

波の基礎理論

Fundamental Wave Theories

磯部雅彦

Masahiko ISOBE

1. はじめに

海岸においては様々な時空間スケールの波が存在する。波は海岸における主要な外力であるため、海岸における諸現象を解明し、制御するためには、波を理解することが不可欠である。本稿では水面波の諸理論を理解するための基礎知識を提供することを目的として、一様水深中を变形することなく伝播する波、すなわち保存波の諸理論を解説する。

水面波の支配方程式のうちで水面の境界条件が非線形であるために、厳密な解析解はほとんど得られない。そこで、摂動法と呼ばれる、解を級数表示して求める方法が数多く開発されてきたが、最近では摂動法によらずに数値解を求める方法が広く普及している。しかし、摂動法を理解することは、波の物理現象の理解に役立つ。また、多くの数値計算モデルでは、次元を減らすために鉛直方向に積分された波動方程式が使われるが、それを導く際に摂動法が用いられることが多い。このようなことから本稿では、保存波に対する摂動解の代表であるストークス波およびクノイド波を取り上げ、それぞれ第2次近似解および第1次近似解を導くことを通じて、摂動法の具体的内容を解説する。

まず、2では水面波の基礎方程式および境界条件をとりまとめた上で、無次元化によって各項のスケーリングを行う。これにより、各項の大小関係が把握しやすくなり、各項がどのオーダーで寄与するのが見えやすくなるので、単調で長い計算を必要とする摂動理論の展開の中で、読者が多少なりとも意味を考えることができるようになることを意図している。3では、最も簡単な水面波の理論である微小振幅波理論の誘導を行う。続いて4ではストークス波第2次近似解を導くが、若干一般化して2成分の微小振幅波の非線形干渉波の解を求める問題として扱うので、その過程で短周期の非線形干渉波とともに長周期の非線形干渉波も得られる。5はクノイド波第1次近似解の誘導であり、斜面上の波浪変形を扱うのに近年頻繁に用いられているブシネスク方程式を経由して誘導する。6では保存波の解を数値的に解く方法を紹介し、7ではこれらの諸理論の適用範囲について述べる。8では有限振幅性を表すパラメーターの定義や関係式を紹介し、9ではエネルギーなどの平均量について述べる。

2 基礎方程式と境界条件

(1) 流速を使った表示

a) 基礎方程式

本稿では一方向に進行する水面波を取り扱うので、鉛直2次元問題となる。水面波の場合には通常、水を非粘性、非圧縮性とし、流速場を非回転として差し支えない。ここでは、次元量にはすべて \wedge をつけて表すことにして、図-1のように、独立変数である水平座標を x 、平均水面を基準として上向き鉛直座標を z 、時間を t とし、従属変数である水平および鉛直流速をそれぞれ u および w 、水圧を p とすれば、連続式(1)、および運

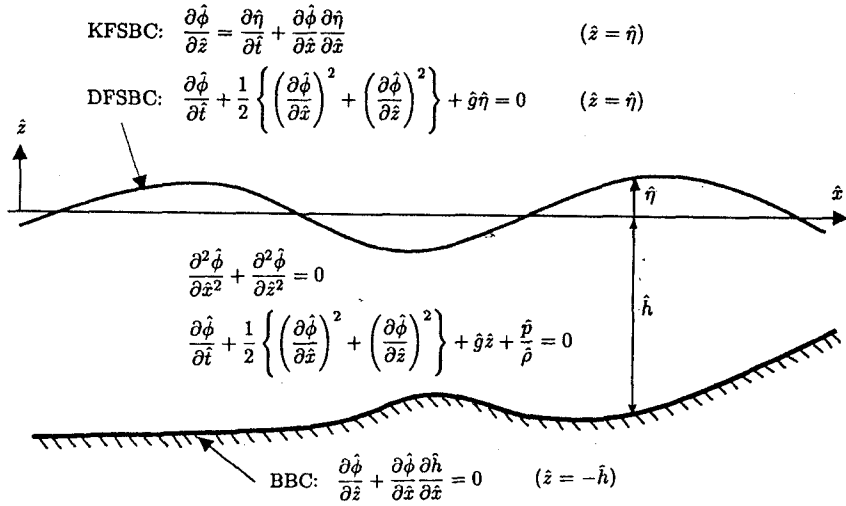


図-1 水面波の基礎方程式および境界条件

動方程式 (2), (3) が基礎方程式となる :

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{w}}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + \hat{u} \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + \hat{w} \frac{\partial \hat{u}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} \quad (2)$$

$$\frac{\partial \hat{w}}{\partial t} + \hat{u} \frac{\partial \hat{w}}{\partial x} + \hat{w} \frac{\partial \hat{w}}{\partial z} = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{p}}{\partial z} \quad (3)$$

ここに、 ρ は水の密度、 g は重力加速度である。また、非回転の条件式は次式で表される :

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial z} - \frac{\partial \hat{w}}{\partial x} = 0 \quad (4)$$

b) 境界条件

水粒子が境界から飛び出さないという条件を運動学的境界条件と呼ぶ。底面や水面などの境界は一般に $F(\hat{x}, \hat{z}, \hat{t}) = 0$ と表される。水粒子が飛び出さないことは、ある時境界上にあった水粒子が永久に境界上にあるということであり、その水粒子は $F = 0$ を満たし続ける。つまり、その水粒子に着目した F の時間変化は 0 であり、

$$\frac{D}{Dt} F(\hat{x}, \hat{z}, \hat{t}) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} + \hat{u} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{w} \frac{\partial}{\partial z} \right) F(\hat{x}, \hat{z}, \hat{t}) = 0 \quad (5)$$

という境界条件式が導かれる。

水深を \hat{h} とすれば、底面の境界条件には $F = \hat{z} + \hat{h}(\hat{x})$ を上式に代入して

$$\hat{w} + \hat{u} \frac{\partial \hat{h}}{\partial x} = 0 \quad (z = -\hat{h}) \quad (6)$$

を得る。また、水面変動を $\hat{\eta}$ とすれば、水面の境界条件には $F = \hat{z} - \hat{\eta}(\hat{x}, \hat{t})$ を代入して

$$\hat{w} = \frac{\partial \hat{\eta}}{\partial t} + \hat{u} \frac{\partial \hat{\eta}}{\partial x} \quad (z = \hat{\eta}) \quad (7)$$

を得る。

水面の位置は未知であり、その分だけ余分に境界条件がある。これが力学的境界条件であり、水面では圧力が大気圧に等しいという条件である。大気圧を0ととつても一般性を失わないので、

$$\hat{p} = 0 \quad (\hat{z} = \hat{\eta}) \quad (8)$$

とする。

(2) 速度ポテンシャルを使った表示

a) 基礎方程式

非回転条件式(4)より速度ポテンシャル $\hat{\phi}$ が存在し、流速成分が

$$\hat{u} = \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \hat{x}}, \quad \hat{w} = \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \hat{z}} \quad (9)$$

と表される。

このとき、連続式(1)は、

$$\frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial \hat{x}^2} + \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial \hat{z}^2} = 0 \quad (10)$$

となる。また、運動方程式(2)および式(3)は空間的に積分可能となり、次のベルヌーイの式を得る：

$$\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \hat{t}} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \hat{x}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \hat{z}} \right)^2 \right\} + \hat{g}\hat{z} + \frac{\hat{p}}{\hat{\rho}} = 0 \quad (11)$$

b) 境界条件

境界条件式を $\hat{\phi}$ によって書き直すのは簡単であり、式(6)~(8)はそれぞれ

$$\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \hat{z}} + \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{h}}{\partial \hat{x}} = 0 \quad (\hat{z} = -\hat{h}) \quad (12)$$

$$\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \hat{z}} = \frac{\partial \hat{\eta}}{\partial \hat{t}} + \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{\eta}}{\partial \hat{x}} \quad (\hat{z} = \hat{\eta}) \quad (13)$$

$$\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \hat{t}} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \hat{x}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \hat{z}} \right)^2 \right\} + \hat{g}\hat{\eta} = 0 \quad (\hat{z} = \hat{\eta}) \quad (14)$$

となる。

以上により、平面内で定義された未知関数を $\hat{\phi}$ および \hat{p} として、基礎方程式は式(10)および(11)となる。また、境界条件は式(12)~(14)で表されるが、このとき境界を表す未知関数として $\hat{\eta}$ が加わる。図-1はこれを図示したものである。これより、境界条件には水圧 \hat{p} が現れないことから、基礎方程式のうちラプラス方程式(10)と境界条件を組み合わせれば、 $\hat{\phi}$ を先に解くことが原理的には可能である。最後に、求められた $\hat{\phi}$ を式(11)に代入すれば、圧力 \hat{p} を得る。つまり、 $\hat{\phi}$ を求める際には基礎方程式のうちの連続式のみを使うことになるが、運動方程式を無視しているわけではない。どのような流速場でも非回転である限り、運動方程式(から得られるベルヌーイの式)を満たすような \hat{p} が必ず存在し、それを後から解いているに過ぎない。

(3) 基礎方程式および境界条件の無次元化とスケーリング

水面波の基礎方程式および境界条件のうち、水面における運動学的および力学的境界条件である式(13)および(14)が非線形であるために、一般的で厳密な解析解は求められていない。そこで、解析解としては近似的な解を求めることになる。このとき有力な手段となるのが摂動法であり、波高水深比や相対水深など波の特性

