波動方程式　— 理論と数値シミュレーション —

Wave Equations　— Theory and Numerical Simulation —

灘　岡　和　夫

Kazuo Nadaoka

1．はじめに

水の波の波動方程式に関しては，最近様々な研究の展開が見られるようになっている．概略的にいうと，緩勾配方程式に代表される線形波動方程式の研究がほぼ一段落してきたと同時に，Boussinesq 方程式に代表される非線形分散性波動方程式の研究が進み，現在ではその応用研究が盛んになってきている．それと並行して，浅い波に対する方程式としての Boussinesq 方程式の原理的な制約を乗り越えるべく，全く異なった発想に基づいて新たな波動方程式を導く試みもなされるようになっている．また，実用上重要となる砕波現象をモデル化し，波動方程式系に取り込む試みも，いくつか行われるようになっている．

本稿では，大学院生ないしは若手の技術者を主たる対象として，波動方程式論の基礎と最近の研究の進展のポイントを講義することを念頭に置いているので，これらの一連の波動方程式に関する研究発展をたんに網羅的に記述するのではなく，いくつかの代表的な波動方程式を導出する際の基本的な考え方とそれによって帰結する方程式の適用限界や基本的な特徴について重点的に述べることにする．なお，本稿では，様々な波動方程式を，波高やエネルギーといったグロスな変量を求める **phase-averaged model（位相平均型モデル）** と，一波内の水位や流速等の時空間的な変化まで記述する **phase-resolving model（位相分解型モデル）** に大別したとき(例えば，Battjes 1994)，主として後者を対象として議論をすすめる．また，境界積分法等による波動場の解析手法はここでは対象としない。

2．線形波動方程式

2.1　緩勾配方程式と数値波動解析法

1972 年の第 13 回国際海岸工学会議(ICCE)に注目すべき２つの論文が発表された．一つは有名な Berkhoff (1972)の緩勾配方程式に関する論文で，もう一つは，Ito & Tanimoto (1972)による数値波動解析法に関する論文である．後者は，ほぼ同じ年に海岸工学講演会論文集にも発表され（伊藤・谷本; 1971,1972），その後，その改良版が谷本・小舟(1975)によって報告されている．これらは，いずれも，波動モデル開発の歴史の上で特筆すべき論文である．

Berkhoff (1972)の**緩勾配方程式(Mild-slope equation)**は，

$$\nabla\cdot(cc_g\nabla\hat{\eta})+k^2cc_g\hat{\eta}=0 \tag{1}$$

で与えられる．ここで，η を自由表面の変位としたとき $\eta=\hat{\eta}(x,y)\exp(i\sigma t)$ であり，$\hat{\eta}$ ：角周波数 σ の定常波

動場の各場所での自由表面変動振幅，$\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$である．また，上式中の$k$と$c$, c_gは，角周波数σと各地点での水深hに対応して，線形分散関係式（式(10)）で決まる各地点での波数および波速，群速度である．この波動方程式は，例えば，同じく角周波数σの定常波動場を対象とする**ヘルムホルツ方程式**，

$$\nabla^2 \hat{\eta} + k^2 \hat{\eta} = 0 \tag{2}$$

が一様水深領域での回折現象しか取り扱えないのに対して，浅水変形や屈折現象も扱うことができ，緩勾配仮定を満たす範囲（実用上，勾配 1/3 以下）で任意の地形条件に適用できる．（ヘルムホルツ方程式(2)は，水深一様の特別な場合として緩勾配方程式(1)に含まれる．）このようないくつかの重要な長所を兼ね備えたものであることから，Berkhoff (1972)の緩勾配方程式は，その後の波動モデル研究や様々な応用面において，極めて重要な位置を占めることになった．しかし，この緩勾配方程式は，数値計算上の多少の難点があることも知られている．それは，この方程式が，波動場の定常的なバランス状態を示したもので，数学上の形式でいうと楕円型に属するものであることから，境界条件の与え方など，数値計算上扱いにくい点があるからである．

このような難点を克服するために考案された方法の一つとして，Berkhoff (1972)の緩勾配方程式(1)を放物型の方程式に変換する手法がある．これは，波の主たる伝播方向の存在が想定できる場合に，緩勾配方程式を変形して主伝播方向成分と逆行成分のそれぞれを表す因子に分解し，主伝播方向成分の因子のみを取り出すものである．そうやって得られた波動方程式を**放物型波動方程式**というが，これによれば，沖から岸に一方向的に計算を行えるので，計算時間を大幅に短縮することができる．放物型波動方程式を得るための具体的な定式化にはいくつかの手法が提案されており，さらに，流れや砕波，非線形性の効果の組み込みや，曲線座標系の導入による波向き角の大変形の対処法など，様々な試みがなされている．ここでは，最も有名な Radder (1979)によるものを以下に示す．

$$A_x - i(k - k_0)A + \frac{(kcc_g)_x}{2kcc_g}A - \frac{i}{2kcc_g}\left(cc_g A_y\right)_y = 0 \tag{3}$$

上記の Berkhoff (1972)の緩勾配方程式の数値計算上の難点を克服するためのもう一つの方法は，定常波動場を記述する楕円型の波動方程式ではなく，波動場の時間発展を記述する双曲型の波動方程式を導くことである．Berkhoff (1972)の緩勾配方程式とほぼ同時期に発表された，上記の伊藤・谷本(1971,1972)，谷本・小舟(1975)の**数値波動解析法**は，そのような時間発展型の波動方程式を，任意水深に適用可能な波動方程式としてはじめて提案したもので，先駆的かつ重要な研究として位置づけるべきものである．以下にこの数値波動解析法による方程式系を示す（$\boldsymbol{Q}$は線流量ベクトル）．

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{Q} = 0 \tag{4a}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial t} + c^2 \nabla \eta = 0 \tag{4b}$$

しかし，この数値波動解析法には一つの重大な欠陥がある．それは，この方程式ではエネルギー保存が満たされない，ということである．このことを，緩勾配方程式と比較する形で以下に具体的に見てみよう．

いま，緩勾配方程式(1)の$\hat{\eta}$を複素数として扱い，その共役複素数を$\hat{\eta}^*$と記して式(1)にかけると，

$$\nabla \cdot (cc_g \hat{\eta}^* \nabla \hat{\eta}) - cc_g \nabla \hat{\eta} \nabla \hat{\eta}^* + k^2 cc_g \hat{\eta}^* \hat{\eta} = 0 \tag{5}$$

となる．ここで，$\mathrm{Im}\{\hat{\eta}^* \hat{\eta}\} = 0$，$\mathrm{Im}\{\nabla \hat{\eta} \nabla \hat{\eta}^*\} = 0$ であることに注意すると，上式の虚数部から，

$$\mathrm{Im}\{\nabla \cdot (cc_g \hat{\eta}^* \nabla \hat{\eta})\} = 0 \tag{6}$$

が得られる．ここで，$\hat{\eta} = a \exp\left(i \int \boldsymbol{k} \cdot d\boldsymbol{x}\right)$ として上式に代入すると，

$$\mathrm{Im}\{\nabla \cdot (cc_g \hat{\eta}^* \nabla \hat{\eta})\} = \nabla\left(cc_g k a^2\right) = \nabla\left(\sigma c_g a^2\right) = \nabla\left(c_g a^2\right) \tag{7}$$

となって，これから，定常波浪場でのエネルギー保存則が満たされていることがわかる．

これに対して，数値波動解析法に対して同様な解析を行うと，

$$\mathrm{Im}\{\nabla \cdot (c^2 \hat{\eta}^* \nabla \hat{\eta})\} = \nabla\left(c^2 k a^2\right) = \nabla\left(\sigma c a^2\right) = \nabla\left(c a^2\right) \tag{8}$$

となる．すなわち，数値波動解析法においてはエネルギー保存則は満たされていない．それは，数値波動解析法では波の浅水変形が正しく評価できないことを意味している．そのため，伊藤・谷本 (1972)はその補正法を示しているが，方程式自体に内在するこの欠点はこの方程式の本質的なレベルでの欠陥というべきもので，このことからこの方程式は，その先駆的な価値にも関わらず，残念ながらその後の波動モデル研究の歴史において，かげが薄いものとなってしまったのである．

