mechanically generated waves, *Proc. 2nd Int. Symp. on Wave Research and Coastal Engrg.*, Hannover, pp.401-413.
- Berkhoff, J.C.W. (1972): Computation of combined refraction-diffraction, *Proc. 13th Int. Conf. Coastal Engrg.*, ASCE, pp.479-490.
- Biéssé, B. (1951): Study of wave propagation in water of gradually varying depth, *Gravity Waves*, National Bureau of Standard Circular 521, pp.243-253.
- Biéssé, F. (1951): Étude Théorique d'un certain type d'appareil à houle, *La Houille Blanche*, pp.156-165 (続きあり).
- Biéssé, F. et Suquet, F. (1951): Les appareils de houle en laboratoire, *La Houille Blanche*, Vol. 6, Nos. 2, 4, et 5. (translated by St. Anthony Falls Hyd. Lab. Univ. Minnesota, Rept. No. 39).
- Boussinesq, J. (1871): Théorie de l'intumescence liquide appelée onde solitaire ou de translation se propageant dans un canal rectangulaire, *Instut de France, Académie de Science, Comptes Rendus*, Vol. 72, p.755-*.
- Byatt-Smith, J.G.B. (1971): An integral equation for unsteady surface waves and a comment on the Boussinesq equation, *J. Fluid Mech.*, Vol. 49, pp.625-633.
- Chappelear, J.H. (1959): On the theory of the highest waves, *U.S. Army Corps of Engrs., Beach Erosion Board, Tech. Memorandum*, No. 116, 37p.
- Chappelear, J.H. (1961): Direct numerical calculation of wave properties, *J. Geophys. Res.*, Vol. 66, pp.501-508.
- Deacon, G.E.R. (1949): Recent studies of waves and swell, *Annals New York Acad. Sciences*, Vol. 51, Art. 3, pp.475-482.
- Dean, R.G. (1965): Stream function representation of nonlinear ocean waves, *J. Geophys. Res.*, Vol. 70, pp.4561-4572.
- Flick, R.E. and Guza, R.T. (1980): Paddle generated waves in laboratory channels, *J. Wtry, Prt., Coast., and Ocn. Div., Proc. ASCE*, Vol. 106, No. WW1, pp.79-97.
- Fontanet, P. (1961): Théorie de la génération de la houle cylindrique par un batteur plan, *La Houille Branche*, Vol. 16, No. 1, pp.3-31, No. 2, pp.174-197.
- Gaillard, B. (1905): Wave action in relation to engineering structures, *Engineering News*, No. 188, 23 Feb.*
- Goda, Y. (1970): Numerical experiments on wave statistics with spectral simulation, *Port and Harbour Res. Inst.*, Vol. 9, No. 4, pp.3-57.
- Goda, Y. (1997): Recurring evolution of water waves through nonresonant interactions, *Proc. 3rd Int. Symp. on Ocean Wave Measurement and Analysis (WAVES '97)*, ASCE, pp.1-23.
- Gourret, M. (1935): Sur mouvement approche des clapotis: Application au calcul des digues vericales, *Annales Ponts et Chaussées*, Vol. 105, No.16.*
- Havelock, T.H. (1918): Periodic irrotational waves of finite height, *Proc. Royal Soc., Series A*, Vol. 95, pp.38-51.*
- Hiroi, I. (1919): On a method of estimating the force of waves, *Memoirs of Engrg. Faculty, Imperial Univ. Tokyo*, Vol. X, No. 1, p.19.

- Johnson, J.W. (1951): Generalized wave diffraction diagrams, *Proc. 1st Conf. Coastal Engrg.*, Long Beach.*
- Johnson, J.W., O'Brien, M.O., and Isaacs, J.D. (1948): *Graphical Construction of Wave Diffraction Diagrams*, U.S. Hydrographic Office, U.S. Navy Department, Pub. No. 605.*
- Karlsoun, T. (1969): Refraction of continuous ocean wave spectra, *Proc. ASCE*, Vol. 95, No. WW4, pp.471-490.