を表す無次元パラメータによって解を級数表示し、そのパラメータが小さいものと仮定してある有限次数の項まで打ち切るという方法である。

保存波の場合、波の諸元は水深 \hat{h} 、周期 \hat{T} 、波長 \hat{L} および波高 \hat{H} の4個である。これらに重力加速度 \hat{g} を加えた5個の次元パラメータは、後に述べる分散関係式（波長と周期の関係式）によって関係付けられるので、独立なパラメータは4個（波の諸元では3個）であり、それらが長さや時間の次元を有することから独立な無次元パラメータは2個となる。以下では各次元量をそれぞれの代表値で無次元化して基礎方程式および境界条件式を書き直し、その結果として波高水深比と相対波高の自乗が2個の摂動パラメータとなり得ることを示す。

変数の無次元化のための代表値として、水平および鉛直方向の長さを \hat{L}_0 および \hat{h}_0 、密度を $\hat{\rho}_0$ 、重力加速度を \hat{g}_0 とすれば、以下のような無次元量が $\hat{\cdot}$ の付かない記号を用いて定義される：

$$\hat{x} = \hat{L}_0 x, \quad \hat{z} = \hat{h}_0 z, \quad \hat{t} = \frac{\hat{L}_0}{\sqrt{\hat{g}_0 \hat{h}_0}} t \quad (15)$$

$$\frac{\partial}{\partial \hat{x}} = \frac{1}{\hat{L}_0} \frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial \hat{z}} = \frac{1}{\hat{h}_0} \frac{\partial}{\partial z}, \quad \frac{\partial}{\partial \hat{t}} = \frac{\sqrt{\hat{g}_0 \hat{h}_0}}{\hat{L}_0} \frac{\partial}{\partial t} \quad (16)$$

$$\hat{\phi} = \varepsilon \hat{L}_0 \sqrt{\hat{g}_0 \hat{h}_0} \phi, \quad \hat{\eta} = \varepsilon \hat{h}_0 \eta, \quad \hat{p} = \hat{\rho}_0 \hat{g}_0 \hat{h}_0 p \quad (17)$$

$$\hat{h} = \hat{h}_0 h, \quad \hat{T} = \frac{\hat{L}_0}{\sqrt{\hat{g}_0 \hat{h}_0}} T, \quad \hat{L} = \hat{L}_0 L, \quad \hat{H} = \hat{H}_0 H, \quad \hat{\rho} = \hat{\rho}_0 \rho, \quad \hat{g} = \hat{g}_0 g \quad (18)$$

これらを基礎方程式 (10) および (11)、ならびに境界条件式 (12)~(14) に代入すれば、

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{1}{\mu^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (19)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left\{ \varepsilon \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \frac{\varepsilon}{\mu^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right\} + \frac{1}{\varepsilon} g z + \frac{1}{\varepsilon} \frac{p}{\rho} = 0 \quad (20)$$

$$\frac{1}{\mu^2} \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad (z = -h) \quad (21)$$

$$\frac{1}{\mu^2} \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (z = \varepsilon \eta) \quad (22)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left\{ \varepsilon \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \frac{\varepsilon}{\mu^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right\} + g \eta = 0 \quad (z = \varepsilon \eta) \quad (23)$$

となる。ここに、

$$\mu = \frac{\hat{h}_0}{\hat{L}_0}, \quad \varepsilon = \frac{\hat{H}_0}{\hat{h}_0} \quad (24)$$

である。

ϕ および η は、無次元化を式 (17) のように行ったことからそれぞれ0次の量になる。したがって、 ε および μ^2 のオーダーを仮定することにより、基礎方程式 (19) および (20)、ならびに境界条件式 (21)~(23) の各項の大小関係が簡単にわかる。たとえば、式 (22) の左辺の第2項は第1項に比べて ε を含んでいるので、 ε が小さいとすれば、第1項に比べて小さい項ということになる。

本稿では、各波動理論における仮定に応じて ε や μ^2 がかかった項が他に比べて微小な項になることををにらみながら、最も大きな項から解き始め、解を再びもとの方程式に代入することによって、前よりも1オーダーだけ微小な項まで含む解を求めるといふ、反復代入・逐次近似法を用いる。これは、従属変数を級数展開して分割された各項を順次求める方法に比べて、式の物理的な意味が分かりやすいためである。ただし、この方法

は、計算対象となる次数までの級数の全体を取り扱うので表示が長くなることや、各次数において非線形項を反復して計算しなければならないなどの理由で、高次の近似解を求めるには適していない。

なお、密度および重力加速度が一定値であるにも関わらず、そのものとは区別した代表値 $\hat{\rho}_0$ および \hat{g}_0 を用いて無次元化したのは、無次元化した式をもとの式とほぼ同じ形にするためである。式(19)~(23)は、式(10)~(14)にオーダー比較をするための ε および μ^2 を組み入れただけの形になっている。したがって、無次元量の解が求められたときには、形式的に ε および μ^2 を 1 とおき、変数にすべて $\hat{\cdot}$ を付けて次元量に置き換えるだけで、次元量に対する解の表示を得ることができる。また、無次元量での計算中でも、すべての変数が次元量であると見なすことによって、次元が正しいかどうかを確認できるので、計算ミスの可能性が減る。

3 微小振幅波理論

(1) 線形化された基礎方程式

微小振幅波理論では、 ε を微小量とし、 μ^2 を小さくない (1 のオーダーの量) として $\mu = 1$, すなわち $\hat{h}_0 = \hat{L}_0$ とおき、 ε^1 以上の高次の微小量を無視する。したがって、式(19)~(23)は

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (25)$$

$$\frac{1}{\varepsilon} p = -\frac{1}{\varepsilon} \rho g z - \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (26)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad (z = -h) \quad (27)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad (z = 0) \quad (28)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + g\eta = 0 \quad (z = 0) \quad (29)$$

と線形化される。ここで、式(29)を用いて式(28)から η を消去し、 ϕ のみの式にしておく：

$$g \frac{\partial \phi}{\partial z} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad (z = 0) \quad (30)$$

(2) 微小振幅波理論の解

x 方向に進行する保存波を考えるので、波速を c として、 ϕ などの従属変数は $x - ct$ と z の関数となる。ここで、これらの2変数に関する変数分離形の解を仮定する：

$$\phi = \phi(x - ct, z) = X(x - ct) Z(z) \quad (31)$$

上式をラプラス方程式(25)に代入して整理すれば、

$$-\frac{X''}{X} = \frac{Z''}{Z} = k^2 \quad (32)$$

となる。上式の左辺は z の関数ではなく、中間の辺は x の関数ではないから、結局その値は一定値となり、さらに x 方向の周期性を念頭におくと正の値をとるので、それを k^2 とおいた。なお、負の値におけば、 x 方向に指数関数的変化を示す、いわゆる減衰定常波の解を得る。

関数 X に対しては

$$X'' + k^2 X = 0 \quad (33)$$

であり、これに対する独立な2個の解は \sin と \cos によって表されるが、 x 軸の原点を適当にとれば \sin だけになる：

$$X = \sin(kx - \sigma t) \quad (34)$$

ここに,

$$\sigma = kc \quad (35)$$

である. 波長を L および周期を T とすれば, x と t に関する周期性から, $k = 2\pi/L$ であつて波数と呼ばれ, また $\sigma = 2\pi/T$ であつて角周波数と呼ばれる.

関数 Z も, 式 (32) から得られる

$$Z'' - k^2 Z = 0 \quad (36)$$

を解けば求められる. これに対する独立な 2 個の解は, たとえば (e^{kz}, e^{-kz}) であるが, $(\cosh kz, \sinh kz)$ もあり, さらに底面における境界条件式 (27) を念頭において $(\cosh k(h+z), \sinh k(h+z))$ を選ぶ. すると, 前者は式 (27) を満たすが, 後者は式 (27) を満たさないのので,

$$Z = \cosh k(h+z) \quad (37)$$

となる. したがつて, 定数を b とすれば, 式 (31) の形式の解は,

$$\phi = b \cosh k(h+z) \sin(kx - \sigma t) \quad (38)$$

であり, これを残った境界条件式 (29) および (30) に代入することにより,

$$\eta = \frac{\sigma}{g} b \cosh kh \cos(kx - \sigma t) \quad (39)$$

$$\sigma^2 = gk \tanh kh \quad (40)$$

を得る.

(3) 微小振幅波理論の解のまとめ

水面変動 η の振幅を a として表示する方が見やすいので, $(\sigma/g)b \cosh kh = a$ において, 式 (39) および (38) を書き直し, さらに無次元流速 u および w を求め, また式 (26) によつて圧力 p を求めれば, 以下ようになる.

$$\eta = a \cos(kx - \sigma t) \quad (41)$$

$$\phi = ac \frac{\cosh k(h+z)}{\sinh kh} \sin(kx - \sigma t) \quad (42)$$

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = a\sigma \frac{\cosh k(h+z)}{\sinh kh} \cos(kx - \sigma t) \quad (43)$$

$$w = \frac{\partial \phi}{\partial z} = a\sigma \frac{\sinh k(h+z)}{\sinh kh} \sin(kx - \sigma t) \quad (44)$$

$$\frac{1}{\varepsilon} p = -\frac{1}{\varepsilon} \rho g z + \rho g a \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \cos(kx - \sigma t) \quad (45)$$

以上に式 (40) の関係式を加えたものが微小振幅波理論の解である. この式はある水深 h に対して, 角周波数 σ (または周期 T) が決まれば波数 k (または波長 L), したがつて波速 $c = \sigma/k$ が決まることを示す式である. これによつて周期ごとに波速が異なることになり, したがつてある時に様々な周期の波が重なりあつても, 波速が違うのでやがて互いに分かれてしまうということを意味する. そこで, その式は分散関係式と呼ばれる.