2.2 非定常緩勾配方程式

その後，1980 年代の前半になって，Berkhoff (1972)の緩勾配方程式を双曲型の時間発展方程式系に書き換えた波動モデルが，西村ら(1983)と渡辺・丸山(1984)によって相次いで発表された．これらは**非定常緩勾配方程式**と呼ばれ，互いにほぼ同型であるが，ここでは渡辺・丸山(1984)によるものを以下に示す．

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{Q} = 0 \tag{9a}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial t} + \frac{1}{n} c^2 \nabla (n \eta) = 0 \tag{9b}$$

これは Berkhoff (1972)の緩勾配方程式(1)に比べて，開境界条件の取扱いや式中への砕波減衰項の組み込みが容易に行えるという利点があり，様々な応用が試みられている．

2.3 波動方程式の分散性

数値波動解析法や非定常緩勾配方程式のような時間発展型波動方程式では，数値計算としては当然非定常計算を行うことになるが，ただし，後で詳しく述べるように，変形を伴う波浪場の非定常過程を直接表現出来るわけではなく，非分散性波動場としての計算となる．ここで，波動方程式の分散性，ということについて，少し詳しく見ておくことにしよう．

いうまでもなく，水の波を他の音波や地震波（P波，S波）などの波動現象と比べたときの著しい特徴は，水の波が分散性を有することにある．すなわち，水の波の波速 c は，波数 k（あるいは波長 L）ないしは角周波数σ（あるいは周期 T）によって異なり，次の分散関係式を満たす．

$$c^2 = \frac{g}{k} \tanh kh \tag{10}$$

しかし，物理現象として水の波が分散性を有する，ということと，ある波動方程式がそのような分散性を直接表現できるかどうかということは別問題である．実際，今まで提案されている波動方程式には，波の分散性を直接表現できない，いわゆる**非分散性波動方程式**となっている場合が少なからずあり，上記の数値波動解析法や非定常緩勾配方程式も非分散性波動方程式である．これに対して，水の波の分散性をたとえ厳密にではないにせよ，何らかの形で直接表現できるものを**分散性波動方程式**という．（数値波動解析法（式(4)）や非定常緩勾配方程式（式(9)）の中に含まれる波速 c は，緩勾配方程式の場合と同様に，角周波数σと各地点での水深 h に対応して，分散関係式(10)で決まる値であるが，そのことと，これらの方程式が分散性を持つかどうかということとは無関係であって，混同してはならない．）

ここでは，このことを具体的に見てみるために，非定常緩勾配方程式(9)を例にとってその分散性について調べてみよう．いま簡単のため，局所的な水平床を仮定し，次式で表される一様波列を考える．

$$\eta = A \exp\left\{i\left(k^* x - \sigma^* t\right)\right\} \tag{11.a}$$

$$Q = \hat{Q} \exp\left\{i\left(k^* x - \sigma^* t\right)\right\} \tag{11.b}$$

ここで，上式において，波数と角周波数をそれぞれ k^*やσ^*と標記しているのは，非定常緩勾配方定式中に含まれる波速 c に対応する波数 k や角周波数σと区別するためで，この k^*やσ^*は，任意の波数，角周波数パラメータである．式(11)を式(9)に代入すると，

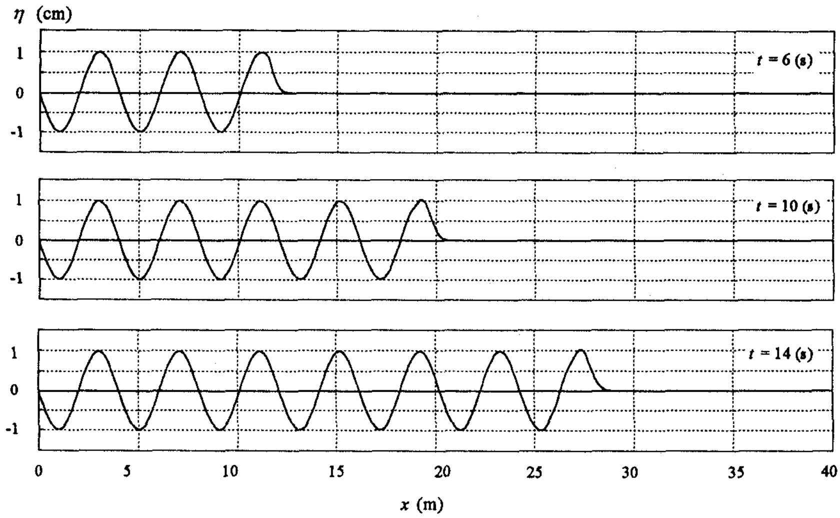
$$\begin{bmatrix} -\sigma^{*2} & k^{*2} \\ c^2 k^{*2} & -\sigma^{*2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A \\ \hat{Q} \end{bmatrix} = 0 \tag{12}$$

となり，これから，上式が有意な解を持つための条件として，次の特性方程式が得られる．

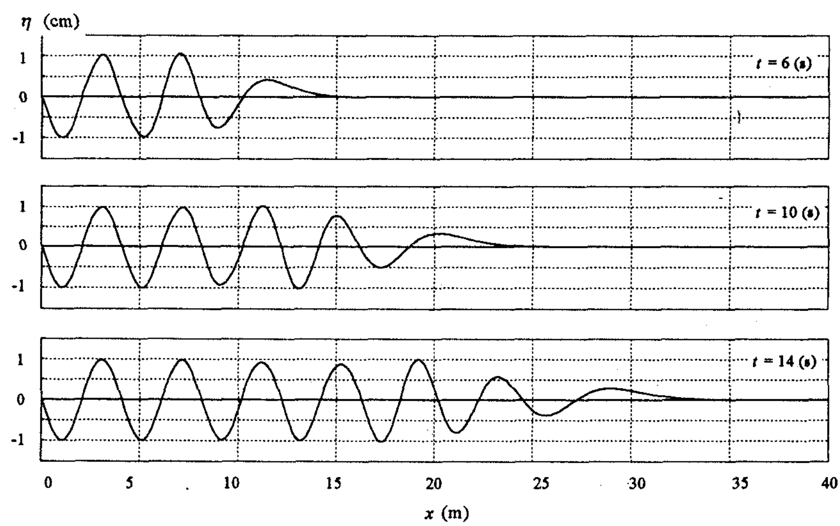
$$\frac{\sigma^{*2}}{k^{*2}} \left(= c^{*2}\right) = c^2 \tag{13}$$

上式は，例えば波数 k^*をある値に指定したときに，波速 c^*が一定になるように角周波数σ^*が決まり，しかもその波速 c^*の値が非定常緩勾配方程式(9)中の波速 c に等しくなることを意味している．上式のように，任意の波数 k^*とそれに対応する角周波数σ^*（あるいはその逆）の関係を与える関係式を，その波動方程式の分散関係式という．上式の場合には，どのような角周波数σ^*あるいは波数 k^*に対しても，波速 c^*が一定になるので，波動方程式としては非分散ということになる．このような事情は，数値波動解析法に関しても全く同じである．

ここで，このような非分散性波動方程式を用いた場合，本来物理的には分散性を有する水の波の時間発展計算がどのようになるかを，ごく簡単な計算例によって見てみよう．**図－1 (a)**は，水深一定の１次元水路の左端において，時刻 t=0 からある一定の周期の規則波を入射させた場合の非定常緩勾配方程式(9)による



図－1 (a)　規則波造波問題に関する非定常緩勾配方程式(9)による計算結果



図－1 (b)　規則波造波問題に関する線形狭帯域波動方程式(34)による計算結果

計算結果を示したものである．これからわかるように，非定常緩勾配方程式では，時間が経過しても正弦波形が保たれたまま伝播する形になる．しかし実際の物理過程としてはこのような伝播形態にはならない．というのも，波列の先端領域では，水の波に分散性によって長波長成分がより早く伝播し短波長成分が相対的に遅く伝播するために，時間が経つにつれて次第に先端部分の正弦波列の形がくずれ，波形が引き延ばされた形態になっていくはずだからである（無限ににつづく規則波列と異なり，有限長の波列の先端部は，一様部分の波数に対応するスペクトル成分だけでなく，様々な波数のスペクトル成分が含まれることに注意せよ．）比較のために示した**図－１(b)**は，後で示す**線形狭帯域波動方程式**(34)による計算結果であるが，この場合には，上記のような特徴が明瞭に表現されていることがわかる．このように，非定常緩勾配方程式のような非分散性の波動方程式では，あらゆる波数成分がすべて方程式中の波速 c で伝播するために，波形が