- Korteweg, D. J. and de Vries, G. (1895): On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves, *Phil. Mag. Series 5*, Vol. 39, pp.422-443.
- Laiton, E.V. (1960): The second approximation to cnoidal and solitary waves, *J. Fluid Mech.*, Vol. 9, pp.430-444.
- Lamb, H. (1932): *Hydrodynamics* (6th Ed.), Cambridge Univ. Press., 738p.
- Levi, E. (1995): *The Science of Water*, ASCE, New York, 649p.
- Levi Civita, T. (1925): Détermination rigoureuse des ondes permanentes d'amplitude finie, *Mathematische Annalen*, Vol. 93, pp.264-314.
- Longuet-Higgins, M.S. (1952): On the statistical distribution of the heights of sea waves, *J. Marine Res.*, Vol. IX, No. 3, pp.245-266.
- Longuet-Higgins, M.S. (1957): The statistical analysis of a random, moving surface, *Phil. Trans. Roy. Soc., Series A* (1966), Vol. 249, pp.321-387.
- Longuet-Higgins, M.S. (1975): On the joint distribution of the periods and amplitudes of sea waves, *J. Geophys. Res.*, Vol. 80, No. 18, pp.2688-2694.
- Longuet-Higgins, M.S., Cartwright, D.E., and Smith, N.D. (1963): Observation of the directional spectrum of sea waves using the motions of a floating buoy, *Ocean Wave Spectra*, Prentice-Hall Inc., pp.111-132.
- MacCamy, R.C. and Fuchs, R.A. (1954): Wave forces on piles: A diffraction theory, *U.S. Army Corps of Engrs., Beach Erosion Board, Tech. Memorandum*, No. 69, 17p.
- McCowan, J. (1891): On the solitary wave, *Phil. Mag. Series 5*, Vol. 32, pp.45-58.
- McCowan, J. (1894): On the highest wave of permanent type, *Phil. Mag. Series 5*, Vol. 38, pp.351-358.
- Miche, M. (1944): Mouvements ondulatoires de la mer on profondeur constante of décroissante, *Annales Ponts et Chaussées*, Vol.121, No.3.*
- Mitchell, J. H. (1893): The highest waves in water, *Phil. Mag. Series 5*, Vol. 36, pp.430-437.
- Morison, J.R. (1951): Design of piling, *Proc. 1st Conf. Coastal Engrg.*, Long Beach, pp.149-154.
- Morison, J.R., O'Brien, M.P., Johnson, J.W., and Schaaf, S.A. (1950): The force exerted by surface waves on piles, *Petroleum Trans.*, American Inst. Mining and Metal Engrs., Vol. 189, pp.149-154.*
- Munk, W. H. (1949): The solitary wave theory and its application to surf problems, *Annals New York Acad. Sciences*, Vol. 51, Art. 3, pp.376-424.
- Nwogu, O. and Mansard, E.P.D. (1994): Time-domain simulation of directional wave propagation into harbours, *Proc. HYDRO-PORT '94*, Port and Harbour Res. Inst., Yokosuka, pp.243-265.
- Penney, W.G. and Price, A.T. (1944): Diffraction of sea waves by breakwaters, *Directorate of Miscellaneous Weapons Development, Technical History* No. 26, Artificial Harbours, Sec. 3-D.*
- Penney, W.G. and Price, A.T. (1952): Finite periodic stationary gravity waves in a perfect liquid., *Phil. Trans.*, Series A, Vol. 224, pp.254-284.
- Peregrine, D.H. (1966): Calculations of the development of an undular bore, *J. Fluid Mech.*, Vol. 25, pp.321-330.
- Peregrine, D.H. (1967): Long waves on a beach, *J. Fluid Mech.*, Vol. 27, pp.815-827.
- Pierson, W.J., Jr., Tuttle, J.J., and Woolley, J.A. (1952): The theory of the refraction of a short crested Gaussian sea surface with application to the northern New Jersey coast, *Proc. 3rd Conf. on Coastal Engrg.*, pp.86-108.