なお, 深海条件 ($kh \gg 1$) では $\tanh kh = 1$ としてよいので, その時の波数 k_0 および波速 c_0 は $k_0 = \sigma^2/g$, $c_0 = g/\sigma$ であり, 長波条件 ($kh \ll 1$) では $\tanh kh = kh$ としてよいので, $k = \sigma/\sqrt{gh}$, $c = \sigma/k = \sqrt{gh}$ という長波の波速を得る. これらの波速から考えると, 深海波は分散するが, 長波は成分波の波速が変わらないので実質的には分散しない.

上記の微小振幅波の解の誘導でわかるように, 微小振幅波の空間波形や時間波形などの変動量は必然的に正弦的な変動をすることになり, それ以外の波形では変形してしまう.

4 ストークス波理論

(1) 基礎方程式と境界条件

ストークス波理論は微小振幅波理論の延長であり、微小振幅波理論と同様に ε を微小量とし、 μ^2 を 1 のオーダーとするが、 ε のある次数までの解を無視しないで求める。そして、 ε^N まで求めた解は第 N 次近似解と呼ばれる。ここでは第 2 次近似解を導くことにより、考え方と具体的な内容を説明する。

上記のオーダーの仮定から式 (19), (21)~(23) において $\mu^2 = 1$ とおき、 ε を残す。厳密に説明すれば、 μ が 1 のオーダーであることから無次元化の際に鉛直方向を水平方向と区別せずに、鉛直方向の代表長さにも L_0 を用いることにより、 $\mu = 1$ とした式が得られる：

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (46)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad (z = -h) \quad (47)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (z = \varepsilon \eta) \quad (48)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left\{ \varepsilon \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \varepsilon \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right\} + g\eta = 0 \quad (z = \varepsilon \eta) \quad (49)$$

(2) 非線形境界条件の展開

水面における境界条件式 (48) および (49) は水面 $z = \varepsilon \eta$ において評価しなければならないが、その η が未知関数なので、複雑な非線形性を有することになる。しかし、水面変動は ε のオーダーの微小量であることから、 $z = 0$ のまわりにテーラー展開して、近似する。

まず、運動学的境界条件式 (48) は、

$$\left[\frac{\partial \eta}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial z} \right]_{z=0} + \varepsilon \eta \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial \eta}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial z} \right]_{z=0} + \dots = 0 \quad (50)$$

より、 ε^1 までの項 (ε^0 と ε^1 の 2 項) をすべて集めれば、

$$\left[\frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial \phi^{(0)}}{\partial z} \right] + \varepsilon \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\eta \frac{\partial \phi^{(0)}}{\partial x} \right) \right] + \dots = 0 \quad (51)$$

である。ここに、肩付き添え字 (0) は $z = 0$ における値を示し、その関数が z による偏微分を含む場合にはその偏微分を先に行ってから $z = 0$ を代入するものとする。力学的境界条件式 (49) も同様に、

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left\{ \varepsilon \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \varepsilon \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right\} + g\eta \right]_{z=0} \\ & + \varepsilon \eta \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left\{ \varepsilon \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \varepsilon \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right\} + g\eta \right]_{z=0} \dots = 0 \end{aligned} \quad (52)$$

のうちに ε^1 までの項をすべて集めることによって、

$$\left[\frac{\partial \phi^{(0)}}{\partial t} + g\eta \right] + \varepsilon \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi^{(0)}}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi^{(0)}}{\partial z} \right)^2 + \eta \frac{\partial^2 \phi^{(0)}}{\partial t \partial z} \right] + \dots = 0 \quad (53)$$

を得る。

従属変数である ϕ および η はこれから ε の級数に展開されるが、無次元化の際の定義式 (17) に ε が含まれていることよって、0 次オーダーから始まることになる。したがって無次元量の展開では 0 次オーダーの項でも次元量では 1 次オーダーとなるので、これを第 1 次近似解と呼ぶことにする。

式(51)および(53)において、第1次近似解を求める際にはそれぞれの左辺第2項は微小項なので無視される。 ε^1 オーダーの式を解いて第2次近似解を求める際には、それぞれの左辺第1項から第2次近似解が現れる。同時に、左辺第2項からも ε^1 のオーダーの項が現れるが、これは第1次近似解を用いて計算されるものなので、既知の関数となる。したがって、それぞれの未知関数は第1項にのみ含まれることになり、しかもそれは線形であるので、容易に解くことができる。このように、ストークス波理論では、第2項以降に既知の低次近似解を代入して確定させながら、第1項に含まれる未知関数について解いていけばよい。

解を求めるに際しては、微小振幅波理論の場合と同様に、式(51)および(53)の第1項から未知関数となる η を除いておく：

$$\left[\frac{\partial^2 \phi^{(0)}}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi^{(0)}}{\partial z} \right] + \varepsilon \left[\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi^{(0)}}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi^{(0)}}{\partial z} \right)^2 + \eta \frac{\partial^2 \phi^{(0)}}{\partial t \partial z} \right\} - g \frac{\partial}{\partial x} \left(\eta \frac{\partial \phi^{(0)}}{\partial x} \right) \right] + \dots = 0 \quad (54)$$

(3) 第1次近似解

第1次近似解は式(46)、(47)、(53)および(54)において $1 (= \varepsilon^0)$ のオーダーの式から求められる。それらは微小振幅波理論の式と同じであるから、解は微小振幅波理論と同じである。ただし、このオーダーの方程式は線形であるから、周期を規定しなければ、様々な周波数成分の重ね合わせが可能である。これはスペクトル解析における不規則波の取り扱いの基礎となる。

微小振幅波理論やストークス波理論では、その中で与えられた周期に一致するもの1成分のみを採用する。しかし、ここでは若干一般化して、第1次近似解として、異なる2成分波の重ね合わせを採用し、その2成分がどのような2次干渉波を作り出すかを見ることにする。これにより、2次干渉による長周期波が求められる。また、2成分を同一化することによってストークス波第2次近似解も得られる。

2成分の第1次近似解を添え字 1 および 2 を使って、

$$\eta_{1,2} = a_{1,2} \cos \theta_{1,2} \quad (55)$$

$$\phi_{1,2} = a_{1,2} c_{1,2} \frac{\cosh k_{1,2}(h+z)}{\sinh k_{1,2}h} \sin \theta_{1,2} \quad (56)$$

と表す。ここに、

$$\theta_{1,2} = k_{1,2}x - \sigma_{1,2}t \quad (57)$$

である。

(4) 2次の非線形項の計算

続いて、 η および ϕ を

$$\eta = [\eta_1 + \eta_2] + \varepsilon[\eta_{II}] \quad (58)$$

$$\phi = [\phi_1 + \phi_2] + \varepsilon[\phi_{II}] \quad (59)$$

と展開し、式(53)および(54)の ε のオーダーまでの精度の式を導く。それぞれの第2項は先頭に ε があるので、中身は0次オーダーまでの精度でよいから、既に求められた式(55)および(56)からあらかじめ計算しておく。

まず、式(56)より、

$$\frac{\partial \phi_{1,2}^{(0)}}{\partial x} = a_{1,2} \sigma_{1,2} C_{t1,2} \cos \theta_{1,2} \quad (60)$$

$$\frac{\partial \phi_{1,2}^{(0)}}{\partial z} = a_{1,2} \sigma_{1,2} \sin \theta_{1,2} \quad (61)$$

$$\frac{\partial^2 \phi_{1,2}^{(0)}}{\partial t \partial z} = -a_{1,2} \sigma_{1,2}^2 \cos \theta_{1,2} \quad (62)$$

である。ここに、

$$C_{t1,2} = \coth k_{1,2} h \quad (63)$$

である。

これらを用いて式(54)の第2項の中の各項を順番に計算する。その中には、成分波1および成分波2のそれぞれの自乗に対応する項も含まれる。しかし、成分波1と成分波2の積の項を計算しておけば、それぞれの自乗の値はほぼ自動的に計算できるので、以下では無視する：

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \phi_1^{(0)}}{\partial x} \frac{\partial \phi_2^{(0)}}{\partial x} + \frac{\partial \phi_1^{(0)}}{\partial z} \frac{\partial \phi_2^{(0)}}{\partial z} + \eta_1 \frac{\partial^2 \phi_2^{(0)}}{\partial t \partial z} + \eta_2 \frac{\partial^2 \phi_1^{(0)}}{\partial t \partial z} \\ &= \frac{a_1 a_2}{2} (\sigma_1 \sigma_2 C_{t1} C_{t2} - \sigma_1^2 - \sigma_2^2 \mp \sigma_1 \sigma_2) \cos(\theta_1 \pm \theta_2) \end{aligned} \quad (64)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\partial \phi_1^{(0)}}{\partial x} \frac{\partial \phi_2^{(0)}}{\partial x} + \frac{\partial \phi_1^{(0)}}{\partial z} \frac{\partial \phi_2^{(0)}}{\partial z} + \eta_1 \frac{\partial^2 \phi_2^{(0)}}{\partial t \partial z} + \eta_2 \frac{\partial^2 \phi_1^{(0)}}{\partial t \partial z} \right\} \\ &= \frac{a_1 a_2}{2} (\sigma_1 \pm \sigma_2) (\sigma_1 \sigma_2 C_{t1} C_{t2} - \sigma_1^2 - \sigma_2^2 \mp \sigma_1 \sigma_2) \sin(\theta_1 \pm \theta_2) \end{aligned} \quad (65)$$

$$\eta_1 \frac{\partial \phi_2^{(0)}}{\partial x} + \eta_2 \frac{\partial \phi_1^{(0)}}{\partial x} = \frac{a_1 a_2}{2} (\sigma_1 C_{t1} + \sigma_2 C_{t2}) \cos(\theta_1 \pm \theta_2) \quad (66)$$

$$-g \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \eta_1 \frac{\partial \phi_2^{(0)}}{\partial x} + \eta_2 \frac{\partial \phi_1^{(0)}}{\partial x} \right\} = \frac{a_1 a_2}{2} g (k_1 \pm k_2) (\sigma_1 C_{t1} + \sigma_2 C_{t2}) \sin(\theta_1 \pm \theta_2) \quad (67)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\partial \phi_1^{(0)}}{\partial x} \frac{\partial \phi_2^{(0)}}{\partial x} + \frac{\partial \phi_1^{(0)}}{\partial z} \frac{\partial \phi_2^{(0)}}{\partial z} + \eta_1 \frac{\partial^2 \phi_2^{(0)}}{\partial t \partial z} + \eta_2 \frac{\partial^2 \phi_1^{(0)}}{\partial t \partial z} \right\} - g \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \eta_1 \frac{\partial \phi_2^{(0)}}{\partial x} + \eta_2 \frac{\partial \phi_1^{(0)}}{\partial x} \right\} \\ &= \frac{a_1 a_2}{2} \left\{ (\sigma_1 \pm \sigma_2) (\sigma_1 \sigma_2 C_{t1} C_{t2} - \sigma_1^2 - \sigma_2^2 \mp \sigma_1 \sigma_2) + g (k_1 \pm k_2) (\sigma_1 C_{t1} + \sigma_2 C_{t2}) \right\} \sin(\theta_1 \pm \theta_2) \end{aligned} \quad (68)$$

