

3次元密度流としての内湾の流れのモデリング

Numerical Modelling of 3-Dimensional Baroclinic Flows in Bays

佐々木 淳

Jun SASAKI

1 はじめに

東京湾をはじめとする内湾域は人口の密集した大都市を背後に抱え、港湾整備や産業立地、ウォーターフロントの開発等による埋め立てによって多くの自然海岸や浅瀬が消滅し、自然の自浄作用が著しく低下している。そのような下で、産業排水や生活排水の流入によって富栄養化が著しく進行し、赤潮や貧酸素水塊の発生等、重大な水質問題を引き起こしている。これらの問題を解決していく上で、水質・生態系予測モデルの確立が望まれるが、その基本となるのが流れ場のモデルである。

閉鎖性海域である内湾は黒潮や親潮といった地球規模の海流の影響は比較的受けにくい、潮汐に起因する流れや風に起因する吹送流が顕著に見られる。特に水深が浅く地形も複雑な場合が多いため、これらの流れも様々な渦を形成するなど複雑なものとなる場合が多い。

また、内湾域は海水に比べて密度の小さい河川水が流入するために、水平方向にも鉛直方向にも密度勾配が形成される。さらに春から秋にかけては上層水が日射により暖められ、水温分布が一様でなくなることからも密度差が生じる。密度成層が存在すると上下の海水の混合が著しく抑制され、流れの様子も密度が一様な場合と比較して、大きく異なったものとなる(Baroclinic流れ)。さらに、密度成層した内湾においてはロスビーの内部変形半径がしばしば数kmのオーダーとなることから、密度が一様(Barotropic)な場合と比較して、地球回転の影響も顕著となる。このように、内湾の流れ場を考える上では、密度分布が流れ場に及ぼす影響を考慮することが極めて重要である。

そこで、本稿ではこのような密度分布の存在する内湾における流れ場の解析手法として、現在主流となっている準3次元の数値モデルを取り上げ、これまでに開発されてきた主要なモデルについて概説すると同時に、論文では省略されがちな数値モデルの具体的な作成法についても筆者の経験に基づき紹介する。

2 支配方程式の導出

2.1 基礎方程式

内湾における3次元の流れ場は、Navier-Stokesの運動量式、連続式、および密度を決定する状態方程式、さらにその密度は水温および塩分から決まるため、水温および塩分それぞれの拡散方程式により記述される。今、図-1に示すように静水面を基準として水平方向に x , y 軸、鉛直上向きに z 軸を取るデカルト座標系を考えると、以上の方程式は次のようになる。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = f v - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(A_x \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(A_y \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(A_z \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -f u - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(A_x \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(A_y \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(A_z \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + \frac{\partial}{\partial x} \left(A_x \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(A_y \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(A_z \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (3)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \rho - 1000 = & 20.99 + \{-4.3 \times 10^{-3} \times (T - 20) - 0.256\}(T - 20) \\ & + \{2.3 \times 10^{-4} \times (S - 30) - 1.53 \times 10^{-3} \times (T - 20) + 0.7577\}(S - 30) \end{aligned} \quad (5)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \frac{1}{\rho C_p} \frac{dq(z)}{dz} \quad (6)$$

$$q(z) = (1 - \beta) \exp(\alpha z) \quad (7)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial S}{\partial x} + v \frac{\partial S}{\partial y} + w \frac{\partial S}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \frac{\partial S}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_y \frac{\partial S}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial S}{\partial z} \right) \quad (8)$$

ここに、 u, v, w はそれぞれ x, y, z 方向の流速、 f はコリオリ係数、 p は水面を基準とした圧力、 ρ は密度、 g は重力加速度、 A_x, A_y 、および A_z はそれぞれ x, y 、および z 方向の渦動粘性係数である。また、 T, q, β, α 、および C_p はそれぞれ、水温、短波放射による水中熱フラックス、水中熱フラックスのうち水面近傍で吸収される割合、短波放射の水中での消散係数、および比熱であり、 K_x, K_y 、および K_z はそれぞれ x, y 、および z 方向の渦動拡散係数、 S は塩分である。また、状態方程式は密度の単位として kg/m^3 、水温を $^{\circ}\text{C}$ 、塩分を ‰ (パーミル) で表した場合のものである。

内湾域は水平スケールに比較して鉛直スケールが十分に小さいことから、鉛直方向の運動量式における加速度項と粘性項は重力加速度に比べて無視できると仮定し (静水圧近似)、方程式を簡略化するのが一般的である。このとき、式 (3) は

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \quad (9)$$

と近似できる。さらに ρ および p を参照値 ρ_0, p_0 (共に一定値) と、塩分や水温によって変化する偏差分 ρ', p' によって表すと、

$$\rho = \rho_0 + \rho' \quad (10)$$

$$p = p_0 + p' \quad (11)$$

となる。水面 $z = \zeta$ における大気圧を 0 とすると、式 (9) は

$$p_0(z) = \rho_0 g (\zeta - z) \quad (12)$$

$$0 = -\frac{\partial p'}{\partial z} - \rho' g \quad (13)$$

となる。式 (13) を z から水面 ζ まで積分することにより、 z における p' は次式のようにになる。

$$p' = \int_z^{\eta} \rho' g dz \quad (14)$$

式 (12) および式 (14) を式 (11) に代入して得られる p を式 (1) および式 (2) に代入し、密度の変化は十分に小さいことから、浮力項以外の密度変化を無視し、さらに非圧縮性流体における連続式が適用できるとする Boussinesq 近似を仮定すると、基礎方程式 (1)~(4) は次のようになる。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = f v - g \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{g}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial x} \int_z^{\zeta} \rho' dz + \frac{\partial}{\partial x} \left(A_x \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(A_y \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(A_z \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (15)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -f u - g \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{g}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial y} \int_z^{\zeta} \rho' dz + \left(A_x \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(A_y \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(A_z \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (16)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (17)$$

これらの方程式を次節で述べる境界条件の下で解けば流れ場が得られるが、一般に解析的に解くことはほとんど不可能であり、次章以降で述べるように様々な数値解析法が提案されている。

2.2 境界条件

2.2.1 運動量

運動量式においては、風による摩擦応力 τ^s および海底摩擦応力 τ^b を考慮し、

$$\rho A_z \frac{\partial u}{\partial z} = \tau_x^s, \quad \rho A_z \frac{\partial v}{\partial z} = \tau_y^s \quad (18)$$

$$\rho A_z \frac{\partial u}{\partial z} = \tau_x^b, \quad \rho A_z \frac{\partial v}{\partial z} = \tau_y^b \quad (19)$$

とする。ここに、添字 x, y はそれぞれ x, y 方向成分を表す。また、側壁境界については、現状では水平格子サイズが大きいことから、摩擦を0とするslip conditionを採用するのが一般的である。