変化しない．したがって，このような非分散性波動方程式では，不規則波を直接表現できないだけでなく，規則波を入射する場合においても，上記の例のような過渡過程的な計算では，波動場の時間発展を正しく表現することが出来ない．

同じ時間発展型の緩勾配方程式でも，Smith & Sprinks (1975)は，この分散性の面で非定常緩勾配方程式(9)とは大きく異なった性質を持つ方程式を示している．これは「**非定常分散性緩勾配方程式**」とでも称すべきもので，以下のように表される．

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + \sigma^2 \left(\frac{c - c_g}{c} \right) \eta - \nabla \left(c c_g \nabla \eta \right) = 0 \tag{14}$$

上式の分散性を見てみるために，式(11.a)を代入すると，次式で示される分散関係式を得ることができる．

$$\sigma^{*2} = \sigma^2 \left(\frac{c - c_g}{c} \right) + c c_g k^{*2} \tag{15.a}$$

あるいは，

$$\frac{c^*}{c} = \left\{ \frac{k^2}{k^{*2}} \left(1 - \frac{c_g}{c} \right) + \frac{c_g}{c} \right\}^{\frac{1}{2}} \tag{15.b}$$

これからわかるように，式(14)は，波数 k^*によって波速 c^*が異なる性質，すなわち分散性を有していることがわかる．そして，波数 k^*が波動方程式(14)中のσに対応する k に等しいとき，波速 c^*も方程式中の c に等しくなる．さらに，式(15.a)を波数 k^*で微分することにより，

$$c_g^* = \frac{d\sigma^*}{dk^*} = \frac{c}{c^*} c_g \tag{16}$$

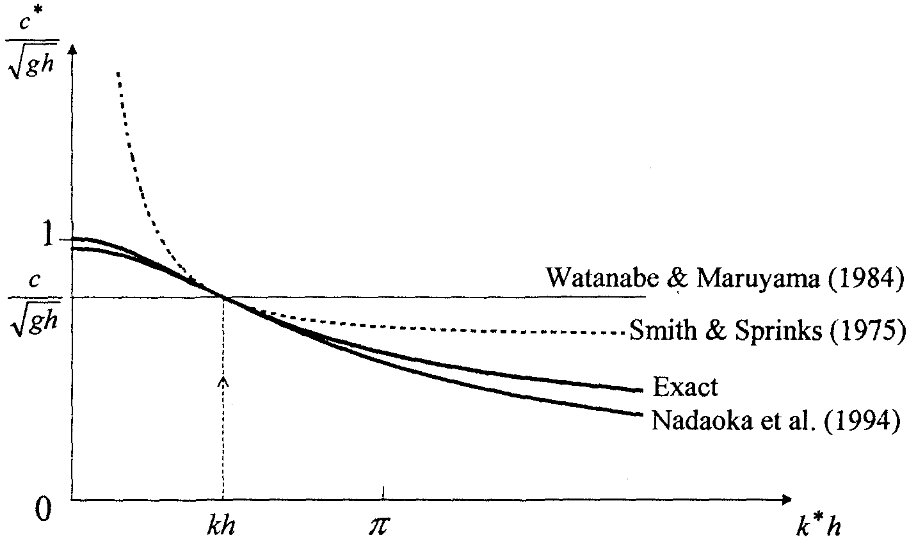
となることから，$c^* = c$ のときに，$c_g^* = c_g$ となることもわかる．

図－2は，これらのことを図式的に示したもので，縦軸に長波の波速で無次元化した波速，$c^* / \sqrt{gh}$，横軸に無次元波数 $k^* h$ をとって，式(15)で示されるこの波動方程式の分散曲線を，理論的な分散関係式，

$$\frac{c^*}{\sqrt{gh}} = \left(\frac{1}{k^* h} \tanh k^* h \right)^{\frac{1}{2}} \tag{17}$$

（これは先の式(10)を c^*と k^*に関して無次元形で示したもの）とともに表している．これからわかるように，この Smith & Sprinks (1975)の非定常分散性緩勾配方程式の分散曲線は，k^*=k のときに，理論的な分散曲線に接する形で（すなわち上記のように群速度も一致する形で）一致することがわかる．（**図－２**中のもう一つの分散曲線については後述する．）このように，この方程式の分散特性が，波数 k のまわりで理論的な分散関係式を良く近似できるということは，対象とする波動場のスペクトルが，波数 k のまわりに集中したいわゆる**狭帯域スペクトル場**であれば，**不規則波の直接計算も可能**であることを意味している．このことは実用上きわめて大きな利点である．というのも，非定常緩勾配方程式のような非分散性波動方程式不規則波計算を行う場合には，対象とする波動場の各スペクトル成分ごとに別々に計算し，すべての成分の計算結果を再合成するという面倒な手順を必要とするからである．

この Smith & Sprinks (1975)の非定常分散性緩勾配方程式に類似した方程式は，その後，窪ら (1991)や Kirby



図－2　いくつかの線形波動方程式に関する分散曲線

et al. (1992)等によっても提案されており，さらに，上記の分散曲線の近似範囲を広げることによって方程式の分散特性の向上を図る試みが磯部 (1993)によって行われているが，Smith & Sprinks (1975)に代表されるこれらの非定常分散性緩勾配方程式には，一つの大きな問題点が存在する．それは，その分散特性が，式(15.b)や**図－2**に示されるように，長波極限 $kh \to 0$ で無限大に発散する形になることである．そのため，対象とする波動場に長波成分が含まれる場合には，計算が不可能ないしは不合理な結果を与えることになる．実際，Cauchy-Poisson 波のようにスペクトル成分に有意な大きさの長波成分が含まれるケースの計算では，計算が発散することが確認されている．また，先の**図－1**の例でも，ここでは示さないが，波列先端部に長波長成分を含むため，不合理な計算結果しか得られていない．

2.4 水深積分法の観点から見た波動方程式の導出過程

ここで，波動方程式，特に時間発展型の波動方程式の導出過程についてある程度詳しく見てみることにしよう．まず，連続式

$$\nabla u + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{18}$$

を海底面（$z=-h$）から $z=0$ まで水深積分する．

$$\int_{-h}^{0}\left(\nabla u + \frac{\partial w}{\partial z}\right)dz = \nabla \cdot \int_{-h}^{0} u dz - \left(u\big|_{z=-h}\nabla h + w\big|_{z=-h}\right) + w\big|_{z=0} = 0 \tag{19}$$

（上式の展開で，水平微分と積分記号の入れ替えの際に，いわゆるライプニッツ・ルールを用いていることに注意．）ここで，海底面と水表面での境界条件式，

$$\left(u\big|_{z=-h}\nabla h + w\big|_{z=-h}\right) = 0, \quad w\big|_{z=0} = \eta_t \tag{20}$$

を用いると，上式は次のように書ける．

$$\frac{\partial \eta}{\partial t}+\nabla \cdot \boldsymbol{Q}=0 \tag{21}$$

ここに，$\boldsymbol{Q}$は，次式で定義される線流量である．

$$\boldsymbol{Q}=\int_{-h}^{0} \boldsymbol{u} dz \tag{22}$$

次に，線形化された運動方程式（Eulerの式）

水平方向： $$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}=-\frac{1}{\rho} \nabla p \tag{23.a}$$

鉛直方向： $$\frac{\partial w}{\partial t}=-g-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \tag{23.b}$$

を同様に水深方向に積分することを考える．まず鉛直方向の運動方程式(23.b)をzから0まで積分し，水表面での力学的条件式，$\left.p\right|_{z=0}=0$，を用いることにより，次式が得られる．

$$\frac{p}{\rho}=g(\eta-z)+\int_{z}^{0} \frac{\partial w}{\partial t} dz \tag{24}$$