ここに、各式の右辺は複合の上側のみをとった表現式と下側のみをとった表現式の和を示すものとする。

(5) 第2次近似解

式(68)には位相 θ_1 と θ_2 の和および差の項が現れた。さらに、成分波1および2のそれぞれの自乗からの項を考えると、式(58)および(59)による η および ϕ をさらに、

$$\eta = [\eta_1 + \eta_2] + \varepsilon[\eta_{1\pm 1} + \eta_{1\pm 2} + \eta_{2\pm 2}] \quad (69)$$

$$\phi = [\phi_1 + \phi_2] + \varepsilon[\phi_{1\pm 1} + \phi_{1\pm 2} + \phi_{2\pm 2}] \quad (70)$$

と展開すればよいことがわかる。

式(46)、(47)および(68)から、 $\phi_{1\pm 2}$ は、

$$\phi_{1\pm 2} = b_{1\pm 2} \cosh(k_1 \pm k_2)(h+z) \sin(\theta_1 \pm \theta_2) \quad (71)$$

となる。これより、

$$\frac{\partial \phi_{1\pm 2}^{(0)}}{\partial t} = -b_{1\pm 2} (\sigma_1 \pm \sigma_2) \cosh(k_1 \pm k_2) h \cos(\theta_1 \pm \theta_2) \quad (72)$$

$$\frac{\partial^2 \phi_{1\pm 2}^{(0)}}{\partial t^2} = -b_{1\pm 2} (\sigma_1 \pm \sigma_2)^2 \cosh(k_1 \pm k_2) h \sin(\theta_1 \pm \theta_2) \quad (73)$$

$$g \frac{\partial \phi_{1\pm 2}^{(0)}}{\partial z} = b_{1\pm 2} g (k_1 \pm k_2) \sinh(k_1 \pm k_2) h \sin(\theta_1 \pm \theta_2) \quad (74)$$

$$\frac{\partial^2 \phi_{1\pm 2}^{(0)}}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi_{1\pm 2}^{(0)}}{\partial z} = b_{1\pm 2} \left\{ -(\sigma_1 \pm \sigma_2)^2 \cosh(k_1 \pm k_2) h + g (k_1 \pm k_2) \sinh(k_1 \pm k_2) h \right\} \sin(\theta_1 \pm \theta_2) \quad (75)$$

となる。

ここで式 (68) および (75) を式 (54) に代入すれば、

$$b_{1\pm 2} = \frac{\varepsilon a_1 a_2 (\sigma_1 \pm \sigma_2) (\sigma_1 \sigma_2 C_{t1} C_{t2} - \sigma_1^2 - \sigma_2^2 \mp \sigma_1 \sigma_2) + g (k_1 \pm k_2) (\sigma_1 C_{t1} + \sigma_2 C_{t2})}{2 (\sigma_1 \pm \sigma_2)^2 \cosh(k_1 \pm k_2) h - g (k_1 \pm k_2) \sinh(k_1 \pm k_2) h} \quad (76)$$

を得る。このとき、式 (64), (69) および (72) を式 (53) に代入して

$$\eta_{1\pm 2} = \frac{\varepsilon a_1 a_2}{2} (k_1 \pm k_2) \times \frac{[(\sigma_1 \sigma_2 C_{t1} C_{t2} - \sigma_1^2 - \sigma_2^2 \mp \sigma_1 \sigma_2) \sinh(k_1 + k_2) h + (\sigma_1 \pm \sigma_2) (\sigma_1 C_{t1} + \sigma_2 C_{t2}) \cosh(k_1 + k_2) h]}{(\sigma_1 \pm \sigma_2)^2 \cosh(k_1 \pm k_2) h - g (k_1 \pm k_2) \sinh(k_1 \pm k_2) h} \cos(\theta_1 \pm \theta_2) \quad (77)$$

を得る。

式 (77) は、2 成分の 2 次非線形干渉による水面変動を表しているが、 $\cos(\theta_1 \pm \theta_2)$ の形より、2 成分の波数および角周波数の和となる高周波数成分と、差となる低周波数成分（長周期成分）から成り立っている。

(6) 2 次干渉による長周期波

長周期波成分の性質を、簡単な場合についてももう少し具体的にみる。

2 成分波の各周波数が極めて近く、しかも振幅が等しい場合で、いわゆるうなり現象を考える。 $\sigma_1 = \sigma + \Delta\sigma$, $\sigma_2 = \sigma - \Delta\sigma$, $k_1 = k + \Delta k$, $k_2 = k - \Delta k$ ($|\Delta\sigma| \ll \sigma$, $|\Delta k| \ll k$) および $a_1 = a_2 = a$ とおくと、1 次の水面変動は

$$\begin{aligned} \eta_1 + \eta_2 &= a \cos\{(k + \Delta k)x - (\sigma + \Delta\sigma)t\} + a \cos\{(k - \Delta k)x - (\sigma - \Delta\sigma)t\} \\ &= 2a \cos(\Delta kx - \Delta\sigma t) \cos(kx - \sigma t) \\ &= A \cos(kx - \sigma t) \end{aligned} \quad (78)$$

となる。ここに、 A は振幅で、角周波数 $\Delta\sigma$ 、波数 Δk で時空間的にゆっくりと変動することになる。

$$A = 2a \cos(\Delta kx - \Delta\sigma t) \quad (79)$$

これに対応して式 (77) で表される 2 次の長周期波成分は

$$\eta_{1-2} = \frac{\varepsilon a^2 (2\Delta k)}{2} \frac{[(\sigma^2 C_t^2 - \sigma^2) \sinh 2\Delta k h + 2\Delta\sigma 2\sigma C_t \cosh 2\Delta k h]}{(2\Delta\sigma)^2 \cosh 2\Delta k h - g(2\Delta k) \sinh 2\Delta k h} \cos\{2(\Delta kx - \Delta\sigma t)\} \quad (80)$$

となり、さらに $\Delta\sigma/\Delta k \sim d\sigma/dk = c_g$ より、

$$\eta_{1-2} = -\frac{\varepsilon a^2}{2} \frac{\sigma^2 (C_t^2 - 1) h + 2\sigma c_g C_t}{gh - c_g^2} \left[2 \cos^2(\Delta kx - \Delta\sigma t) - 1 \right] \quad (81)$$

であり、これに式 (79) を用いれば、

$$\eta_{1-2} = -\frac{\varepsilon}{4} \frac{\sigma^2 (C_t^2 - 1) h + 2\sigma c_g C_t}{gh - c_g^2} \left[A^2 - \overline{A^2} \right] \quad (82)$$

となる。すなわち、2 次の非線形干渉による長周期波は、1 次の成分波の振幅の自乗に比例して水位が下がるようなものになる。これが set-down 波と呼ばれているもので、サーフビートや湾水振動の主な原因の一つと考えられている。波向の違いも含めた 2 次長周期波の解は木村 (1985) に与えられている。

(7) ストークス波の第2次近似解

ストークス波理論では、1次の成分波を1個だけとり、2次以降の自己干渉波を求めていく。いま、第1次近似解として添え字₁の成分のみをとることとする。積の演算において、2成分波の相互干渉の場合は2通りの組み合わせがあるのに対して、1成分波の自己干渉の場合には1通りの組み合わせしかないので、2次の非線形項の係数が(4)および(5)の相互干渉の場合の半分となる。よって、式(76)、(71)および(77)から、

$$b_{1+1} = \varepsilon a^2 \frac{3\sigma}{8 \sinh^4 kh} \quad (83)$$

$$\phi_{1+1} = \varepsilon a^2 \frac{3\sigma}{8 \sinh^4 kh} \cosh 2k(h+z) \sin 2\theta \quad (84)$$

$$\eta_{1+1} = \frac{\varepsilon a^2 k}{4} C_t (3C_t^2 - 1) \cos 2\theta \quad (85)$$

が得られる。ただし、ここでは1成分なので a, σ, k および θ の添え字₁は省略した。

以上から、1次オーダーと2次オーダーの解を加えれば、2次近似解として

$$\eta = a \cos(kx - \sigma t) + \frac{\varepsilon a^2 k}{4} C_t (3C_t^2 - 1) \cos 2(kx - \sigma t) \quad (86)$$

$$\phi = ac \frac{\cosh k(h+z)}{\sinh kh} \sin(kx - \sigma t) + \varepsilon ka^2 c \frac{3 \cosh 2k(h+z)}{8 \sinh^4 kh} \sin 2(kx - \sigma t) \quad (87)$$