湾口の開境界においては潮汐を考慮するために時々刻々の潮位を与える、すなわち水位により制御するのが一般的であり、内湾のように開境界部分が比較的狭い場合は実用上それほど問題となることはないようである。本来は湾内から開境界に向かって伝播した現象を境界上で波動と見なして外へ放出させてやる必要があり、Sommerfeldの放射条件を用いたモデル(Orlanski, 1976)や数値波動モデルでしばしば使われるように、本来の計算領域の外側にSponge Layerを設けて吸収する方法等が提案されている。しかし、これらの波動には様々な位相速度を持つ成分が含まれていることから、完全に波動成分を境界から外部へ透過させることは不可能であり、また、Sponge Layerも計算量が増大する上に地衡流の発達に大きな悪影響を与えることが指摘される等、万能とはいえない。久保田・青山(1990)は海洋数値モデルにおける種々の開境界条件について解説しており参考になる。

2.2.2 水温場

水温場における境界条件については、まず、海底や壁面等の固体境界においてはそれに垂直な方向(n)での水温勾配を0、すなわち、 $\partial T / \partial n = 0$ とする。

水面における境界条件は、短波放射 Q_A 、長波放射 Q_B 、蒸発による潜熱輸送 Q_e 、および大気との接触による顕熱輸送 Q_h によって決まる熱収支 Q_s を考慮することにより、

$$-K_z \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{Q_s}{\rho C_p} \quad (20)$$

と設定するのが一般的である。また、 A をアルベード(反射率)とすると、

$$Q_s = (1 - A)Q_A - Q_B - Q_e - Q_h \quad (21)$$

となる。各熱フラックスについてはそれぞれ以下のようなバルク公式(例えば、日本海洋学会沿岸海洋研究部会編, 1990)によって推定することが可能である。

$$Q_B = s\sigma_v \{T_w^4(0.39 - 0.058\sqrt{E_a}) + 4T_a^3(T_w - T_a)\}(1 - 0.83c) \quad (22)$$

$$Q_e = c_1 C_E(0.98E_w - E_a)W_a \quad (23)$$

$$Q_h = aC_T(T_w - T_a)W_a \quad (24)$$

ここに、 T_a, T_w は絶対温度で表した気温と海面水温、 E_a, E_w はそれぞれhPaで表した大気水蒸気圧および海面水温での飽和蒸気圧、 c は0~1で表した雲量(0が快晴)である。また、 s および σ_v はそれぞれ、黒体放射と太陽放射の比およびステファン・ボルツマン定数、 C_E, C_T 、および W_a はそれぞれ潜熱、顕熱の輸送係数、および海面上10mでの風速である。これらのうち数値モデルから直接計算される海面水温と飽和蒸気圧以外は日本気象協会のSDPデータによって毎時の値を知ることができる。ただし、一つの測候所ですべての項目

が観測されているわけではないので、隣接する測候所のデータを併せて使用することが必要な場合もある。飽和蒸気圧 E_w については Tetens の近似式 (近藤編, 1994),

$$E_w = 6.1078 \times 10^{aT/(b+T)} \quad (25)$$

により計算することが可能である。ここに, $a = 7.5$, $b = 237.3$ である。

湾口においては、湾口の鉛直断面に垂直な方向 n の水温勾配を 0, すなわち, $\partial T / \partial n = 0$ とする場合が多い。これは湾口境界においても水温の時系列変化が比較的大きく、適切な境界値の設定が困難であることによるものと思われる。しかし、佐々木ら (1998) の検討によれば、このように温度勾配を 0 に設定すると、例えば夏季にひとたび境界を含めた湾内の水温が上昇した場合、本来、現地において起こると推測される外洋の低温水塊の底層での流れ込みといった重要なメカニズムが再現されない上に、数値的にも不安定となりやすい。そのため、多少精度は悪くとも、季節的な変化を考慮した境界水温値を与える方がよいであろう。

2.2.3 塩分場

水面において塩分場に影響を与えるものは降水と蒸発であり、以下のようにモデル化することができる。

$$-K_z \frac{\partial S}{\partial z} = S(P_{\text{rct}} - E_{\text{vap}}) \quad (26)$$

ここに, P_{rct} および E_{vap} はそれぞれ単位時間当たりの降水量および蒸発量である。降水量は日本気象協会の SDP データにより毎時の値を知ることができる。蒸発量 E_{vap} に関しては、次のバルク公式 (近藤編, 1994) により計算することが可能である。

$$E_{\text{vap}} = \rho C_E U (q_s - q) \quad (27)$$

ここに, q および q_s はそれぞれ、空気中の比湿および水面温度 T_s (°C) に対する飽和比湿で次式で与えられる。

$$q_s = 6.1078 \times 10^{7.5T_s/(237.3+T_s)} \quad (28)$$

3 数値モデルの種類と概要

3.1 差分法と有限要素法

内湾の流動問題を数値的に解く場合、一般に差分法、有限体積法、または有限要素法が用いられる (例えば、数値流体力学編集委員会編, 1995)。有限要素法ではまず重み付き残差法や変分原理に基づいて、微分方程式の問題が解析対象領域に関する元の問題と等価な積分方程式に変換され、その積分範囲を一般には三角形要素に分割し、要素ごとに積分することによりマトリックス方程式を得る。有限要素法は格子作成の自由度が高く、解析対象の形状や境界条件の取り扱いに優れているが、数学的手続きが煩雑で、プログラムも複雑になり、また一般に計算時間も多く必要となる。有限要素法により、Kawahara ら (1983) は東京湾の潮流計算をおこない、平山・和氣 (1995) は閉鎖性成層水域における吹送流を計算しているが、未だ例は多くない。

これに対し、差分法はそれぞれの微分作用素に対応する差分式を適用することにより、差分方程式が直接得られる。その数学的手続きは比較的容易であり、精度や計算速度に関して様々な解法が提案される等、これまでに非常に多くの実績がある。そこで、本稿では内湾モデルの主流となっている差分法を取り上げる。

なお、構造格子において、保存則を意識した差分法によって得られる差分式は、有限要素法と同様に非構造格子において開発されてきた有限体積法的考え方から得られる離散化式と全く同じものとなる。このような中、最近の数値流体力学 (例えば、大宮司ら編, 1998) においては、有限要素法や有限体積法 (あるいは差分法) といった手法の違いよりは、どのような格子を採用するかという問題がより重要であることが指摘されている。また、計算が大規模化するにつれて、構造曲線格子や非構造格子の作成が困難になる上に、非構造格子の場合には計算機のメモリアクセスの点からも不利となることから、最も単純な矩形構造格子が見直されつつある。

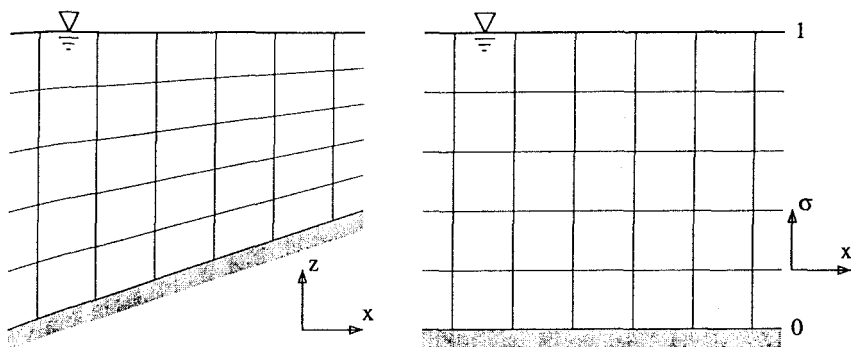


図 1: デカルト座標系 (左) と σ 座標系 (右)