- Radder, A.C. (1979): On the parabolic equation method for water-wave propagation, *J. Fluid Mech.*, Vol. 95, pp.159-176.
- Rankin, W. J. M. (1863): On the exact form of waves near the surface of deep water, *Phil. Trans.*, pp.127-138.
- Rayleigh, Lord (1876): On waves, *Phil. Mag. Series 5*, Vol. 1, pp.257-279.
- Rayleigh, Lord (1877): On progressive waves, *Proc. London Math. Soc. Series 1*, Vol. 1, pp.21-26.
- Rayleigh, Lord (1917): On periodical irrotational waves at the surface of deep water, *Phil. Mag. Series 6*, Vol. 32, pp.381-389.*
- Russel, J.S. (1844): Report on waves, *Report on the XIV meetings of the British Association of the Advancement of Science*, York.*
- Sainflou, G. (1928): Essai sur les digues maritimes, verticales, *Annales Ponts et Chaussées*, Vol. 98, No.4.*
- Skjelbreia, L. and Hendrickson, J. (1960): Fifth order gravity wave theory, *Proc. 7th Conf. Coastal Engrg.*, Hague, pp.184-196.

- Skjelbreia, L. and Hendrickson, J. (1960): *Fifth Order Gravity Wave Theory with Tables of Functions*, National Engineering Science Co., Pasadena, Calif., 424p.
- Stokes, G. G. (1847): On the theory of oscillatory waves, *Camb. Trans.*, Vol. VIII, Part IV, pp.442-455
- Stevenson, Th. (1886): *The Design and Construction of Harbours*, (3rd Ed.), Adam & Charles Black.*
- Sverdrup, H.U. and Munk, W.H. (1946): Empirical and theoretical relations between wind, sea, and swell, *Trans. American Geophys. Union*, Vol. 27, No. 6, pp.823-827.
- Sverdrup, H.U. and Munk, W.H. (1947): *Wind, Sea and Swell; Principles for Forecasting*, U.S. Hydrographic Office, U.S. Navy Department, Pub. No. 601.
- Tadjibaksh, I. and Keller, J.B. (1960): Standing surface waves of finite amplitude, *J. Fluid Mech.*, Vol. 8, pp.442-451.
- Tick, L.J. (1963): Nonlinear probability models of ocean waves, *Ocean Wave Spectra*, Prentice-Hall Inc., pp.163-169.
- U.S. Hydrographic Office, U.S. Navy Department (1944): *Breakers and Surf: Principles in Forecasting*, H.O. Pub. No. 234.*
- Wilson, B.W. (1955): Graphical approach to the forecasting of waves in moving fetches, *U.S. Army Corps of Engrs., Beach Erosion Board, Tech. Memorandum*, No. 73.
- Yamada, H. (1957a): Highest waves of permanent type on the surface of deep water, *Rep. Res. Inst. Applied Mech.*, Kyushu Univ., Vol. V, No. 18, pp.37-52.
- Yamada, H. (1957b): On the highest solitary wave, *Rep. Res. Inst. Applied Mech.*, Kyushu Univ., Vol. V, No. 18, pp.53-67.
- Yamada, H., Kimura, G., and Okabe, J. (1968): Precise determination of the solitary wave of extreme height on water of a uniform depth, *Rep. Res. Inst. Applied Mech.*, Kyushu Univ., Vol. XVI, No. 52, pp.15-32.
- Yamada, H. and Shiotani, T. (1968): On the highest water waves of permanent type, *Bull. Disaster Prevention Res. Inst.*, Kyoto Univ., Vol. 18, Pt. 2, No. 135, pp.1-22.
- Zabusky, N. J. and Galvin, C. J. (1971): Shallow-water waves, the Korteweg-deVries equation and solitons, *J. Fluid Mech.*, Vol. 47, pp.811-824.

* 注：この記号付きの文献は他からの引用であり，内容については確認していない。なお，19世紀～20世紀前半の文献のかなりのものは，大学間の図書館サービスによって入手できることを付記する。