が得られる。これがストークス波第2次近似解である。ストークス波2次近似解では、2倍周波数成分が基本周波数成分に加わるために、波峰が尖り、波谷が平坦になって、上下に非対称となる非線形波の特徴が現れる。

この計算を続けることにより、高次近似解が求められるが、計算量は急激に増大する。Skjelbreia and Hendrickson (1960) が初めて第5次近似解を求めた。Isobe and Kraus (1983a) にはストークス波第3次近似解の誘導が詳細に説明され、磯部ほか (1978) にはその第5次近似解がとりまとめられているほか、Fenton (1990) も第5次近似解を求めている。また、コンピューターを用いてストークス波の高次近似解を求めた例として、Schwartz (1974), Cokelet (1977), Nishimura *et al.* (1977) などがある。

5 クノイド波理論

(1) 基礎方程式と境界条件

クノイド波理論では浅水域の非線形波を対象とするため、 ε と μ がともに小さく、 ε のオーダーが μ^2 のオーダーに等しいと仮定する。したがって、オーダーリングされた無次元基礎方程式および境界条件は式(19)~(23)の形のまま使う。当面使わないベルヌーイの式(20)を除いて再掲する：

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{1}{\mu^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (88)$$

$$\frac{1}{\mu^2} \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad (z = -h) \quad (89)$$

$$\frac{1}{\mu^2} \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (z = \varepsilon \eta) \quad (90)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left\{ \varepsilon \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \frac{\varepsilon}{\mu^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right\} + g\eta = 0 \quad (z = \varepsilon \eta) \quad (91)$$

(2) 非線形境界条件の展開

ストークス波の場合と同様に、水面境界条件式 (90) および (91) を平均水面 $z = 0$ のまわりにテーラー展開する。その際に ϕ が (x, z, t) に対する一般的な関数であるとする、計算があまりにも煩雑になるので、 μ^{-2} のオーダーの式から ϕ の 0 次のオーダーでは z に無関係な (x, t) の関数となることをあらかじめ考慮して、 $\mu^2 \sim \varepsilon$ のオーダーまで展開する：

$$\left[\frac{\partial \eta}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{1}{\mu^2} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right]_{z=0} + \varepsilon \eta \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial \eta}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{1}{\mu^2} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right]_{z=0} = 0 \quad (92)$$

$$\left[\frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{1}{\mu^2} \frac{\partial \phi^{(0)}}{\partial z} \right] + \mu^2 \left[\frac{\varepsilon}{\mu^2} \frac{\partial \phi^{(0)}}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{\mu^4} \eta \frac{\partial^2 \phi^{(0)}}{\partial z^2} \right] + \dots = 0 \quad (93)$$

$$\left[\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left\{ \varepsilon \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \frac{\varepsilon}{\mu^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right\} + g\eta \right]_{z=0} + \dots = 0 \quad (94)$$

$$\left[\frac{\partial \phi^{(0)}}{\partial t} + g\eta \right] + \mu^2 \left[\frac{\varepsilon}{\mu^2} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi^{(0)}}{\partial x} \right)^2 \right] + \dots = 0 \quad (95)$$

したがって、解くべき方程式は、基礎方程式として式 (88)、境界条件として式 (89)、(93) および (95) となる。これを解くのに、 ϕ および η を級数展開して各方程式に代入し、低次の項から順次解く方法が一般的である。しかし、以下では、級数の各項だけでなく、全体がどのような解になっているかを常に把握しながら計算を進めるために、級数展開を前提としながらも、各次数に分離しないで再代入法により各次数までの解全体を取り扱っていく。

(3) μ^{-2} オーダーの方程式の解

μ^2 のオーダーでは基礎方程式 (88) は

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (96)$$

となるから、 z で 2 回積分して、

$$\phi = zg_1(x, t) + f_1(x, t) \quad (97)$$

を得る。ここで、底面境界条件式 (89) より、

$$g_1 = 0 \quad (z = -h) \quad (98)$$

であるから、

$$\phi = f_1 \quad (99)$$

となる。この結果、式 (95) はもちろんのこと、式 (93) にも μ^{-2} のオーダーの項はない。

(4) μ^0 オーダーの方程式の解

式 (88) に直前のオーダーでの解である式 (99) を代入すれば、

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \mu^2 \left[-\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} \right] \quad (100)$$

となるが、これを積分して

$$\phi = [f_1] + \mu^2 \left[-\frac{z^2}{2} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} + zg_2(x, t) + f_2(x, t) \right] \quad (101)$$

を得る。再び底面境界条件式 (89) を考慮すれば、

$$h \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} + g_2 + \frac{\partial f_1}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad (102)$$

すなわち、

$$g_2 = -\frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial f_1}{\partial x} \right) \quad (103)$$

となる。よって、

$$\phi = [f_1] + \mu^2 \left[-\frac{z^2}{2} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} - z \frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial f_1}{\partial x} \right) + f_2 \right] \quad (104)$$

であり、これを水面の境界条件式 (93) および (95) に代入することにより、

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[h \frac{\partial f_1}{\partial x} \right] = 0 \quad (105)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + g\eta = 0 \quad (106)$$

を得る。このオーダーでは $u = \partial f_1 / \partial x$ であることを考慮すれば、上の2式は、線形長波の基礎方程式に他ならない。

(5) μ^2 オーダーの方程式の解

直前のオーダーで求められた式 (104) を再び式 (88) に代入すれば、

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \mu^2 \left[-\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} \right] + \mu^4 \left[\frac{z^2}{2} \frac{\partial^4 f_1}{\partial x^4} + z \frac{\partial^3}{\partial x^3} \left(h \frac{\partial f_1}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} \right] \quad (107)$$

であり、 z で積分して、

$$\begin{aligned} \phi = & [f_1] + \mu^2 \left[-\frac{z^2}{2} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} - z \frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial f_1}{\partial x} \right) + f_2 \right] \\ & + \mu^4 \left[\frac{z^4}{24} \frac{\partial^4 f_1}{\partial x^4} + \frac{z^3}{6} \frac{\partial^3}{\partial x^3} \left(h \frac{\partial f_1}{\partial x} \right) - \frac{z^2}{2} \frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} + z g_3(x, t) + f_3(x, t) \right] \end{aligned} \quad (108)$$

となる。これを底面境界条件式 (89) に代入すれば、

$$\begin{aligned} & \left[h \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial f_1}{\partial x} \right) \right] + \mu^2 \left[-\frac{h^3}{6} \frac{\partial^4 f_1}{\partial x^4} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^3}{\partial x^3} \left(h \frac{\partial f_1}{\partial x} \right) + h \frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} + g_3 \right] \\ & + \left[\left\{ \frac{\partial f_1}{\partial x} \right\} + \mu^2 \left\{ -\frac{h^2}{2} \frac{\partial^3 f_1}{\partial x^3} + h \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(h \frac{\partial f_1}{\partial x} \right) + \frac{\partial f_2}{\partial x} \right\} \right] \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \end{aligned} \quad (109)$$

であるから、

$$g_3 = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{h^3}{6} \frac{\partial^3 f_1}{\partial x^3} - \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(h \frac{\partial f_1}{\partial x} \right) - h \frac{\partial f_2}{\partial x} \right\} \quad (110)$$

を得る。したがって、

$$\begin{aligned} \phi = & [f_1] + \mu^2 \left[-\frac{z^2}{2} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} - z \frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial f_1}{\partial x} \right) + f_2 \right] \\ & + \mu^4 \left[\frac{z^4}{24} \frac{\partial^4 f_1}{\partial x^4} + \frac{z^3}{6} \frac{\partial^3}{\partial x^3} \left(h \frac{\partial f_1}{\partial x} \right) - \frac{z^2}{2} \frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} + z \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{h^3}{6} \frac{\partial^3 f_1}{\partial x^3} - \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(h \frac{\partial f_1}{\partial x} \right) - h \frac{\partial f_2}{\partial x} \right\} + f_3 \right] \end{aligned} \quad (111)$$

となる。これを水面における境界条件式 (93) および (95) に代入すれば、

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[(h + \varepsilon \eta) \frac{\partial f_1}{\partial x} + \mu^2 \left\{ -\frac{h^3}{6} \frac{\partial^3 f_1}{\partial x^3} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(h \frac{\partial f_1}{\partial x} \right) + h \frac{\partial f_2}{\partial x} \right\} \right] = 0 \quad (112)$$

$$\left[\frac{\partial f_1}{\partial t} + g\eta \right] + \left[\mu^2 \frac{\partial f_2}{\partial t} + \varepsilon \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (113)$$

となる。上の2式に $\eta = \eta_1 + \varepsilon\eta_2$ のように展開された形式を代入すれば、未知関数が η_1, η_2, f_1 および f_2 の4個であるのに対し、それぞれの式において1のオーダーと $\varepsilon \sim \mu^2$ のオーダーの2個の式ができることから合計4個の式が得られるから、原理的には初期条件と境界条件が与えられれば解が求められることになる。

(6) ブシネスク方程式

ここで、上の2式において、 f_1 および f_2 のかわりに、それらを含む流速を用いて書き直す。まず、 ϕ を μ^2 まで表現した式 (104) より、

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \left[\frac{\partial f_1}{\partial x} \right] + \mu^2 \left[-\frac{z^2}{2} \frac{\partial^3 f_1}{\partial x^3} - z \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(h \frac{\partial f_1}{\partial x} \right) + \frac{\partial f_2}{\partial x} \right] \quad (114)$$