3.2 レイヤーモデルとレベルモデル

準3次元の流動モデルは一般にレイヤーモデルとレベルモデルとに分けることができる (村上, 1989)。両者の違いは鉛直方向の計算の取り扱いに見られる。

レイヤーモデルにおいては密度躍層を内部境界面として扱い、その部分では鉛直流速を計算せず、内部境界面の移動と層間の混合を考慮することにより表現する。この場合内部波のような密度界面での不連続的な現象を表現するのは容易であるが、湧昇 (沈降) により内部界面が表層 (底面) の境界に達した場合に計算が不可能になるという重大な欠点がある。また、水平方向の密度勾配が大きい場合の扱いも困難であり、そもそも、密度界面は常に存在しているわけではないことから汎用性に乏しい。

これに対して、レベルモデルは鉛直方向の計算も水平方向と同様に移流と拡散により計算される。この方法では層数が少ない場合に、密度躍層のような不連続性を再現するのが困難で、実際よりも鈍った分布となりやすい欠点があるものの、実現象に忠実で汎用性に優れ、取り扱いも容易であるという利点があることから、現在ではレベルモデルが主流となっており、以下ではレベルモデル採用する。

4 σ 座標系における準3次元流動モデルの構築

本章では佐々木ら (1996) により開発された σ 座標系における内湾流動モデルを具体例として取り上げ、その作成法および特徴を紹介すると同時に、他の代表的なモデルについてもその基本的な考え方や特徴を簡単に紹介する。

4.1 σ 座標系

多くの流れ場のモデルは鉛直方向にも通常のデカルト座標系 (z 座標系) を採用している。この場合、海底地形は階段状に近似され、鉛直方向の格子サイズを一樣とすると、浅い所も深い所も十分に解像するためには非常に多くの格子が必要となる。そこで計算の効率化のため、ある深度以下においては、海底地形を最下層の格子を伸縮させることにより表現するケースが多いが、この場合は下層における地形の解像度が悪くなり、底層において沖から高密度水塊が流入するといった現象の再現性が低くなる等の問題が生じる。

これに対して、水平計算領域すべての点で鉛直方向には同数の格子を用いる方法の一つとして、Phillips (1957) により σ 座標系が提案された。 σ 座標系は図 1 に示すように、水面を $z = \zeta$ 、底面を $z = -h$ とする通常のデカルト座標における z 座標を、水面で $\sigma = 1$ 、底面で $\sigma = 0$ のように規格化するもので、座標変換式は次

のようになる。

$$\sigma = \frac{z+h}{h+\zeta} \quad (29)$$

σ 座標系は大気の数値モデルにおいて、山岳等の地上地形を自然に表現し、底面境界条件を簡単化することを目的として開発されたものであり、現在、多くの気象モデルにおいて採用されている。

海洋においても σ 座標系を用いたモデルは多いが、沿岸海域を対象としたものはこれまではあまり多くなかった。その一つの理由としては、従来、沿岸海域における3次元解析は上層の情報をより多く得ることを目的としてきたため、デカルト座標系においてある深度以下については海底地形変化の影響を鉛直格子サイズを変化させることで対応し、海底付近の流動場の詳細を考慮してこなかったためであると考えられる。また、 σ 座標系モデルは海底勾配の急な領域に適用すると計算が不安定になりやすく、また数値拡散も大きくなる等、数値計算上の問題が生じてくることも知られている。このような問題点はあるものの、海底地形を忠実に表現できる上に取り扱いが容易であることから、底面付近の流れ場の精度を上げたい場合や、汎用性を重視したモデルには σ 座標系が採用されることが多くなっており、本章では σ 座標系における数値モデルの構築法を述べることにする。

4.2 σ 座標系における基礎方程式

z 座標系から σ 座標系への変換は式(29)で表される。今、変数 $\phi(x, y, z, t)$ を考えたとき、鉛直方向の微分は次のように変換される。

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial z} = \frac{1}{H} \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} \quad (30)$$

ここに、 $H = h + \zeta$ である。次に σ 座標系における x 方向の偏微分は図2を参照して、

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{\sigma} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\phi_2 - \phi_1}{\Delta x} \quad (31)$$

となる。一方、

$$\frac{\phi_3 - \phi_1}{\Delta x} = \frac{\phi_2 - \phi_1}{\Delta x} - \frac{\phi_2 - \phi_3}{\Delta z} \cdot \frac{\Delta z}{\Delta x} \quad (32)$$

であるから、 $\Delta x \rightarrow 0, \Delta z \rightarrow 0$ とすると、

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{y,z,t} &= \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{y,\sigma,t} - \left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{x,y,t} \frac{\partial z}{\partial x} \bigg|_{y,\sigma,t} \\ &= \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{y,\sigma,t} - \frac{1}{H} \left(\sigma \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial h}{\partial x} \right) \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} \end{aligned} \quad (33)$$

が成り立つ。ここに、添字はその添字の独立変数を一定に保って微分をとることを意味する。さらに、時間微分に関しては次のように変換される。

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{x,y,z} &= \left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{x,y,\sigma} + \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial t} \\ &= \left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{x,y,\sigma} - \frac{\sigma}{H} \frac{\partial \zeta}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} \end{aligned} \quad (34)$$

このとき静水圧近似及びBoussinesq近似の下での運動量式(15)、(16)は、Mellor and Blumberg (1985)による考察に基づいて水平粘性項の高次の項を省略し、また圧力勾配項を除いて次のように変換される。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \sigma \frac{\partial u}{\partial \sigma} = f v - \frac{1}{\rho_0} \left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{y,z,t} + \frac{1}{H^2} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(A_{\sigma} \frac{\partial u}{\partial \sigma} \right) + A_h \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (35)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \sigma \frac{\partial v}{\partial \sigma} = -f u - \frac{1}{\rho_0} \left. \frac{\partial p}{\partial y} \right|_{x,z,t} + \frac{1}{H^2} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(A_{\sigma} \frac{\partial v}{\partial \sigma} \right) + A_h \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (36)$$

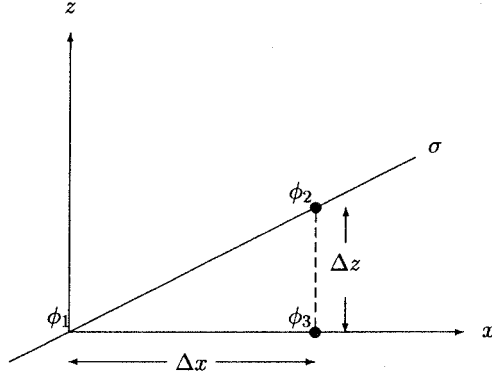


図 2: z 座標系と σ 座標系の関係

ここに, A_h および A_σ はそれぞれ水平および鉛直渦動粘性係数であり, $\dot{\sigma}$ は σ 座標系における鉛直流速に相当するもので次式のようなになる.

$$\dot{\sigma} = \frac{\partial \sigma}{\partial t} + u \frac{\partial \sigma}{\partial x} + v \frac{\partial \sigma}{\partial y} + w \frac{\partial \sigma}{\partial z} \quad (37)$$

また, 連続式(17)は次のように変換される.