ここで，上式の右辺第２項を評価するために，まず任意のzでの鉛直流速wを，ふたたび連続式(18)を用いることにより評価する．すなわち同式を海底面（$z=-h$）からzの間で積分することにより，次式が得られる．

$$w=-\nabla \cdot \int_{-h}^{z} \boldsymbol{u} dz \tag{25}$$

（ここで，ふたたび海底面での境界条件式(20)を用いていることに注意．）上式を式(24)に代入して，

$$\frac{p}{\rho}=g(\eta-z)-\frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \int_{z}^{0} \int_{-h}^{z} \boldsymbol{u} dz' dz \tag{26}$$

さて，ここで，水平流速ベクトル$\boldsymbol{u}$が，鉛直依存性関数Fを用いて，次式のように近似できるものとしよう．

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_0(x, y, t) F(z ; k, h) \tag{27.a}$$

ここに，

$$F(z ; k, h)=\frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \tag{27.b}$$

上式を，まずwに関する式(25)に代入すると，

$$w=-\nabla \cdot\left[\frac{\sinh k(h+z)}{k \cosh kh} \boldsymbol{u}_0(x, y, t)\right] \tag{28}$$

また，圧力pに関する式(26)に代入すると次式を得る．

$$\frac{p}{\rho}=g(\eta-z)-\frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\left[\frac{1-F}{k^2}u_0(x,y,t)\right] \tag{29}$$

いま，局所的に水平床の場合を考えて，さらに，

$$u_0=\hat{u}_0\exp\{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\sigma t)\} \tag{30}$$

で表される規則波列を対象にすると，圧力pは，通常の微小振幅波理論で与えられるのと同じ，

$$\frac{p}{\rho}=-gz+g\eta F(z;k,h) \tag{31}$$

で表されることになる．

この式(31)で与えられる圧力pの表現を水平方向の運動方程式(23.a)に代入し，zに関して全水深にわたって積分すると，

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{-h}^{0}u\,dz=\frac{\partial Q}{\partial t}=-\int_{-h}^{0}\nabla\cdot\{-gz+g\eta F\}dz=-g\int_{-h}^{0}\nabla\cdot(\eta F)dz \tag{32}$$

を得る．ここで，ふたたび局所的に水平床の場合を想定すると，上式は次のようになる．

$$\frac{\partial Q}{\partial t}=-g\int_{-h}^{0}F\,dz\nabla\eta=-c^2\nabla\eta$$

すなわち，

$$\frac{\partial Q}{\partial t}+c^2\nabla\eta=0 \tag{33}$$

この式(33)と先の式(21)とで数値波動解析法の方程式系が構成される．

このように，数値波動解析法は，もとの３次元空間$(x,\ y,\ z)$上で定義された連続式(18)と運動方程式(23)を水深積分することによって導出することが出来る．しかし，得られた方程式系は，先に見たように，エネルギー保存を満足しない，という基本的な難点が存在する．それでは，この導出過程のどこに問題があって，このような難点が生じたのであろうか？そのポイントは，出発点としての基礎方程式が運動方程式であって，エネルギー保存式ではない，という点にある．すなわち，エネルギー保存型の波動方程式を得るには，運動方程式を単純に積分するのではなく，それなりの工夫が必要になる．

いま，運動方程式を積分する際，流速$\boldsymbol{u}$をかけてから断面積分することを考える．この$\boldsymbol{u}$は式(27.a)に示すように，ここでは$u_0(x,y)$と$F(z)$の積で表されるものとしているので，この流速$\boldsymbol{u}$をかけてから断面積分する操作は，鉛直依存性関数$F(z)$をかけて断面積分する操作と等価になる（$u_0(x,y)$は断面積分の際に積分記号の外に出るのでその後の数式展開に無関係になる）．ところで，そもそも運動方程式に流速$\boldsymbol{u}$をかけて積分する操作は，断面積分型のエネルギー保存則を導く操作に対応している．したがって，運動方程式に鉛直依存性関数$F(z)$をかけて断面積分することにより，エネルギー保存型の運動方程式が得られることになる．非定常緩勾配方程式(9)は，このような背景によって求められたものである．

しかし，すでに見たように，非定常緩勾配方程式(9)も，まだそれが非分散性の波動方程式になっている，という点において問題を残している．そこで，先の断面積分型の定式化の過程をふりかえって，どこにそのポイントがあるのか検討してみよう．一般に，水の波の分散性は，圧力場の静水圧分布からのずれ，あるいはそれに対応するものとして流線曲率の効果の観点から論じられる．そのことを踏まえて，先の圧力分布表現に関する式(29)と(31)を見てみよう．式(29)と式(31)を比べたときの最も大きな違いは，前者が，u_0の時空

間的な変化率によって静水圧からのずれ分を評価しているのに対し，後者では，それを波数kと各周波数σの規則波に対応する圧力場表現に固定している点にある．したがって，後者の圧力場表現による限り，静水圧からのずれの効果したがって分散性の現れ方は，この波数kと各周波数σの規則波に対応するものに固定されてしまうことになる．数値波動解析法や非定常緩勾配方程式が最終的に非分散の形の波動方程式になってしまっているのは，基本的にこの部分に原因がある．

2.5 水深積分法による分散性波動方程式の導出

それでは，先の導出過程で，圧力場表現を式(29)の形のままで残し，その後の定式化を行ったらどうなるであろうか．もちろん，先に議論したように，エネルギー保存型の方程式にするためには，運動方程式の断面積分の際に，鉛直依存性関数$F(z)$をかけて積分する必要があることは言うまでもない．

具体的には，式(29)の圧力表現を水平方向の運動方程式に代入し，それに鉛直依存性関数$F(z)$をかけたものに対して，zに関して全水深にわたって積分すると，最終的に次式を得る．

$$cc_g\frac{\partial \boldsymbol{u}_0}{\partial t}+c^2\nabla(g\eta)=\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{c(c-c_g)}{k^2}\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{u}_0)+\nabla\left[\frac{c(c-c_g)}{k^2}\right](\nabla\cdot\boldsymbol{u}_0)\right\} \tag{34.a}$$

これと，連続式の断面積分形である式(21)を，線流量$\boldsymbol{Q}$ではなく$\boldsymbol{u}_0$で表した

$$\frac{\partial \eta}{\partial t}+\nabla\cdot\left(\frac{c^2}{g}\boldsymbol{u}_0\right)=0 \tag{34.b}$$

によって波動方程式系が構成される．この方程式系は，後で示す非線形狭帯域波動方程式の線形版（「**線形狭帯域波動方程式**」）になっているが，その分散性を，先の非定常緩勾配方程式の場合と同様のやり方で調べると，次の分散関係式が得られる．

$$\frac{c^*}{c}=\left\{\frac{k^{*2}}{k^2}\left(1-\frac{c_g}{c}\right)+\frac{c_g}{c}\right\}^{-\frac{1}{2}} \tag{35}$$

これは，**図－２**にも示しているように，Smith & Sprinks (1975)の非定常分散性緩勾配方程式の分散関係式(15)とかなり異なっている．最も重要な相違点は，非定常分散性緩勾配方程式の場合と違って，長波極限で無限大に発散するといった難点が，この線形狭帯域波動方程式の場合には見られないという点である．また，理論分散関係式に対する近似範囲もこの方程式の方が少し広くなっている．

また，先の**図－１(b)**では，この線形狭帯域波動方程式による計算結果を示しているが，これから，特に波列の先端領域で波の分散性が現れる様子が良好に表現できていることがわかる．

2.6 多成分連成法による広帯域分散性波動方程式

上記のように，線形狭帯域波動方程式では，非定常分散性緩勾配方程式での基本的な制約である分散性に関して，長波極限での特異性を含まない形で表現することが出来る．しかし，やはり対象とする波動場が，その名の通り狭帯域スペクトル場でなければならない，という大きな制約が残されている．そこで，線形波動方程式に関するこの章の最後の節として，この制約のない任意のスペクトル場に適用可能な波動方程式，すなわち**線形広帯域波動方程式**について論じてみる．