である。平均流速 \bar{u} は

$$\bar{u} = \frac{1}{h + \varepsilon\eta} \int_{-h}^{\varepsilon\eta} u \, dz \quad (115)$$

によって定義されるから、これに式 (114) を代入して、

$$\bar{u} = \left[\frac{\partial f_1}{\partial x} \right] + \mu^2 \left[-\frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 f_1}{\partial x^3} + \frac{h}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(h \frac{\partial f_1}{\partial x} \right) + \frac{\partial f_2}{\partial x} \right] \quad (116)$$

を得る。

上式を用いて式 (112) および (113) を \bar{u} によって書き換えるが、それらの2式が $\varepsilon \sim \mu^2$ の精度の式であることから、2式中で1のオーダーの項には式 (116) をそのまま用いるが、 $\varepsilon \sim \mu^2$ のオーダーの項には上式の右辺第1項のみを取ってよい。その結果、

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \{ (h + \varepsilon\eta) \bar{u} \} = 0 \quad (117)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \varepsilon \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = \mu^2 \left[-\frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial t \partial x^2} + \frac{h}{2} \frac{\partial^3}{\partial t \partial x^2} (h \bar{u}) \right] \quad (118)$$

を得るが、これが Peregrine (1967) によって導かれたブシネスク方程式である。なお、式 (104) を z で微分し、式 (116) の第1項のみを取って代入することにより、鉛直流速に対する μ^2 の精度の式として

$$w = \frac{\partial \phi}{\partial z} = \mu^2 \left[-\frac{\partial}{\partial x} \{ (h + z) \bar{u} \} \right] \quad (119)$$

を得る。

式 (117) は鉛直方向に積分された連続式に他ならない。式 (118) は運動方程式であるが、左辺には局所加速度項、移流項、静水圧勾配があり、右辺は、連続式を用いて鉛直流速で表せばわかるように、鉛直加速度の影響による静水圧分布の補正項となっている。

ブシネスク方程式には線形項に対して ε または μ^2 のオーダーの項が含まれるが、これらの項には0次の関係式を代入しても理論的な精度の面からは問題ない。そこで、数値的な意味で分散関係式ができるだけ大きな水深でもある程度の精度で満たされるように工夫した修正ブシネスク方程式が種々提案されている (Madsen *et al.*, 1991, 1992; Nwogu, 1993)。

(7) クノイド波第1次近似解

ブシネスク方程式において、保存波を考えるとクノイド波第1次近似解になる。まず一様水深を考慮して $h = \text{const.}$ とすれば、式 (118) は、

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\bar{u}^2}{2} \right) + g \frac{\partial \eta}{\partial x} - \mu^2 \frac{h^3}{3} \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial t \partial x^2} = 0 \quad (120)$$

となる。

そこで、保存波を仮定して、 $\eta = \eta(x - ct)$ および $\bar{u} = \bar{u}(x - ct)$ とおけば、' を x に関する微分を表すものとして、式(117)は、

$$-c\eta' + [(h + \varepsilon\eta)\bar{u}]' = 0 \quad (121)$$

であるから、1回積分して、

$$-c\eta + (h + \varepsilon\eta)\bar{u} = \text{const.} \quad (122)$$

を得る。また、式(120)も同様に、

$$-c\bar{u}' + \varepsilon \left(\frac{\bar{u}^2}{2} \right)' + g\eta' + \mu^2 \frac{h^2}{3} c\bar{u}''' = 0 \quad (123)$$

$$-c\bar{u} + \varepsilon \left(\frac{\bar{u}^2}{2} \right) + g\eta + \mu^2 \frac{h^2}{3} c\bar{u}' = \text{const.} \quad (124)$$

となる。

式(122)および(124)の1のオーダーの項のみを取ると、

$$-c\eta + h\bar{u} = \text{const.} \quad (125)$$

$$-c\bar{u} + g\eta = \text{const.} \quad (126)$$

であるから、これらから η を消去すれば、

$$(c^2 - gh)\bar{u} = \text{const.} \quad (127)$$

を得る。 $\bar{u} \neq 0$ である解を持つためには

$$c = \sqrt{gh} \quad (128)$$

である必要があり、またこのとき

$$\bar{u} = \sqrt{g/h}\eta \quad (129)$$

である。

式(128)より、 μ^2 のオーダーまでの波速を

$$c = \sqrt{gh}(1 + \varepsilon c_1) \quad (130)$$

とおいて、式(122)および式(124)に代入し、それぞれに g および c を乗じて加えれば線形項の η が消去できる。非線形項中の η については式(129)を用いて消去すれば、

$$\mu^2 \frac{h^2}{3} \sqrt{gh} \bar{u}'' + \varepsilon \frac{3}{2} \bar{u}^2 - \varepsilon 2c_1 \sqrt{gh} \bar{u} = \text{const.} \quad (131)$$

を得る。

この2階非線形常微分方程式の解はヤコビの楕円関数 cn^2 となることがわかっているので、

$$\eta = H \left\{ \text{cn}^2 \left[\frac{2K}{L}(x - ct) \right] - \overline{\text{cn}^2} \right\}, \quad \bar{u} = H \sqrt{\frac{g}{h}} \left\{ \text{cn}^2 \left[\frac{2K}{L}(x - ct) \right] - \overline{\text{cn}^2} \right\} \quad (132)$$

とおく。ここに、

$$\overline{\text{cn}^2} = \frac{E}{\kappa^2 K} - \frac{(1 - \kappa^2)}{\kappa^2} \quad (133)$$

であり、 κ は楕円関数の母数、 K および E は第1種および第2種の完全楕円積分である。

ここで, cn 関数の微分公式より,

$$(\text{cn}^2)'' = -6\kappa^2 \text{cn}^4 + 4(2\kappa^2 - 1)\text{cn}^2 + 2(1 - \kappa^2) \quad (134)$$

を用いれば,

$$\mu^2 \frac{h^2}{3} \sqrt{gh} \bar{u}'' = \mu^2 \frac{h^2}{3} gH \left(\frac{2K}{L} \right)^2 \left\{ -6\kappa^2 \text{cn}^4 + 4(2\kappa^2 - 1)\text{cn}^2 + 2(1 - \kappa^2) \right\} \quad (135)$$

$$\varepsilon \frac{3}{2} \bar{u}^2 = \varepsilon \frac{3}{2} H^2 \frac{g}{h} \left\{ \text{cn}^4 - 2\text{cn}^2 \text{cn}^2 + (\text{cn}^2)^2 \right\} \quad (136)$$

$$-\varepsilon 2c_1 \sqrt{gh} \bar{u} = -\varepsilon 2c_1 gH \left\{ \text{cn}^2 - \text{cn}^2 \right\} \quad (137)$$

であるから, 式(131)の cn^4 および cn^2 の係数を 0 とすることによって,

$$\frac{16}{3} \kappa^2 K^2 = \frac{\varepsilon}{\mu^2} \frac{HL^2}{h^3} = \frac{\hat{H}\hat{L}^2}{\hat{h}^3} \equiv U_r \quad (138)$$

$$c_1 = \frac{H}{h} \left(\frac{1}{2} + \frac{1 - \kappa^2}{\kappa^2} - \frac{3}{2} \frac{E}{\kappa^2 K} \right) \quad (139)$$

を得る. 式(138)は, 楕円関数の母数がアーセル数から決定されることを表しているが, 母数が楕円関数の非対称性を決めるから, 結局クノイド波第1次近似解の非対称度はアーセル数によって一義的に決定する.

クノイド波第1次近似解を実際に数値計算する方法については Isobe (1985) に詳しい. また, クノイド波の3次近似解の組織的で詳細な誘導が Isobe and Kraus (1983b) に与えられ, コンピューターによって高次近似解を求めるための方法が Fenton (1999) にとりまとめられている.

6 保存波の数値解法

保存波の解を数値的に求める方法が種々開発されている. その中で広く使われているのが, Dean (1965) の流れ関数法である.

この方法ではまず, 流れ関数 ψ を

$$\psi = \sum_{n=1}^N B_n \sinh nkz \cos n(kx - \sigma t) \quad (140)$$

とおく. すると, 非回転条件式(4)から導かれるラプラス方程式と底面境界条件を自動的に満たす. 残る運動学的および力学的水面境界条件のうち, 運動学的水面境界条件を満たすように水面変位 η を決定し, 力学的水面境界条件を最小自乗法によって近似的に満たすように係数 B_n ($n = 1, 2, \dots, N$), 波数 k および質量輸送 M_x を決定するというものである.

7 有限振幅波理論の適用範囲

(1) ストークス波理論の理論的適用範囲

摂動解を適用するためには, 級数が収束することが必要となる. このためには, 高次になるにしたがって項の絶対値が小さくなる必要がある. そこで, ストークス波の第2次近似解を利用して, 1次と2次のオーダーの項の大きさの比較を行う.