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial(Hu)}{\partial x} + \frac{\partial(Hv)}{\partial y} + H \frac{\partial \dot{\sigma}}{\partial \sigma} = 0 \quad (38)$$

水平圧力勾配項は以下の様にして σ 座標系に変換することができる. 今, ∇ を水平方向の微分演算子とし, $\nabla \equiv (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ であるとする. z 座標系におけるものには添字 z を, σ 座標系におけるものには添字 σ を付けると, 圧力勾配項は次式のように変換される.

$$\nabla_z p = \nabla_\sigma p - \frac{\partial \sigma}{\partial z} (\nabla_\sigma z) \frac{\partial p}{\partial \sigma} \quad (39)$$

一方, 静水圧近似を仮定すると, デカルト座標系においては

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad (40)$$

となるから, σ 座標系では

$$\frac{\partial p}{\partial \sigma} = -\rho g \frac{\partial z}{\partial \sigma} \quad (41)$$

のように変換される. 式(41)を式(39)に代入すると次式が得られる.

$$-\frac{1}{\rho} \nabla_z p = -\frac{1}{\rho} \left\{ \nabla_\sigma p - \frac{\partial \sigma}{\partial z} (\nabla_\sigma z) \left(-\rho g \frac{\partial z}{\partial \sigma} \right) \right\} = -\frac{1}{\rho} \nabla_\sigma p - g \nabla_\sigma z \quad (42)$$

次に p および ρ を $p = p_0 + p'$ および $\rho = \rho_0 + \rho'$ のように参照量とそれからの偏差に分けると,

$$\begin{aligned} \nabla_\sigma p &= \nabla_\sigma p_0 + \nabla_\sigma p' \\ &= \nabla_\sigma (\rho_0 g (\zeta - z)) + \nabla_\sigma p' \\ &= \rho_0 g (\nabla_\sigma \zeta - \nabla_\sigma z) + \nabla_\sigma p' \end{aligned} \quad (43)$$

$$\rho \nabla_\sigma z = \rho_0 \nabla_\sigma z + \rho' \nabla_\sigma z \quad (44)$$

となるから、圧力勾配項は次式のように変換される。

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{\rho}\nabla_z p &= -\frac{1}{\rho}[\rho_0 g(\nabla_\sigma \zeta - \nabla_\sigma z) + \nabla_\sigma p'] - g\left[\frac{\rho_0}{\rho}\nabla_\sigma z + \frac{\rho'}{\rho}\nabla_\sigma z\right] \\
 &= -\frac{1}{\rho}\rho_0 g\nabla_\sigma \zeta - \frac{1}{\rho}\nabla_\sigma p' - \frac{1}{\rho}\rho' g\nabla_\sigma z \\
 &= -\frac{\rho_0 g}{\rho}\nabla_\sigma \zeta - \frac{\rho' g}{\rho}\sigma\nabla_\sigma \zeta - \frac{\rho' g}{\rho}\sigma\nabla_\sigma h + \frac{\rho' g}{\rho}\nabla_\sigma h - \frac{1}{\rho}\nabla_\sigma \left[H \int_\sigma^1 \rho' g d\sigma\right] \\
 &= -\frac{g}{\rho}(\rho_0 + \rho'\sigma)\nabla_\sigma \zeta - \frac{\rho' g}{\rho}(\sigma - 1)\nabla_\sigma h - \frac{1}{\rho}\nabla_\sigma \left[H \int_\sigma^1 \rho' g d\sigma\right] \quad (45)
 \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\bigg|_z = -\frac{g}{\rho}(\rho_0 + \rho'\sigma)\frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\rho' g}{\rho}(\sigma + 1)\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x} \left[H \int_\sigma^1 \rho' g d\sigma\right] \quad (46)$$

となる。

次に、移流項における運動量保存則が差分式においても満たされるように、式(35)および(36)の移流項を以下の様にして保存型に変換する。式(35)の左辺に H をかけ、連続式(38)に u をかけたものを加えると、移流項は

$$\begin{aligned}
 &H\frac{\partial u}{\partial t} + (Hu)\frac{\partial u}{\partial x} + (Hv)\frac{\partial u}{\partial y} + (H\dot{\sigma})\frac{\partial u}{\partial \sigma} + u\left\{\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial(Hu)}{\partial x} + \frac{\partial(Hv)}{\partial y} + H\frac{\partial \dot{\sigma}}{\partial \sigma}\right\} \\
 &= \frac{\partial H}{\partial t} + H\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial(Hu)}{\partial x} + (Hu)\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial(Hv)}{\partial y} + (Hv)\frac{\partial u}{\partial y} + (H\dot{\sigma})\frac{\partial u}{\partial \sigma} + (Hu)\frac{\partial \dot{\sigma}}{\partial \sigma} \\
 &= \frac{\partial(Hu)}{\partial t} + \frac{\partial(Huu)}{\partial x} + \frac{\partial(Huv)}{\partial y} + \frac{\partial(H\dot{\sigma}u)}{\partial \sigma} \quad (47)
 \end{aligned}$$

のように保存系に変換することが出来る。

以上により σ 座標系における運動量式は次のようになる。

$$\begin{aligned}
 &\frac{\partial(Hu)}{\partial t} + \frac{\partial(Huu)}{\partial x} + \frac{\partial(Hvu)}{\partial y} + \frac{\partial(H\dot{\sigma}u)}{\partial \sigma} \\
 &= Hfv - \frac{gH}{\rho} \left[(\rho_0 + \rho'\sigma)\frac{\partial \zeta}{\partial x} - \rho'(\sigma - 1)\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left\{ H \int_\sigma^1 \rho' d\sigma \right\} \right] \\
 &+ \frac{1}{H}\frac{\partial}{\partial \sigma} \left(A_\sigma \frac{\partial u}{\partial \sigma} \right) + HA_h \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (48)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\frac{\partial(Hv)}{\partial t} + \frac{\partial(Huv)}{\partial x} + \frac{\partial(Hvv)}{\partial y} + \frac{\partial(H\dot{\sigma}v)}{\partial \sigma} \\
 &= -Hfu - \frac{gH}{\rho} \left[(\rho_0 + \rho'\sigma)\frac{\partial \zeta}{\partial y} - \rho'(\sigma - 1)\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \left\{ H \int_\sigma^1 \rho' d\sigma \right\} \right] \\
 &+ \frac{1}{H}\frac{\partial}{\partial \sigma} \left(A_\sigma \frac{\partial v}{\partial \sigma} \right) + HA_h \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (49)
 \end{aligned}$$

次に以下のように連続式を変形することにより、 $\dot{\sigma}$ を求める。 σ 座標における連続式(38)を鉛直方向に $0 \sim 1$ まで積分すると、

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \int_0^1 \frac{\partial(Hu)}{\partial x} d\sigma + \int_0^1 \frac{\partial(Hv)}{\partial y} d\sigma = 0 \quad (50)$$

となる。一方、連続式(38)を $0 \sim \sigma$ まで鉛直方向に積分すると、

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} \sigma + \int_0^\sigma \frac{\partial(Hu)}{\partial x} d\sigma + \int_0^\sigma \frac{\partial(Hv)}{\partial y} d\sigma + H\dot{\sigma} = 0 \quad (51)$$