数学的な操作という観点から水の波に関する波動方程式の導出過程を見てみると，それは，一般的に，流

速場に関する鉛直(z)方向依存性に関して何らかの仮定を導入することによって，ベースとなる３次元空間(x,y,z)上で定義された基礎方程式系を平面２次元空間(x,y)上の方程式に変換する操作と見ることが出来る．灘岡・中川(1991,1993a)はこのことに着目し，下記のように数個の鉛直依存性関数 $F_m(z)$を連成させる形の流速場表現法(多成分連成法; multi-term coupling method)に基づく新たな波動方程式系を導いた．

$$u(x,y,z,t)=\sum_{m=1}^{N}U_m(x,y,t)F_m(z), \tag{36}$$

ここに，$u=(u,v,w)$：３次元空間(x,y,z)で定義される流速ベクトル場，$U_m=(U_m,V_m)$：水平２次元平面(x,y)上で定義される２次元未知変数ベクトルである．上式中の鉛直依存性関数 $F_m(z)(m=1,\cdots,N)$としては，原理的に，流速場の鉛直依存性の近似に適した互いに独立な関数系であれば何でも良いが，灘岡らは $F_m(z)=\cosh k_m(h+z)/\cosh k_m h$ として与えており，これにより，たかだか N=2～3 程度でかなり広い波数帯域をカバーすることが出来ることを示している．この $F_m(z)$の関数形は，先に示した様々な緩勾配方程式や数値波動解析法で用いられている鉛直依存性関数と同型である．その意味で，灘岡らの広帯域波動方程式は，これらの波動方程式の自然な拡張になっている．

この多成分連成法による線形広帯域波動方程式の導出過程は，上述の線形狭帯域波動方程式の導出過程とほぼ同じである．ただし，水平流速ベクトル $\boldsymbol{u}$ が，式(36)のように多成分表現で表されていることに伴って，例えば先の圧力 p に関する式(29)が，次のように表されることになる．

$$\frac{p}{\rho}=g(\eta-z)-\frac{\partial}{\partial t}\sum_{m=1}^{N}\nabla\cdot\left[\frac{1-F_m}{k_m^2}U_m(x,y,t)\right] \tag{37}$$

そして，上式および式(36)を水平方向の運動方程式(23.b)に代入し，鉛直方向に積分することになるが，線形狭帯域方程式の場合に，鉛直依存性関数 $F(z)$をかけてから水深積分を施したことに対応して，今の場合には，鉛直依存性関数 $F_m(z)$を m=1 から $m=N$ まで順次かけて水深積分することになる．その結果，N 個の互いに独立な方程式が得られるが，この操作は実は Galerkin 法の操作に他ならない．

このような定式化によって得られる方程式は，後で示す非線形広帯域波動方程式(48)の線形バージョンであるので，ここではその式形は記さないが，わずか N=2 ないし 3 程度の成分数で，かなり広い波数帯域において，理論的な分散関係式(10)とほぼ完全に一致する形の分散特性が得られることがわかっている．したがって，この多成分連成法に基づく分散性波動方程式，すなわち線形広帯域波動方程式は，任意の広帯域スペクトル場を表現し得る波動方程式となっている．

ここで，この多成分連成法における多成分表現と，波動場を多数のスペクトル成分の和で表すスペクトル法における多成分表現との違いについて言及すると，両者の間の決定的な違いは，スペクトル法では線形波動場の場合，各成分波が互いに独立になるのに対し，多成分連成法では，線形・非線形に関わらず，一般的に，各成分が互いに連成する形になることにある．また，スペクトル表現では，通常 100 以上のスペクトル成分の和として波動場を表すが，多成分連成法では上記のようにたかだか２ないし３程度の成分数でかなり広い波数帯域をカバーすることができる．この関係を少しここで詳しく見てみる．

いま，簡単のため水平床上の１次元波動場を考える．任意のスペクトル A_j ($j=1,\cdots,j\max$; A_j は複素振幅)を有する波動場の水平流速は，（線形・非線形に関わらず）波数 k_jを有する正弦波流速成分

$$u_j(x,z,t)=A_j\frac{\cosh k_j(h+z)}{\cosh k_j h}\exp\{i(k_j x-\sigma_j t)\} \tag{38}$$

の和として，

$$u(x,z,t)=\sum_{j=1}^{j\max}u_j(x,z,t)=\sum_{j=1}^{j\max}A_j\frac{\cosh k_j(h+z)}{\cosh k_j h}\exp\{i(k_j x-\sigma_j t)\} \tag{39}$$

で表せる．ここで，もし，個々の成分波が，多成分連成法表現によって

$$u_j(x,z,t)=\sum_{i=1}^{N}U_{ij}(x,t)F_i(z) \tag{40}$$

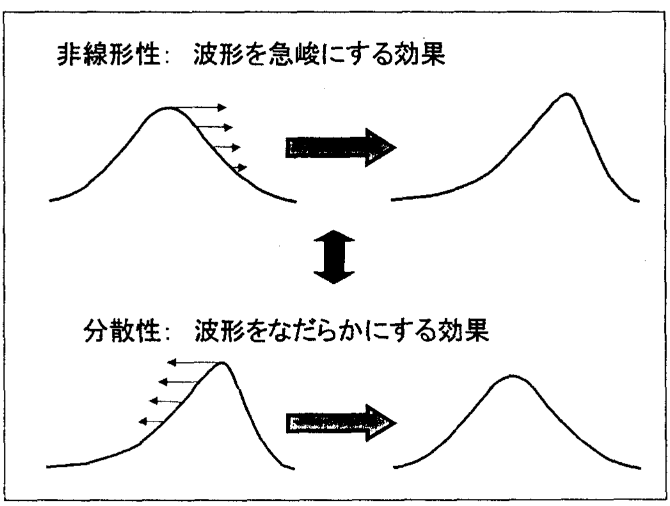
として十分良く近似できるならば，上式を式(39)に代入することにより，

$$u(x,z,t)=\sum_{j=1}^{j\max}u_j(x,z,t)=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{j\max}U_{ij}(x,t)\cdot F_i(z;k_i h) \tag{41}$$

となることから，けっきょく，

$$U_i(x,t)=\sum_{j=1}^{j\max}U_{ij}(x,t) \tag{42}$$

と表せば，式(36)の形の流速場表現が得られることがわかる．ポイントは，式(40)において，任意の波数 k_j を有する流速成分を，たかだか2，3個の成分によって十分良く近似できるか，という点にあるが，これについては，すでにそのことが成立することが灘岡・中川(1991,1993)によって示されている．



図－３　波形の時間発展に関する非線形性と分散性の効果

３．非線形波動方程式

１．で述べたように，様々な波動方程式は，波の一波内の情報まで分解する位相分解型モデルと波高やエネルギーといったグロスな量を記述対象とする位相平均型モデルとに大別できるが，前者のモデルの本領は非線形波動場の場合により際立ってくる．というのも，一波内の水位分布すなわち波形の時間発展は，波の

非線形性と分散性という，互いに相反する作用を持つ２つの要素のバランスのもとに決まるため（**図－３**参照），その重要な要素の一つである非線形性を抜きに具体的な波形の時間発展を記述できないからである．

この，非線形性と分散性のバランスという観点から，例えば，古典的な非線形波動方程式の一つとしての，いわゆる**非線形長波方程式**（Airy の非線形浅水方程式ともいわれる）

$$\frac{\partial \eta}{\partial t}+\nabla[(\eta+h)\bar{u}]=0, \tag{43.a}$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}+\bar{u}\nabla\bar{u}+g\nabla\eta=0 \tag{43.b}$$

を見てみると（$\bar{u}$ は水深平均流速），これは，長波極限の非分散性･強非線形方程式となっており，例えば，斜面上で非線形性が顕著になってくると，一方的に前傾し急峻化して，最終的にはショック面を形成することになる．これに対して，**Boussinesq** 方程式は非線形性と分散性の両方を考慮することができる．そのため，Boussinesq 方程式は非線形波動理論の理論面，応用面の研究において，一つの中心的な位置を占める方程式となっている．以下ではまず，この Boussinesq 方程式について少し詳しく述べる．