式(86)において, 2次と1次のオーダーの項の比 r を取ると

$$r \propto \varepsilon ak C_i (3C_i^2 - 1) \quad (141)$$

であり、ストークス波では $\mu = 1$ とおいたことから、 $\hat{h}_0 = \hat{L}_0$ であることを考慮して深海領域と長波領域での式を導けば、

$$r \propto \varepsilon a k = \frac{\hat{H}}{\hat{L}} \quad (\hat{h}/\hat{L} \gg 1) \quad (142)$$

$$r \propto \frac{\varepsilon a k}{(kh)^3} = \frac{\hat{H}\hat{L}^2}{\hat{h}^2} \equiv U_r \quad (\hat{h}/\hat{L} \ll 1) \quad (143)$$

となる。すなわち、ストークス波は深海領域では波形勾配 \hat{H}/\hat{L} が限界値以下であれば適用可能であり、長波領域ではアーセル数 U_r が限界値以下であれば適用可能であることが、理論的に導かれる。

(2) クノイド波理論の理論的適用範囲

クノイド波についても同様に、本稿の中では波速 c のみが2項目まで解けているので、この2項の比を調べる。式(130)に式(139)を代入すれば、

$$r \propto \varepsilon \frac{H}{h} \left(\frac{1}{2} + \frac{1 - \kappa^2}{\kappa^2} - \frac{3}{2} \frac{E}{\kappa^2 K} \right) \quad (144)$$

となるが、深海領域では、 $\kappa \rightarrow 0$, $K \rightarrow \pi/2$, $E \rightarrow \pi/2$ となるから、

$$r \propto \varepsilon \frac{H}{h} \frac{1}{\kappa^2} \quad (145)$$

であり、これに式(138)を考慮すれば、

$$r \propto \mu^2 \frac{h^2}{L^2} = \left(\frac{\hat{h}}{\hat{L}} \right)^2 \quad (\hat{h}/\hat{L} \gg 1) \quad (146)$$

を得る。また、長波領域では $\kappa \rightarrow 1$, $K \rightarrow \infty$, $E \rightarrow 0$ となることから、

$$r \propto \varepsilon \frac{H}{h} = \frac{\hat{H}}{\hat{h}} \quad (\hat{h}/\hat{L} \ll 1) \quad (147)$$

である。すなわち、クノイド波は深海領域側では相対水深 \hat{h}/\hat{L} が限界値以下で適用可能となり、長波領域では相対波高 \hat{H}/\hat{h} が限界値以下で適用可能となる。

(3) 各理論の適用範囲

図-2は、力学的水面境界条件に対する無次元誤差が1%となる線を種々の次数の有限振幅波理論について描いたものである。この結果と理論的考察から有限振幅波理論の適用範囲を図示したものが図-3であり、これにしたがって理論を選べばよい。

8 有限振幅性を表すパラメーター

有限振幅性の度合いとしては、2通りの考え方がある。

まず、微小振幅波の波形は正弦波であり、上下に対象であるが、有限振幅波では上下に非対称となる。そこで、上下の非対称性に着目して、それに関係するパラメーターを有限振幅性の指標とするのが第1の考え方である。これは微小振幅波からのずれを有限振幅性と考えている。

次に、保存波にはこれ以上の波高では解が存在しないという限界波高があり、物理的には碎波波高に相当する。そこで、対象とする波の波高などを限界波のもので割った比率で有限振幅性を表すのが第2の考え方である。こちらは、限界波に比した相対的有限振幅性がわかり、特にその値が1のときに存在限界(碎波限界)になるという物理的意味をもっているが、波形の非対称度がどうなのかというようなことには直接関係しない。

以下にそれぞれのパラメーターを紹介する。

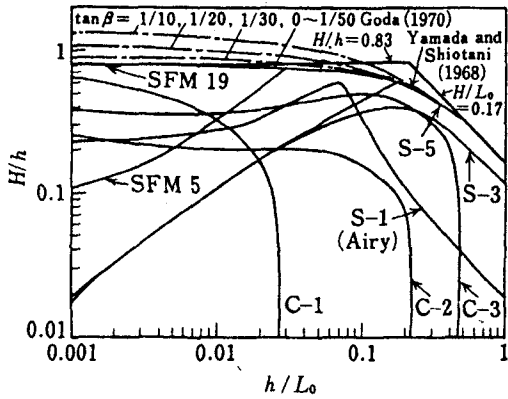


図-2 力学的な水面境界条件に対する等残差線の比較 ($E_D/gH = 0.01$, S: ストークス波, C: クノイド波, SFM: 流れ関数法, 数字は次数を表す)

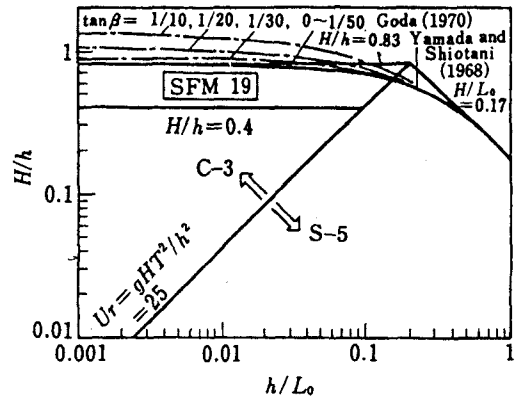


図-3 有限振幅波理論の適用範囲 (S: ストークス波, C: クノイド波, SFM: 流れ関数法, 数字は次数を表す)

(1) 波形の非対称性に着目したパラメター

深海条件ではストークス波理論が有効である。水面波形の非対称性を取り上げると、基本周波数成分に対する2倍周波数成分の比率 $\Pi_{\eta, \text{deep}}$ が非対称性に寄与することになる。式(86)からこれを求めると $\epsilon ka C_t (3C_t^2 - 1)/4$ であるが、深海条件を考慮して $C_t = 1$ とし、さらにストークス波理論では $\mu = \hat{h}_0/\hat{L}_0 = 1$ とおくことを考慮して次元量になおした上で、比例定数を無視すれば、

$$\Pi_{\eta, \text{deep}} = \hat{H}/\hat{L} \quad (148)$$

となって、波形勾配が有限振幅性の指標となる。

長波領域ではクノイド波理論が有効であり、この場合の波形の非対称性は cn^2 の波形で決まるから、楕円関数の母数が非対称性を決めることになる。式(138)より、さらにそれを決めるのはアーセル数である。すなわち、長波領域での非対称性パラメター $\Pi_{\eta, \text{shallow}}$ は、

$$\Pi_{\eta, \text{shallow}} = \hat{H}\hat{L}^2/\hat{h}^3 = U_r \quad (149)$$

であり、 $c = L/T \sim \sqrt{gh}$ を用いると、ほぼ同義のパラメター $\Pi'_{\eta, \text{shallow}}$ が定義される：

$$\Pi'_{\eta, \text{shallow}} = \hat{g}\hat{H}\hat{T}^2/\hat{h}^2 = U_s \quad (150)$$

以上に基づき、合田(1983)は深海領域から長波領域に至る全水深で有効となる非線形性パラメター Π を定義している：

$$\Pi = (\hat{H}/\hat{L}) \coth^3(2\pi\hat{h}/\hat{L}) \quad (151)$$

このパラメターは深海条件および長波条件で式(148)および(149)に比例係数を除いて一致する。

(2) 限界波に対する相対的有限振幅性を表すパラメター

保存波の存在限界の波の波峰は 120° の角度をなして尖り、波峰での流速 u_c と波速 c との比が1になる。

以下の議論では、波速の定義によって波に付随する一様流速 U の影響を除くため、これをあらかじめ差し引くことにする。まず、

$$U = \frac{1}{L} \int_0^L u \, dx \quad (152)$$

であるが、非回転条件式より U は波谷より下であれば高さによらない。そこで、一様流速を除いた波峰流速 u_c^I 、底面流速 u_b^I および波速 c^I を定義する：

$$u_c^I = u_c - U, \quad u_b^I = u_b - U, \quad c^I = c - U \quad (153)$$

まず、限界波では流速が波速に等しくなるという条件から、流速波速比 Λ_1 を

$$\Lambda_1 = \frac{u_c^I}{c^I} \quad (154)$$

と定義すれば、この値が限りなく 0 に近いときが微小振幅波で、1 のときが限界波となる。

限界波の波峰流速と波速が等しくなるという条件から、Abohadima and Isobe (1999) に沿って別のパラメータを導く。まず、保存波を波速と同じ速度で移動する移動座標系で記述すれば定常化されるから、定常流のベルヌーイの式を波峰と底面に適用することにより、

$$\frac{1}{2}(u_c^I - c^I)^2 + g\eta_c = \frac{1}{2}(u_b^I - c^I)^2 - gh + \frac{p|_{z=-h}}{\rho} \quad (155)$$

となる。右辺の 1 波長平均をとれば、底面圧力はその上の水塊を支えていることから平均値が厳密に静水圧 ρgh と等しくなる。したがって、

$$\frac{1}{2}(u_c^I - c^I)^2 + g\eta_c = \frac{1}{2}(\overline{u_b^I}^2 + c^I{}^2) \quad (156)$$

である。ここに、 $\overline{\quad}$ は 1 波長平均を表し、上式には式 (153) より $\overline{u_b^I} = 0$ となることを用いてある。この式を 2 次方程式の形に変形すれば、

$$\left(\frac{u_c^I}{c^I}\right)^2 - 2\left(\frac{u_c^I}{c^I}\right) + \frac{2g\eta_c - \overline{u_b^I}^2}{c^I{}^2} = 0 \quad (157)$$

となる。ここで、 u_c^I/c^I が 0 から 1 の間に解をもつためには判別式が 0 以上であればよいので、

$$\Lambda_2 = \frac{2g\eta_c - \overline{u_b^I}^2}{c^I{}^2} \quad (158)$$

が 1 以下であればよく、 $\Lambda_2 = 1$ は $\Lambda_1 = 1$ 、すなわち限界波に対応している。さらに $\Lambda_2 = 0$ の極限が微小振幅波であるから、 Λ_2 も 0 と 1 の間をとる非線形パラメータとなる。

第 3 のパラメータは

$$\Lambda_3 = \frac{\Lambda_1^2}{\Lambda_2} = \frac{u_c^I{}^2}{2(g\eta_c - \overline{u_b^I}^2)} \quad (159)$$