が得られる。式(50)と(51)から $\partial \zeta / \partial t$ を消去すれば、

$$\dot{\sigma} = \frac{1}{H} \left[\sigma \int_0^1 \frac{\partial(Hu)}{\partial x} d\sigma + \sigma \int_0^1 \frac{\partial(Hv)}{\partial y} d\sigma - \int_0^\sigma \frac{\partial(Hu)}{\partial x} d\sigma - \int_0^\sigma \frac{\partial(Hv)}{\partial y} d\sigma \right] \quad (52)$$

が得られる。式(52)は離散化式においても水面および底面境界条件を厳密に満足している点で優れている。

水温および塩分場に関しても全く同様にして σ 座標系に変換することができる。

4.3 境界条件

2.2においては z 座標系における境界条件を考えたが、ここではそれらのうち運動量に関する境界条件を σ 座標系に変換し、さらに各応力について具体的な表示を与える。水温・塩分場に関する境界条件も全く同様に σ 座標系に変換することができる。

海底面 $\sigma = 0$ における海底摩擦および $\dot{\sigma}$ に関する境界条件は

$$A_\sigma \frac{\partial u}{\partial \sigma} = H \frac{\tau_x^b}{\rho}, \quad A_\sigma \frac{\partial v}{\partial \sigma} = H \frac{\tau_y^b}{\rho}, \quad \dot{\sigma} = 0 \quad (53)$$

となる。また、水面 $\sigma = 1$ における風応力および $\dot{\sigma}$ に関する境界条件は

$$A_\sigma \frac{\partial u}{\partial \sigma} = H \frac{\tau_x^s}{\rho}, \quad A_\sigma \frac{\partial v}{\partial \sigma} = H \frac{\tau_y^s}{\rho}, \quad \dot{\sigma} = 0 \quad (54)$$

となる。ここで、各応力項は以下のようにモデル化するのが一般的である。

$$\tau_x^b = \rho \gamma_b^2 u \sqrt{u^2 + v^2}, \quad \tau_y^b = \rho \gamma_b^2 v \sqrt{u^2 + v^2} \quad (55)$$

$$\tau_x^s = \tau_s \cos \theta, \quad \tau_y^s = \tau_s \sin \theta, \quad \tau_s = \rho_a C_f U_{10}^2 \quad (56)$$

ここに、 γ_b^2 は海底摩擦係数で一般に0.0026の値が用いられることが多い。実際、市原ら（1980）は東京湾において実測に基づく海底摩擦係数の推定をし、この値を支持する結果を得ている。また、 τ_s は風による水面摩擦応力で、 θ は風向きの x 軸からの角度、 ρ_a は空気密度、 U_{10} は海上10mにおける風速、 C_f は摩擦係数で近藤編（1994）にならい、

$$10^3 \times C_f = 1.08 U_{10}^{-0.15}, \quad 0.3 \text{m/s} \leq U_{10} < 2.2 \text{m/s} \quad (57a)$$

$$= 0.771 + 0.0858 U_{10}, \quad 2.2 \text{m/s} \leq U_{10} < 5 \text{m/s} \quad (57b)$$

$$= 0.867 + 0.0667 U_{10}, \quad 5 \text{m/s} \leq U_{10} < 8 \text{m/s} \quad (57c)$$

$$= 1.2 + 0.025 U_{10}, \quad 8 \text{m/s} \leq U_{10} < 25 \text{m/s} \quad (57d)$$

$$= 0.073 U_{10}, \quad 25 \text{m/s} \leq U_{10} < 50 \text{m/s} \quad (57e)$$

とする。

現在は、風の場合は湾内で一様と仮定している場合がほとんどであるが、灘岡ら（1997）は湾内における風の場の非一様性を考慮した検討を行っており、今後モデルの精緻化が進むものと期待される。

4.4 計算アルゴリズム

4.4.1 様々なアルゴリズムの概要

静水圧近似と Boussinesq 近似を仮定した沿岸海域の3次元流れ場に対しては、陽解法である leap frog 法を基にしたモデルが Leendertse ら（1973）により開発されて以来、多くの計算アルゴリズムが提案されてきた。その改良の基本となるのはできる限り安定でかつ効率的なアルゴリズムの開発である。陽解法は連立方程式を解く必要がなく、1タイムステップ当たりの計算時間は短い、安定性に欠け、積分時間間隔 Δt を現象のタイムスケールから必要される値よりもはるかに小さく取らなければならない場合が多く、効率的でない。これに対して、陰解法の場合はこれらの制約条件がなく大きな Δt を採用できる場合が多いが、一般に連立方程式を解かなければならなくなり、1タイムステップ当たりの計算時間は長くなる。このような陽解法における Δt の制約条件となるのが移流現象に対するクーラン条件と、拡散現象に対する安定条件である（例えば、藤井、1994）。

1 次元のクーラン条件は現象の伝播速度を C 、格子サイズを Δx とすると、 $C\Delta t < \Delta x$ とかける。よって伝播速度が大きいほど、または格子サイズが小さいほど、 Δt を小さく取らなければならない。沿岸海域の問題では水面変動の伝播速度が最も大きいため、それによる Δt の制約が最も厳しいものとなる。そこでこのような条件を緩和する方法がいくつか提案されている。

Bryan (1969) や James (1984) は方程式系からあらかじめ水位変化による圧力伝播項を除外した方程式系を採用することにより (rigid lid 近似)、水位に関する制約条件を除去している。ただし、精度上の問題があり、水位そのものに関心がある高潮等には使えない。また、POM の名で知られる Princeton Ocean Model¹ (Blumberg and Mellor, 1983) や Lardner and Smoczyński (1990) によるモデルは、まず、クーラン条件の厳しい水位と水平流量の external mode と、baroclinic な流れに関する internal mode とに分割し、external mode は小さな Δt で、また、internal mode については大きな Δt を用い、共に陽的に計算する mode splitting algorithm を採用している。佐藤ら (1993) はこのような mode splitting algorithm について検討し、その精度上の問題を指摘している。

一方、岩佐ら (1983) は陽解法である leap frog 法を基本とするものの、水位に関しては陰差分とすることにより水位に関する CFL 条件を除去し、最終的には水位に関する連立方程式を解くアルゴリズムを提案している。

拡散現象に関する安定条件は拡散係数を K とすると、 $2K\Delta t < (\Delta x)^2$ とかける。よって拡散係数が大きほど、または格子サイズが小さいほど制約条件が厳しくなり、小さな Δt を取らなければならない。これは特に浅海域において鉛直多層の計算を行う場合に、鉛直拡散項の制約条件が厳しくなることを意味している。

Leendertse and Liu (1977) は先に開発した leap frog 法に基づくモデルの鉛直粘性・拡散項を陰差分することで、この制約条件を除去したアルゴリズムを提案している。