3. 1 Boussinesq 方程式

Boussinesq 方程式として通常引用されるのは，非一様水深に対して Peregrine(1967)によって導出された以下の方程式系である．

$$\frac{\partial \eta}{\partial t}+\nabla[(\eta+h)\bar{u}]=0, \tag{44.a}$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}+\bar{u}\nabla\bar{u}+g\nabla\eta=\frac{h}{2}\nabla[\nabla\cdot(h\bar{u}_t)]-\frac{h^2}{6}\nabla[\nabla\cdot\bar{u}_t] \tag{44.b}$$

上式は，非線形性と分散性がともに十分小さく，かつ互いに同程度の大きさの波動場を対象に導出された，弱非線形･弱分散性波動方程式である（例えば，Mei, 1983）．この方程式は，長波から浅水波にかけての非線形分散性波動の時空間発展を直接追跡することができるが，さらに種々の砕波モデルを組み込むことによって，砕波後の波動場や海浜流を算出することも行われている．上式は，長波回りの弱分散性波動場の仮定から，相対水深で$0<h/L<0.06$程度の適用範囲しかないが，Madsen et al. (1991), Madsen & Sørensen (1992)や Nwogu (1993), Beji & Nadaoka (1996)らによって，上式の式形を修正することにより，方程式の適用範囲を$0<h/L<0.3$程度まで広げる試みがなされている．これらを以下に順に示す．

1) Madsen et al. (1991)による修正Boussinesq方程式：

Boussinesq 方程式に何らかの修正を加えて，その分散特性を向上させる最初の本格的な試みは Madsen et al. (1991)によって行われた．その意味で，彼らの研究は，Boussinesq 方程式に基づく波動理論研究に新たな展開をもたらした重要な研究と位置づけられるべきものである．彼らの手法は，もとの Boussinesq 方程式(44)に対してあるパラメータ B を含んだ形の補正項を加え，それによる方程式の線形分散関係式が，なるべく広い波数帯域で理論的分散関係式にベストフィットするように，このパラメータ B を決めるというものである．その後，Madsen & Sørensen (1992)は，海底面傾斜の効果をより正確に取り込んだ式形を与えているが，ここでは，Madsen et al. (1991)のものを以下に示す．

$$\frac{\partial \eta}{\partial t}+\frac{\partial Q_x}{\partial x}+\frac{\partial Q_y}{\partial y}=0 \tag{45.a}$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\frac{Q_x^2}{D})+\frac{\partial}{\partial y}(\frac{Q_xQ_y}{D})+gD\frac{\partial\eta}{\partial x}=(B+\frac{1}{3})h^2\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial^2 Q_x}{\partial t\partial x}+\frac{\partial^2 Q_y}{\partial t\partial y})+Bgh^3(\frac{\partial^3\eta}{\partial x^3}+\frac{\partial^3\eta}{\partial x\partial y^2}) \quad (45.b)$$

$$\frac{\partial Q_y}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\frac{Q_xQ_y}{D})+\frac{\partial}{\partial y}(\frac{Q_y^2}{D})+gD\frac{\partial\eta}{\partial y}=(B+\frac{1}{3})h^2\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial^2 Q_x}{\partial t\partial x}+\frac{\partial^2 Q_y}{\partial t\partial y})+Bgh^3(\frac{\partial^3\eta}{\partial y^3}+\frac{\partial^3\eta}{\partial y\partial x^2}) \quad (45.c)$$

ここに，Q_x，Q_y はそれぞれ x 方向，y 方向の線流量であり，パラメータ B としては，B=1/15 が最適であるとしている．

2) Nwogu (1993)による修正 Boussinesq 方程式：

Nwogu (1993)は，上記の Madsen らの手法と全く異なった手法で Boussinesq 方程式の修正を試みている．その手法は，$z=z_\alpha$ での水平流速ベクトル u_α という変数を導入し，それによって得られる流速場と圧力場の表現式を，断面積分した連続式と運動方程式（Euler の方程式）に代入することによって導出される方程式系について，やはり，その線形分散関係式が理論的分散関係式になるべく広い波数帯でベストフィットするように，z_α を設定しようとするものである．基本的に長波極限まわりの漸近展開型の流速場表現をベースとしているので Boussinesq 型の方程式の一形式であることには変わりはないが，$\alpha=(z_\alpha/h)^2/2+(h/h)$ としたとき，α=−0.393 としたときに，波速に関して $0<h/L<0.42$ くらいまで，また群速度に関しては $0<h/L<0.3$ くらいまで適用範囲を広げることができることが示されている．Nwogu (1993)の式は，代表的な波長を l，代表的な水深を h_0，代表的な振幅を a_0 として無次元化した形で以下のように表される．式中のεとμは，それぞれ非線形性，分散性を表す無次元パラメータで，$\varepsilon=a_0/h_0$，$\mu=h_0/l$ で定義される．

$$\eta_t+\nabla\cdot[(h+\varepsilon\eta)u_\alpha]+\mu^2\nabla\cdot\left\{(\frac{z_\alpha^2}{2}-\frac{h^2}{6})h\nabla(\nabla\cdot u_\alpha)+(z_\alpha+\frac{h}{2})h\nabla[\nabla\cdot(hu_\alpha)]\right\}=0 \quad (46.a)$$

$$u_{\alpha t}+\nabla\eta+\varepsilon(u_\alpha\cdot\nabla)u_\alpha+\mu^2\left\{\frac{z_\alpha^2}{2}\nabla(\nabla\cdot u_{\alpha t})+z_\alpha\nabla[\nabla\cdot(hu_{\alpha t})]\right\}=0 \quad (46.b)$$

3) Beji & Nadaoka (1996)による修正Boussinesq方程式：

上述のMadsenらの手法は，オリジナルのBoussinesq方程式(44.b)に対してある補正項を加えてパラメータ・チューニングする形の，いわばheuristicなアプローチによるものである．しかも，この補正項を「加える」数学的操作の妥当性は必ずしも自明ではない．それに対して，Beji & Nadaoka (1996)は，以下に示すような方程式中の分散項の部分的な「置き換え」というごく簡単な数学的技法を導入することによる，よりsystematicな修正方法を提案している．

まず，もとの式(44.b)を，パラメータβを含む形で以下のように書き換える．

$$\bar{u}_t+(\bar{u}\cdot\nabla)\bar{u}+g\nabla\eta=(1+\beta)\frac{h}{2}\nabla[\nabla\cdot(h\bar{u}_t)]-\beta\frac{h}{2}\nabla[\nabla\cdot(h\bar{u}_t)]-(1+\beta)\frac{h^2}{6}\nabla(\nabla\cdot\bar{u}_t)+\beta\frac{h^2}{6}\nabla(\nabla\cdot\bar{u}_t) \quad (47.a)$$

この式は，もとの式と全く等価である．つぎに，１次オーダーの関係式

$$\bar{u}_t+g\nabla\eta=0 \quad (47.b)$$

を用いて，式(47.a)の右辺の第２項と第４項を置き換える．

$$\overline{u}_t+(\overline{u}\cdot\nabla)\overline{u}+g\nabla\eta=(1+\beta)\frac{h}{2}\nabla\left[\nabla\cdot(h\overline{u}_t)\right]+\beta\frac{gh}{2}\nabla\left[\nabla\cdot(h\nabla\eta)\right]-(1+\beta)\frac{h^2}{6}\nabla(\nabla\cdot\overline{u}_t)-\beta\frac{gh^2}{6}\nabla(\nabla^2\eta) \tag{47.c}$$

上式で，β=0 とすると，もとの Boussinesq 方程式(43.b)となり，β=−1 とすると，右辺の分散項をすべてを式(47.b)で置き換えることに対応する．$-1<\beta<0$ の範囲のβの場合には，式(47.b)によって，式(44.b)右辺の分散項の部分置換を行うことになる．そしてβ=1/5 とすることによって，分散関係式の最適改良特性が得られることが示されている．このように，Beji & Nadaoka (1996)の手法はきわめて簡単であるが，これによって得られる修正 Boussinesq 方程式系(44.a),(47.c)が完全なエネルギー保存特性を有するのに対し，Madsen et al. (1991), Madsen & Sørensen (1992)や Nwogu (1993)の修正 Boussinesq 方程式は，エネルギー保存特性を完全には満たさないことが明らかになっている（Nadaoka & Beji; 1996,1998）