と定義されるが、これも 0 から 1 の値をとることが容易に証明できる。

以上により、限界波に対する相対的有限振幅性を表す 3 つのパラメータが定義された。これらはいずれも相対水深にかかわらず有効である。また、 $\overline{u_b^I}^2$ は深海波と孤立波に対しては 0 であり、中間の水深でも 2 次のオーダーの量なので小さいので、近似的には無視できる。これも考慮すると、特に Λ_2 は波峰高から有限振幅性を評価するパラメータとして有用であろう。

9 波に伴う平均量

(1) 波に伴う平均量の定義

波動運動にともなう諸量を底面から水面まで積分し、さらに 1 周期または 1 波長の平均を取って、そこから静水状態における値を差し引いた特性量が定義される。これらは静水状態に比べて波がある場合には平均的(定常的)にも余分な作用があるという意味で重要である。

特性量としては波による質量フラックス (質量輸送) M_x , 運動エネルギー E_K , 位置エネルギー E_P , (全) エネルギー E , 運動量フラックス (ラディエーション応力) S_{xx} , S_{yy} , S_{xy} , エネルギーフラックス F_x などであり, 次式で定義される.

$$M_x = \overline{\int_{-h}^{\eta} \rho u dz} \quad (160)$$

$$E_P = \overline{\int_{-h}^{\eta} \rho g z dz}, \quad E_K = \overline{\int_{-h}^{\eta} \frac{\rho}{2} (u^2 + w^2) dz}, \quad E = E_P + E_K \quad (161)$$

$$S_{xx} = \overline{\int_{-h}^{\eta} (p + \rho u^2) dz} - \frac{1}{2} \rho g h^2, \quad S_{yy} = \overline{\int_{-h}^{\eta} (p + \rho v^2) dz} - \frac{1}{2} \rho g h^2, \quad S_{xy} = S_{yx} = \overline{\int_{-h}^{\eta} (\rho uv) dz} \quad (162)$$

$$F_x = \overline{\int_{-h}^{\eta} \left\{ p + \frac{\rho}{2} (u^2 + w^2) + \rho g z \right\} u dz} \quad (163)$$

M_x の定義式を解釈し直すと, M_x は積分された平均運動量であるということもできる.

ラディエーション応力の定義では, 一般的なものにするために流速の y 方向成分 v の寄与も含めてあるが, x 方向への進行波の場合には $v = 0$ である.

また, エネルギーフラックス F_x は, 非圧縮・非回転の運動の場合には, 速度ポテンシャルを用いて表したベルヌーイの式 (20) より,

$$F_x = -\rho \overline{\int_{-h}^{\eta} \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial x} dz} \quad (164)$$

と簡単化される. さらに x 方向に進行する保存波であれば $\partial \phi / \partial t = -c \partial \phi / \partial x$ であるから,

$$F_x = \rho c \overline{\int_{-h}^{\eta} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 dz} = \rho c \overline{\int_{-h}^{\eta} u^2 dz} \quad (165)$$

となる.

(2) 微小振幅波に伴う平均量

式 (160), (161) および (163) に, 微小振幅波理論による表示式 (41), (43) および (44) を代入して ε^2 のオーダーまで計算すれば

$$E = \frac{1}{8} \rho g H^2, \quad E_P = E_K = \frac{E}{2} = \frac{1}{16} \rho g H^2 \quad (166)$$

$$M_x = \frac{E}{c} \quad (167)$$

$$F_x = E c_g = E c n \quad (168)$$

を得る. ここに, n は群速度 c_g と波速 c の比で,

$$n = \frac{c_g}{c} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right) \quad (169)$$

である.

ラディエーション応力の定義式には圧力が含まれているが, これを微小振幅波理論の解に基づいて ε^2 まで求めなければならないので, 注意を要する. 連続式 (1) (無次元量で扱っているものとして \wedge を除く) を w 倍した式

$$w \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0 \quad (170)$$

を z 方向の運動方程式 (3) に加えれば,

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial uw}{\partial x} + \frac{\partial w^2}{\partial z} = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (171)$$

である。これを任意の高さ z から水面 η まで積分し、ライプニッツの公式を用いて展開すれば、

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_z^\eta w dz - \frac{\partial \eta}{\partial t} w \Big|_{z=\eta} + \frac{\partial}{\partial x} \int_z^\eta uw dz - \frac{\partial \eta}{\partial x} uw \Big|_{z=\eta} + w^2 \Big|_{z=\eta} - w^2 \Big|_{z=z} = -g(\eta - z) - \frac{1}{\rho} (p|_{z=\eta} - p|_{z=z}) \quad (172)$$

となる。ここで、水面境界条件式 (7) および (8) を用いれば、 p を表す厳密な式が得られる：

$$p = \rho g(\eta - z) - \rho w^2 + \frac{\partial}{\partial t} \int_z^\eta \rho w dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_z^\eta \rho uw dz \quad (173)$$

これを、定義式 (162) に代入すれば、

$$S_{xx} = E \left(2n - \frac{1}{2} \right), \quad S_{yy} = E \left(n - \frac{1}{2} \right), \quad S_{xy} = S_{yx} = 0 \quad (174)$$

を得る。

(3) 波に伴う平均量の相互関係式

Longuet-Higgins (1975) は任意の振幅の保存波に対する平均諸量の相互関係を求めている。そこでは一様流速 $U = 0$ を仮定しているが、これは波速の第 1 定義を用いたことになる。たとえば、波速の第 2 定義では、平均流速 U は 0 でない代わりに質量輸送 M_x が 0 となるように波の流速場が定義される。このようなことから、 U の影響も含めた形で関係式を書くと、以下のようなになる。

$$E_K = \frac{1}{2} c(M_x - Uh) + \frac{1}{2} U M_x \quad (175)$$

$$S_{xx} = 4E_K - 3E_P - 2U M_x + \overline{u_b^2} h \quad (176)$$

$$S_{yy} = E_K - E_P - U M_x + \frac{1}{2} \overline{u_b^2} h \quad (177)$$

$$F_x = \left\{ 3E_K - 2E_P - 2U M_x + \frac{\overline{u_b^2}}{2c} (M_x + ch) \right\} c \quad (178)$$

ここに、 u_b は底面流速である。

これらの式を用いれば、 E_K , E_P , U , $\overline{u_b^2}$, c および h から、 M_x , S_{xx} , S_{yy} および F_x を計算することができる。

参考文献

- 1) 磯部雅彦・西村仁嗣・堀川清司 (1978): 保存波の振動解の波高による表示, 第 33 回年次学術講演会講演概要集, 第 2 部, 土木学会, pp. 760-761.
- 2) 木村 晃 (1985): 非線型長周期波の 2 次元スペクトル, 第 32 回海岸工学講演会論文集, pp. 154-158.
- 3) 合田良実 (1983): 波浪の非線型性とその記述パラメーター, 第 30 回海岸工学講演会論文集, pp. 39-43.
- 4) Abohadima, S. and Isobe, M. (1999): Parameters representing limiting waves of permanent type. (submitted)
- 5) Cokelet, E. D. (1977): Steep gravity waves in water of arbitrary uniform depth, Phil. Trans. R. Soc. Lond., Ser. A, vol. 286, pp. 183-230.
- 6) Dean, R. G. (1965): Streak function representation of nonlinear ocean waves, J. Geophys. Res., vol. 70, pp. 4561-4572.
- 7) Fenton, J. D. (1990): Nonlinear wave theories, The Sea, Part A, Le Méhauté, B. and Hanes, D. (eds.), Wiley-Interscience, pp. 3-26.
- 8) Fenton, J. D. (1999): The cnoidal theory of water waves, Developments in Offshore Engineering, Herbich, J. B. (ed.), Gulf Publishing Co., pp. 55-100.
- 9) Isobe, M. and Kraus, N. C. (1983a): Derivation of a third-order Stokes wave theory, Hydraulics Lab. Rep., No. YNU-HY-83-1, Dept. of Civil Eng., Yokohama Nat. Univ., 37pp.
- 10) Isobe, M. and Kraus, N. C. (1983b): Derivation of a second-order cnoidal wave theory, Hydraulics Lab. Rep., No. YNU-HY-83-2, Dept. of Civil Eng., Yokohama Nat. Univ., 43pp.

- 11) Isobe, M. (1985): Calculation and application of first-order cnoidal wave theory, *Coastal Eng.*, vol. 9, pp. 309-325.
- 12) Longuet-Higgins, M. S. (1975): Integral properties of periodic gravity waves of finite amplitude, *Proc. R. Soc., Lond., Ser. A*, vol. 342, pp. 157-174.
- 13) Madsen, P. A., Murray, R., and Sørensen, O. R. (1991): A new form of the Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics, *Coastal Eng.*, vol. 15, pp. 371-388.
- 14) Madsen, P. A. and Sørensen, O. R. (1991): A new form of the Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics, Part 2, A slowly-varying bathymetry, *Coastal Eng.*, vol. 18, pp. 183-204.
- 15) Nishimura, H., Isobe, M. and Horikawa, K. (1977): Higher order solutions of the Stokes and the cnoidal waves, *J. Fac. Eng., Univ. Tokyo, B-34, No. 2*, pp. 267-293.
- 16) Nwogu, O. (1993): Alternative form of Boussinesq equation for nearshore wave propagation, *J. Waterway, Port, Coastal, and Ocean Eng., ASCE*, vol. 119, pp. 618-638.
- 17) Peregrine, D. H. (1967): Long waves on a beach, *J. Fluid Mech.*, vol. 27, pp. 815-827.
- 18) Schwartz, L. W. (1974): Computer extension and analytic continuation of Stokes' expansion for gravity waves, *J. Fluid Mech.*, vol. 62, pp. 553-578.
- 19) Skjelbreia, L. and Hendrickson, J. (1960): Fifth order gravity wave theory, *Proc. 7th Int. Conf. on Coastal Eng., ASCE*, pp. 184-196.