さらに水位の CFL 条件と鉛直拡散項の安定条件を共に除去した方法が、Kowalik and Murty (1993) により紹介されている。Backhaus (1985) や、佐藤ら (1993) により提案されている。このうち、Backhaus (1985) によるモデルでは、鉛直方向に積分して水位に関する連立方程式を得る際に、鉛直粘性項を解析的に積分するため、より効率的なアルゴリズムとなっているが、海底摩擦項だけは陽的に扱わざるを得ないことから、計算の安定性に不安が残る。これに対し、佐藤ら (1993) は barotropic 流れにおいてはあがあるが、非常に大きな Δt を取ることに成功しており、mode splitting algorithm とほぼ同程度の効率性を有するモデルとなっていることを指摘している。

Benquéら (1982) は移流計算、拡散計算、およびそれ以外の伝播計算の 3 ステップに計算を分割する Fractional Step 法を提案している。この方法はそれぞれのステップでそれぞれに最適なスキームを選択できるという点で優れている。しかし、このような Fractional Step 法の精度は高々 2 次のオーダーであることも指摘されている。

4.4.2 半陰解法に基づく効率的なアルゴリズムの構築

計算が不安定化しやすい σ 座標系において、長期間の現象を 3 次元多層で解くためには、安定でかつ積分時間間隔をできるだけ大きくとれる効率的なアルゴリズムの開発が望まれる。既に述べたように、Backhaus (1985) は baroclinic 流れを対象とし、また、佐藤ら (1993) は barotropic 流れを対象として、共に z 座標系において、水位および鉛直粘性項を陰にとる半陰解法に基づく効率的なアルゴリズムを提案している。しかし、海底勾配の大きい海域にその手法を適用した場合、鉛直移流項のクーラン条件から Δt の制約が厳しくなることが判明した。このことから、佐々木ら (1996) は、水位、鉛直粘性項に加えて鉛直移流項をも陰とする、より効率的で安定なアルゴリズムを提案している。表 1 に、鉛直移流項を陽とした場合と陰とした場合の取りうる Δt の違いについて、水平格子サイズ 2,000m にける東京湾の流動場の計算により得られた結果を示す。それによると、本アルゴリズムは鉛直分割数が多いときに特に効果的であることがわかる。

¹ ホームページ <http://www.aos.princeton.edu/> に詳細な情報がある。

表 1: 鉛直移流項を陽差分した場合と陰差分した場合の取りうる最大の Δt

k_e	Δt (s) in Explicit	Δt (s) in Implicit
10	600	1,300
20	200	800
30	100	700

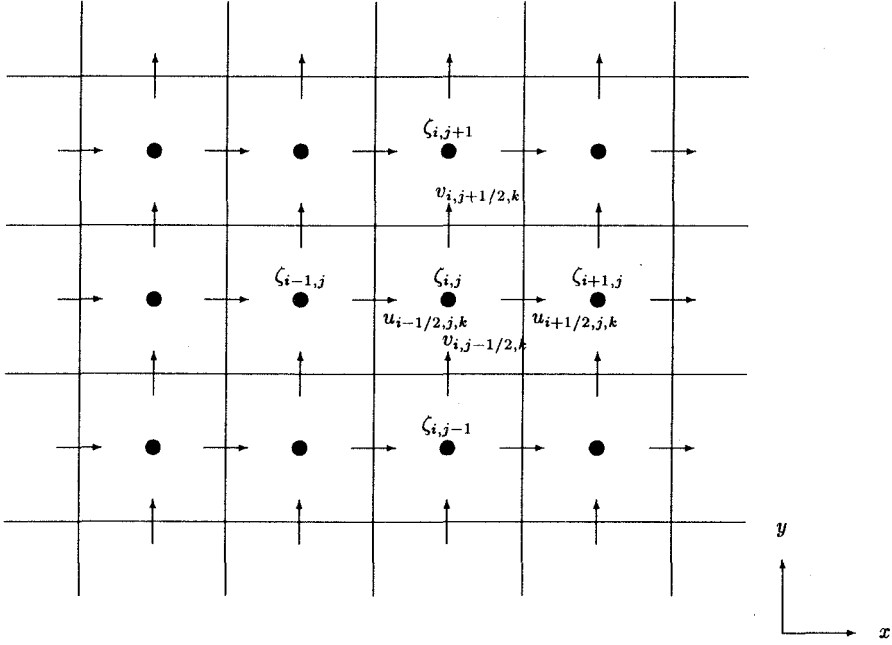


図 3: xy 格子平面上における変数の配置

そこで、以下では佐々木ら (1996) によるアルゴリズムを紹介する。運動量式と連続式を再掲すると (y 方向の運動量式は省略) ,

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \tilde{u}^*}{\partial t} + \frac{\partial (Huu)}{\partial x} + \frac{\partial (Hvu)}{\partial y} + \frac{\partial (\sigma \tilde{u}^*)}{\partial \sigma} \\
 &= Hfv - \frac{gH}{\rho} \left[(\rho_0 + \rho' \sigma) \frac{\partial \zeta^*}{\partial x} \Big|_{\sigma} - \rho' (\sigma - 1) \frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{\sigma} - \frac{\partial}{\partial x} \left\{ (\zeta^* + h) \int_{\sigma}^1 \rho' d\sigma \right\} \right] \\
 &+ \frac{1}{H^2} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(A_{\sigma} \frac{\partial \tilde{u}^*}{\partial \sigma} \right) + HA_h \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)
 \end{aligned} \tag{58}$$

$$\frac{\partial \zeta^*}{\partial t} + \int_0^1 \frac{\partial \tilde{u}^*}{\partial x} d\sigma + \int_0^1 \frac{\partial \tilde{v}^*}{\partial y} d\sigma = 0 \tag{59}$$

となる。ここに、 $\tilde{u} = uH$ である。図3のようなスタッガード格子において、*の付加されている水位 ζ 、鉛直移流および鉛直粘性項を陰差分とし、その他は陽差分とする。

鉛直粘性項、水位項および鉛直移流項は完全陰解法またはCrank-Nicolson法により離散化するとすれば、水位 ζ に関しては $\zeta_{i-1/2,j}$ および $\zeta_{i+1/2,j}$ を陰とすることによって、また線流量 $\tilde{u}$ に関しては鉛直移流項、鉛直粘性項共に $\tilde{u}_{ijk-1}$ 、 $\tilde{u}_{ijk}$ 、 $\tilde{u}_{ijk+1}$ の3つの格子点情報を用いて陰差分するものとする。このとき、 x 方向の運動量

式は,

$$-a_{ijk}\tilde{u}_{ijk-1}^* + b_{ijk}\tilde{u}_{ijk}^* - c_{ijk}\tilde{u}_{ijk+1}^* = d_{ijk}\zeta_{i+\frac{1}{2},j}^* + e_{ijk}\zeta_{i-\frac{1}{2},j}^* + f_{ijk} \quad (60)$$

の形式に整理することができる. 式(60)は $\tilde{u}$ に関する3項対角方程式と見る事ができるので, 式(60)に対してThomas法を適用することにより, $\tilde{u}$ について以下の形式で解くことができる.

$$\tilde{u}_{i+\frac{1}{2},jk} = D_{ijk}\zeta_{i+1,j} + E_{ijk}\zeta_{i,j} + F_{ijk} \quad (61)$$

式(61)を鉛直積分された連続式(59)に代入して ($\tilde{v}$ についても同様), 数値的に積分すると, $\tilde{u}$ および $\tilde{v}$ が消去され, 最終的に未知数 ζ のみの以下の形式の連立方程式が得られる.