3.2 多成分連成法による非線形波動方程式

さきに述べたように，Boussinesq 方程式は，波の非線形性と分散性の両方を表現し得る方程式で，理論面だけでなく実用上もきわめて有用な方程式であるが，もともと長波や浅水波にかけての浅い波に関する方程式であるという制約がある．そのため，その適用範囲を広げるべく，上記のように様々な修正 Boussinesq 方程式が提案されてきているが，方程式の定式化の基礎となる流速場の鉛直依存性表現が，**長波極限のまわりの漸近展開**によるものであることから（例えば，Mei, 1983），Boussinesq 方程式の枠組みに基づく限り，どうしてもその適用範囲は限られたものにならざるを得ない．逆に言うと，このような本質的な制約を脱しようとするのであれば，この流速場に関する長波極限のまわりの漸近展開表現，という考え方そのものを放棄し，**全く異なった発想に基づく流速場の鉛直依存性表現法**を導入する必要がある（Nadaoka et al., 1994；灘岡, 1995）．さきの **2.6** で示した**多成分連成法**は，まさにこのような目的に合致するものである．この多成分連成法による波動方程式の定式化は，最初，線形波動場に関して行われたが（灘岡・中川, 1991,1993a），その後，以下に示すように，非線形波動場に対する様々な定式化が行われている．

1）非線形広帯域波動方程式

さきの **2.6** で示した，線形波動場に関する多成分連成法による定式化の考え方は，そのまま非線形波動場に関して適用できる（灘岡・中川, 1993b; 灘岡ら, 1994; Nadaoka et al., 1994,1997）．もちろん，水深積分すべき運動方程式は非線形項が含まれたものになるし，水深積分の範囲の上限も $z=\eta$ となる．そうして得られる波動方程式系は，任意水深での任意の広帯域スペクトル場を扱える強非線形広帯域波動方程式である（Nadaoka, et al. 1994; 灘岡, 1995）．これにさらに弱非線形近似を導入して数値計算上扱いやすくした形のもの（灘岡ら, 1994; Nadaoka,et al., 1994; 灘岡, 1995; Nadaoka et al., 1997）が以下に示す方程式系である．

$$\eta_t+\sum_{m=1}^{N}\nabla\cdot\left[\left(\frac{\sigma_m^2}{gk_m^2}+\eta\right)U_m\right]=0 \tag{48.a}$$

$$\sum_{m=1}^{N}A_{nm}U_{m_t}+B_n\nabla\left[g\eta+\eta w_{0_t}+\frac{1}{2}\left(u_0.u_0+w_0^2\right)\right]=\frac{\partial}{\partial t}\sum_{m=1}^{N}\left[C_{nm}\nabla(\nabla\cdot U_m)+D_{nm}(\nabla\cdot U_m)\right]$$

$$(n=1,\cdots,N) \tag{48.b}$$

ここに，

$$A_{nm}=\frac{\sigma_n^2-\sigma_m^2}{k_n^2-k_m^2},\quad A_{nn}=\frac{g\sigma_n^2+h\left(g^2k_n^2-\sigma_n^4\right)}{2gk_n^2},\quad \sigma_m^2=gk_m\tanh k_m h,\quad B_n=\frac{\sigma_n^2}{k_n^2},\quad C_{nm}=\frac{B_n-A_{nm}}{k_m^2},$$

$$\boldsymbol{D}_{nn}=\nabla C_{nn},\quad \boldsymbol{D}_{nm}=\frac{4}{k_m^2-k_n^2}\left[\frac{\nabla k_m}{k_m}\left\{A_{nm}-\left(k_m^2-k_n^2\right)C_{nm}\right\}+\frac{\nabla h}{h}\left\{\left(A_{nn}-\frac{B_n}{2}\right)\left(A_{mm}-\frac{B_m}{2}\right)\right\}^{\frac{1}{2}}\right],\tag{48.c}$$

また，$\boldsymbol{u}_0$とw_0はz=0における水平流速ベクトル$\boldsymbol{u}$ならびに鉛直流速wであり，それぞれ以下のように表される．

$$\boldsymbol{u}_0=\sum_{m=1}^{N}\boldsymbol{U}_m,\quad w_0=-\sum_{m=1}^{N}\nabla\cdot\left(\frac{B_m}{g}\boldsymbol{U}_m\right)\tag{48.d}$$

2) 非線形狭帯域波動方程式

非線形広帯域波動方程式(48)で成分数Nを１とすると，

$$\eta_t+\nabla\cdot\left[\left(\frac{c^2}{g}+\eta\right)\boldsymbol{u}_0\right]=0\tag{49.a}$$

$$cc_g\boldsymbol{u}_{0_t}+c^2\nabla\left[g\eta+\eta w_{0_t}+\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{u}_0\cdot\boldsymbol{u}_0+w_0^2\right)\right]=\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{c\left(c-c_g\right)}{k^2}\nabla\left(\nabla\cdot\boldsymbol{u}_0\right)+\nabla\left[\frac{c\left(c-c_g\right)}{k^2}\right]\left(\nabla\cdot\boldsymbol{u}_0\right)\right\}\tag{49.b}$$

となる．これは，任意水深の弱非線形･分散性波動場を表現することができる．ただし，成分数を１としていることに対応して，対象とする波動場が，中心周波数kの回りのスペクトル帯域幅が十分狭い，狭帯域スペクトル場となっている必要がある．上式で，cやc_gとして，例えば長波表現を与えれば非線形長波方程式が得られ，長波回りの弱分散性表現を与えれば Boussinesq 方程式を得ることができる．また，上式を線形化したものが，**2.5** で示した線形狭帯域波動方程式であるが，つぎに述べるように，それからさらに式を変形することにより，Smith & Sprinks (1975) の非定常分散性波動方程式が得られ，さらに定常波動場を仮定すれば Berkhoff(1972)の緩勾配方程式を導くことができる．その意味で，この非線形狭帯域波動方程式は，既存の多くの波動方程式の一般化になっている（灘岡ら, 1994; Nadaoka et al., 1994, 1997; 灘岡, 1995; Beji & Nadaoka, 1997a）．

3) 非線形非定常緩勾配方程式

非線形狭帯域波動方程式(49)から，さらに$\boldsymbol{u}_0$を消去してηのみの方程式の形にすることにより，

$$c_g\eta_{tt}-c^3\nabla^2\eta-\frac{\left(c-c_g\right)}{k^2}\nabla^2\eta_{tt}-c\nabla\left(cc_g\right)\cdot\left(\nabla\eta\right)-\frac{3}{2}gc\left(3-2\frac{c_g}{c}-\frac{k^2c^4}{g^2}\right)\nabla^2\left(\eta^2\right)=0\tag{50}$$

が得られる．上式で非線形項を落として，さらに若干の式変形をすることにより，Smith & Sprinks (1975)の非定常分散性緩勾配方程式に一致する式形が得られることから，上式は非定常分散性緩勾配方程式の非線形波動場への拡張となっている．ただし，**2.5** で示した線形狭帯域波動方程式の場合と同様に，上式の線形化方程式は，非定常分散性緩勾配方程式よりも良好な分散特性を有する（灘岡ら, 1994; Nadaoka et al., 1994; Beji & Nadaoka, 1997a).