$$\alpha_{ij}\zeta_{i-1,j} + \beta_{ij}\zeta_{i,j} + \gamma_{ij}\zeta_{i+1,j} + \delta_{ij}\zeta_{i,j-1} + \epsilon_{ij}\zeta_{i,j+1} = \eta_{ij} \quad (62)$$

式(62)を解く方法として, x 方向と y 方向を交互に陰的に解くADI法が有名である. しかし, Benquéら(1982)は Δt を大きく取った場合のADI法の精度の低下を指摘し, 式(62)を完全に陰的に解く手法である, 共役勾配法に基づくIterative ADI法を提案している. 一方, この種の問題を解く定石にSOR (Successive Over Relaxation) 法がある. SOR法は反復計算法の一つで, $n+1$ 回目の反復計算における演算は,

$$\zeta_{i,j}^{n+1} = (1-\omega)\zeta_{i,j}^n + \frac{\omega}{\beta_{ij}} \left\{ \eta_{ij} - (\alpha_{ij}\zeta_{i-1,j}^n + \gamma_{ij}\zeta_{i+1,j}^n + \delta_{ij}\zeta_{i,j-1}^n + \epsilon_{ij}\zeta_{i,j+1}^n) \right\} \quad (63)$$

となる. 佐々木 (1996) はIterative ADI法とSOR法との比較を行った結果, SOR法の加速率に関して3桁の精度で最適値を見つけると, Iterative ADI法よりもはるかに効率的であることを指摘しており, 安定性の問題も解くに見られなかったことから, SOR法の利用をすすめている. この加速率は格子サイズと Δt に大きく依存する点に注意を要する. もっとも, SOR法の場合は問題を解く際にあらかじめ加速率の最適値を試行錯誤により求めておく必要があり, この点が煩わしいことから, 最近共役勾配法系の解法もしばしば使われるようになっている.

4.5 移流項の差分スキーム

今, スカラー量 ϕ を考え, 図3に示すように格子点の中心に ϕ を, 格子界面に流速を配置するスタッガード格子において移流方程式の差分化を考える. 簡単のため, 次のような1次元の移流方程式を考える.

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial(u\phi)}{\partial x} \quad (64)$$

これを素直に差分化すると

$$\phi_i^{n+1} = \phi_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(f_{i+\frac{1}{2}}^n - f_{i-\frac{1}{2}}^n \right) \quad (65)$$

$$f_{i+\frac{1}{2}}^n = u_{i+\frac{1}{2}}^n \phi_{i+\frac{1}{2}}^n \quad (66)$$

となる. ここに $f_{i+1/2}^n$ は数値流束と呼ばれ, 格子界面を通過する ϕ のフラックスとなっており, このように考えることで, 流れ場における ϕ の保存則が差分式においても厳密に満たされることになる. このうち $\phi_{i+1/2}^n$ および $\phi_{i-1/2}^n$ が未定義となっているため, これらを隣接するいくつかの格子点における ϕ を用いて内挿等により推定しなければならないところに移流項の取り扱いの難しさがある. 使用する格子点数 (ステンシルと呼ばれる) を増やせばより高精度なスキームを作成することが可能であるが, ステンシルの数が増加すればするほど, 計算時間が増大する上に, 境界での取り扱いが複雑となる. ところで, 図4に示すように, 精度の次数は格子サイズ Δx を小さくしていったときに, 真の解に近づいていく傾きを意味しており, ある格子サイズにおいて高次精度のモデルが常により真の解に近いとはいえない. また, 前節で紹介した半陰解法を採用する場合はステンシルとして各方向につき3点を使用することが前提となっているため, 4点以上のステンシルを使用することはできない. 以上のことを踏まえてここではステンシルとして3点を使用するスキームについて, 佐々木ら (1998) および石井 (1998) に基づき紹介する.

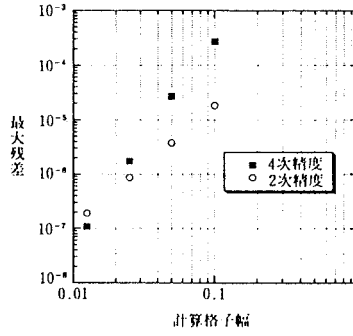


図 4: 2次元ラプラス方程式の差分分解に対する計算格子幅と誤差 (藤井孝蔵, 1998)

4.5.1 1次の風上差分と2次の中心差分

代表的なスキームである1次の風上差分は、界面での ϕ をその上流側の隣接する格子点における ϕ の値で置き換えるものであり、安定性が高いことからしばしば用いられる。しかし、打ち切り誤差項に空間の2階微分が含まれ、これが物理的な拡散と区別できないために、大きな数値拡散を引き起こすことが知られている。この数値拡散は流れの向きと座標の向きとが食い違うほど大きくなる (例えば, Patankar, 1980)。 σ 座標系において海底勾配の急な領域では格子が水平方向に対して斜めに傾くが、通常、流れの向きは格子ほどには傾かないため、デカルト座標系と比較して数値拡散が過大となり実用にならない。

一方、2次の中心差分は界面での ϕ の値を両隣の格子点における ϕ の平均値とするもので、数値拡散は発生しないが、打ち切り誤差項から負の拡散効果が生じるため、数値振動が発生しやすく不安定なスキームであることが知られている。

4.5.2 ドナーセル差分

ところで風上差分は中心差分に数値拡散項を付加した形で表現することができる。この付加する数値拡散項に0から1までの値をとるパラメータ λ をかけることにより、付加する数値拡散の大きさを調整する方法が次式のようなドナーセル差分と言われるものである ($\lambda = 1$: 風上差分; $\lambda = 0$: 中心差分)。

$$\begin{aligned} \frac{\partial(u\phi)}{\partial x} = & \frac{1}{2\Delta x} \left\{ u_{i+\frac{1}{2},j,k} (\phi_{i+1,j,k} + \phi_{i,j,k}) - u_{i-\frac{1}{2},j,k} (\phi_{i,j,k} - \phi_{i-1,j,k}) \right\} \\ & - \frac{\lambda}{2\Delta x} \left\{ |u_{i+\frac{1}{2},j,k}| (\phi_{i+1,j,k} - \phi_{i,j,k}) - |u_{i-\frac{1}{2},j,k}| (\phi_{i,j,k} - \phi_{i-1,j,k}) \right\} \end{aligned} \quad (67)$$

この λ を適当に選ぶことにより、安定性を確保しつつ、数値拡散の少ない計算が可能となるが、図6b, cに示すように λ の値によって結果が大きく異なり、最適な λ を見つけるのが困難な上に、その物理的根拠も明確でないといった問題がある。

4.5.3 ライス法

先ほど2次の中心差分は負の拡散項のために計算が不安定になると述べたが、この負の拡散項を打ち消す数値拡散を加えることにより、2次精度を保ったまま安定に計算が行える方法がライス法 (Lax Wendroff法とも言う) である。今、一次元の一様流による移流現象をラグランジュ的に考えると、図5のように新しい時刻 $n+1$ における格子点 i での物理量 ϕ_i^{n+1} は、古い時刻 n における $u\Delta t$ だけ上流の物理量 $\phi^n(x_i - \Delta tu)$ がそのまま流れてくると考えることが出来る。一般に座標 $x_i - \Delta tu$ がちょうど格子点上にくることはないから、時刻 n における物理量分布を内挿して $\phi^n(x_i - \Delta tu)$ を求める必要がある。位置 $i-1, i, i+1$ での値を使うと次のよ