4) 多成分連成法に基づくその他の波動方程式

2.6 で述べたように，多成分連成法は，複数の鉛直依存性関数を連成させる形の流速場表現に基づく定式化を行おうとするものである．その際，鉛直依存性関数 $F_m(z)(m=1,\cdots,N)$としては，原理的に，流速場の鉛直依存性の近似に適した互いに独立な関数系であれば何でも良い．また，連成方程式を得る数学的手法としても，Galerkin 法に限る必要はない．したがって，最終的に得られる方程式形としては，様々なバリエーションが考えられる．また，別の言い方をすると，多成分連成法の考え方自体は極めて一般性があるものであることから，いろいろな応用が可能になる．

例えば，大山ら(1996,1998)は，鉛直依存性関数として，浮体下部の流速場表現に適した成分を加えることにより，灘岡らとほぼ同様の定式化によって，浮体周辺の波動場や波力及び浮体の動揺の解析法を開発し，非線形不規則波動場におけるこれらの解析を平面２次元解析の枠組みの中で行うことを可能にしている．

磯部(1994a,b)は，Galerkin 法の代わりに変分原理を導入した式展開を行って導いた式を提案しており，それを非線形緩勾配方程式と称している．その際，鉛直依存性関数としては，z のべき乗式を用いている．

また，後野(1993,1994)は，流速の代わりに圧力場を対象とした定式化を，やはり多成分連成法の考え方を導入して行っている． 鉛直依存性関数としてはルジャンドル多項式が導入されており，連成方程式を得る手法としては Galerkin 法が用いられている．

さらに最近では，Kennedy & Fenton (1996)が，基礎方程式として速度ポテンシャルに関するラプラスの式を用いて，鉛直依存性関数として z のべき乗式を使用し，それに対して Galerkin 法による定式化を行ったものを示しており，彼らはそれに LPA(Local Polynomial Approximation)法という名称を与えている．

表－１は，これらを一覧表にまとめたものである．

表－１　多成分連成法に基づく波動方程式の定式化の一覧

	基礎変数	鉛直依存性関数	連成方程式導出のための手法
灘岡ら (1991～)	流速	双曲線関数	Galerkin法
磯部 (1994a,b)	速度ポテンシャル	べき乗式	変分原理
後野 (1993,1994)	圧力	ルジャンドル多項式	Galerkin法
Kennedy & Fenton (1996)	速度ポテンシャル	べき乗式	Galerkin法

4．おわりに

この稿のタイトルの副題として，「理論と数値シミュレーション」と掲げたが，実際には，紙面の制約上，数値シミュレーションの具体例を示すことはほとんどできなかった．その意味では看板に偽りあり，であるが，どうかお許し頂きたい．そのかわり，本稿では，なるべく方程式の導出過程の基本的な前提や重要なポイントなどについて詳しく述べたつもりである．このような点は，波動理論の研究発展の上でも，あるいは各波動方程式の実際への適用性を判断する上においても重要になることがらである．その意味で，本稿が，そのような目的に多少ともお役にたてたことを願う次第である．

参考文献

磯部雅彦(1993)：有理式近似に基づく非定常緩勾配不規則波動方程式，海岸工学論文集，第40巻，pp.26-30.

磯部雅彦(1994a)：波浪解析のための波動方程式の比較研究，土木学会論文集，No.479/Ⅱ-27, pp.1-14.

磯部雅彦(1994b)：非線形緩勾配波動方程式の提案，海岸工学論文集，第41巻，pp.1-5.

伊藤喜行・谷本勝利(1971)：数値波動解析法とその応用－構造物周辺の波－，第18回海岸工学講演会論文集，pp.67-70.

伊藤喜行・谷本勝利(1972)：波向き交差領域での波の屈折－数値波動解析法の応用(2)－，第19回海岸工学講演会論文集，pp.325-329.

大山　巧・土田　充・灘岡和夫(1996)：多成分連成法に基づく非線形不規則波動場中の浮体に作用する波力の解析，海岸工学論文集，第43巻，pp.941-945.

大山　巧・土田　充・灘岡和夫(1998)：多成分連成法に基づく非線形不規則波動場中の浮体の動揺解析法，土木学会論文集，No.600/Ⅱ-44, pp.105-117.

窪　泰浩・小竹康夫・磯部雅彦・渡辺　晃(1991)：非定常緩勾配不規則波動方程式について，海岸工学論文集，第38巻，pp.46-47.

谷本勝利・小舟浩治(1995)：数値波動解析法による港内波高分布の計算，第22回海岸工学講演会論文集，pp.249-253.

灘岡和夫・中川康之(1991)：Galerkin法に基づく強分散性波動方程式の導出と背景について，東京工業大学土木工学科研究報告，No.44, pp.63-75.

灘岡和夫・中川康之(1993a)：不規則波動シミュレーションのための強分散性波動方程式の導出とその基本特性の検討，土木学会論文集，No.467/Ⅱ-23, pp.83-92.

灘岡和夫・中川康之(1993b)：新しい非線形・分散性波動方程式による非線形波動解析の試み，海岸工学論文集，第40巻，pp.6-10.

灘岡和夫・Serdar Beji・大野修史(1994)：新たな波動モデルによる強分散性非線形場の解析法の確立と室内実験による検証，海岸工学論文集，第41巻，pp.11-16.

灘岡和夫(1995)：最近の非線形分散性波動理論の新展開，水工学における夏期講習会講義集Bコース，土木学会水理委員会，pp.B-3-1－21.

西村仁嗣・丸山康樹・平口博丸(1983)：直接数値積分による波の場の解析，第30回海岸工学講演会論文集，pp.123-127.

後野正雄(1993)：緩勾配地形上の線形不規則波動場の支配方程式とその特性，海岸工学論文集，第40巻，pp.21-25.

後野正雄(1994)：強非線形不規則波動場に対する連成振動方程式とその基本特性，海岸工学論文集，第41巻，pp.16-20.

渡辺　晃・丸山康樹(1984)：屈折・回折・砕波変形を含む波浪場の数値解法，第31回海岸工学講演会論文集，pp.103-107.

Beji, S. and Nadaoka, K.(1996):A formal derivation and numerical modelling of the improved Boussinesq equations for varying depth, Ocean Eng., Vol. 23, No.8, pp.691-704.

Beji, S. and Nadaoka, K.(1997a): A time-dependent nonlinear mild-slope equation for water waves, Proc. Royal Society of London, Series A, Vol.453, pp.319-332.

Beji, S. and Nadaoka, K.(1997b): Modelling of nonlinear-dispersive waves over arbitrary depths, Technical Report, Department of Civil Engineering Tokyo Institute of Technology, No.56, pp.45-115.

Beji, S. and Nadaoka, K. (1998): Authors' reply to discussion of Schäffer and Madsen on "A formal derivation and numerical modelling of the improved Boussinesq equations for varying depth", Ocean Engineering, 25 (7), pp. 615-618.

Berkhoff, J.C.W.(1972): Computation of combined refraction-diffraction. Proc. 13th Int. Conf. Coastal Eng., ASCE, pp. 471-490.

Ito, Y. and Tanimoto, K.(1972): A method of numerical analysis of wave propagation —Application to wave diffraction and refraction—, 13th Int. Conf. on Coastal Eng., pp.503-522.

Kennedy, A.B. & Fenton, J.D. (1996): A fully nonlinear 3D method for the computation of wave propagation, *Proc. 25th Int. Conf. on Coastal Eng.*, ASCE, pp.1102-1115.

Kirby, J.T., C. Lee and Rasmussen, C. (1992): Time-dependent solutions of the mild-slope wave equation, Proc. 23rd Int. Conf. on Coastal Eng., ASCE, pp.391-404.

Madsen, P.A., Murray, R. and Sørensen, O.R.(1991): A new form of the Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics, Coastal Eng., Vol.15, pp. 371-388.

Madsen, P.A., and Sørensen, O.R.(1992): A new form of the Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics, Part 2. A slowly-varying bathymetry, Coastal Eng., Vol.18, pp. 183-204.

Mei, C.C.(1983): The applied dynamics of ocean surface waves, John Wiley & Sons, pp.740.

Nadaoka, K., Beji, S. and Nakagawa, Y.(1994): A fully-dispersive nonlinear wave model and its numerical simulations, Proc. 24th Int. Conf. on Coastal Eng., ASCE, pp.427-441.

Nadaoka, K., Beji, S. and Nakagawa, Y.(1997): A fully dispersive weakly nonlinear model for water waves, Proc. Royal Society of London, Series A, Vol.453, pp.303-318.

Nwogu, O.(1993): Alternative form of Boussinesq equations for nearshore wave propagation, J. Waterway, Port, Coastal, and Ocean Eng., ASCE, Vol.119, No.6, pp.618-638.

Peregrine, D.H.(1967): Long waves on a beach, J. Fluid Mech., Vol.27, pp.815-827.

Radder, A.C.(1979): On the parabolic equation method for water-wave propagation , J. Fluid Mech., Vol.95, pp.159-176.

Smith, R. and Sprinks, T.(1975): Scattering of surface waves by a conical island, J. Fluid Mech., Vol.72, pp.373-384.