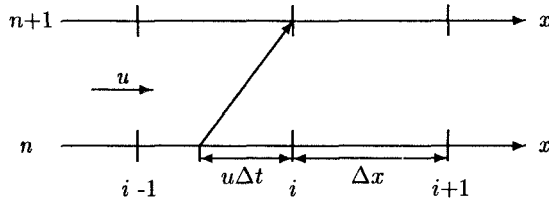


図 5: 1次元ライス法 of の概念

うな 2 次の内挿関数が得られる.

$$\phi(y)^n = \phi_i^n + \frac{y}{2} (\phi_{i+1}^n - \phi_{i-1}^n) + \frac{y^2}{2} (\phi_{i+1}^n - 2\phi_i^n + \phi_{i-1}^n) \quad (68)$$

$$y = \frac{x - x_i}{\Delta x} \quad (69)$$

この内挿関数で位置 $x_i - \Delta x u$ の値を ϕ_i^{n+1} とすると次式のようになる.

$$\phi_i^{n+1} = \phi_i^n - \frac{\Delta t u}{2\Delta x} (\phi_{i+1}^n - \phi_{i-1}^n) + \frac{\Delta t^2 u^2}{2\Delta x^2} (\phi_{i+1}^n - 2\phi_i^n + \phi_{i-1}^n) \quad (70)$$

式(70)を見ると, これも中心差分に拡散項を加えたものになっており, その拡散係数は $u^2 \Delta t / 2$ である. これはちょうど「オイラー陽解法+中心差分」における負の数値拡散を打ち消すものである.

このライス法を 3 次元空間に拡張したものが Tensor Viscosity 法である. 時間と空間に 2 次精度のライス法を 2 次元, 3 次元に拡張する場合, 1 次元におけるスキームを x, y の 2 方向, あるいは x, y, z の 3 方向についておのおのたし合わせただけでは完全な 2 次精度とならない (例えば, 越塚, 1997). そもそもライス法は, オイラー陽解法から発生する時間に 2 次の誤差項を打ち消すように数値拡散を加えるものであるが, それらには交差微分が含まれるため, 各方向に 3 点のステンシルでは表現できないことになる. そこで簡単化のため多次元性を考慮せず, 1 次元のライス法を単純に 3 方向に適用した場合について検討することにする.

この簡易ライス法による計算結果の一例を図 6d に示すが, 数値拡散が抑制されており, 観測値の再現性の高い優れた方法であることがわかる. ただし, この簡易ライス

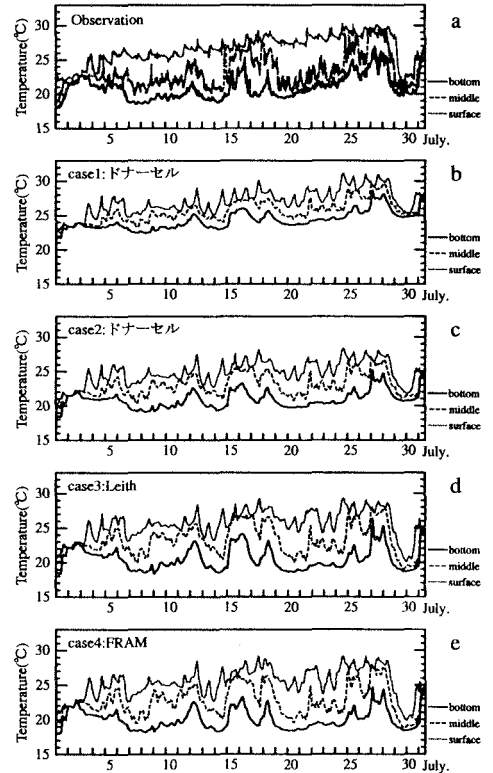


図 6: 東京湾における水温の再現計算 (佐々木ら, 1998). a: 環境庁水質保全局 (1995) による観測値, b: ドナーセル ($\lambda = 0.55$), c: ドナーセル差分 ($\lambda = 0.4$), d: ライス法, e: FRAM.

法の精度は1次であり、また、数値拡散項に Δt が入っていることから、 Δt の取り方によって数値拡散の大きさが異なってくるという問題点が残る。

4.5.4 高解像度スキーム

これまでに紹介してきたスキームは、数値拡散はないが数値的には不安定な2次の中心差分に、なんらかの数値拡散を計算領域全体にわたって付加するものであることがわかる。そのため、結局はいずれのスキームも1次精度となり、各スキームの違いは打ち切り誤差項の係数の大小に現れることになる。

これに対して、基本的には高次（2次以上）のスキームを用いて計算を行うが、数値的に不安定となる領域だけに適切な数値拡散を付加するという手法が提案され、圧縮性流れにおける衝撃波の捕獲等、不連続のある場をよく再現できることが示されている。このような考え方に基づくものは高解像度スキームと呼ばれ、TVD (Total Variation Diminishing) スキームやFRAM (Filtering Remedy And Methodology) といった手法が提案されている（例えば、越塚, 1997）。こういったスキームを適用することにより、鉛直方向に不連続的な躍層が見られる海域での再現性の向上が期待される。ここではChapman (1981)により提案されたFRAMを取り上げ、内湾モデルへの適用を試みた例を紹介する。

FRAMではまず、高精度スキームにより移流計算を行った後、数値的に不安定な領域を探索し、その部分は1次の風上差分に相当する数値拡散を付加する方法である。数値的に不安定となる領域を見つけるために、基礎方程式の差分化において純粋な移流計算とそれ以外の計算とに分割する2ステップ法を採用する必要がある。今、クーラン数が1以下である場合を考えると、移流ステップの計算を行った後には、ある格子点での ϕ^{n+1} は、その3方向の隣接点における前の時間ステップでの ϕ^n の最大値 $\phi_{\max}^n$ 以下であり、かつ最小値 $\phi_{\min}^n$ 以上でなければならない。この条件が満たされない格子点においてはオーバーシュートまたはアンダーシュートが発生しており、そのままでは計算が破綻するため、2ndステップの計算の際に1次の風上差分に相当する数値拡散を付加することで計算の安定化を図る。ただし、クーラン数が1を超える場合には本来移流ステップにおいてオーバーシュートやアンダーシュートが見られても物理的にはおかしくはないことから、やや過剰に数値拡散が付加されることになる点に注意する必要がある。

FRAMによる計算結果を図6eに示す。FRAMにおいてもライス法と同等かそれ以上に数値拡散が抑えられていることが確認できる。さらにFRAMオーバーシュート・アンダーシュートが発生しない限り、理論上、計算内容が時間刻み Δt に全く依存しない。実際、東京湾における水質再現計算で Δt を変えた場合にも、時間刻みに依らずほぼ同様な結果を得られることを確認している。

4.6 水平拡散項の取り扱いに関する考察

水平拡散項をデカルト座標系から σ 座標系に変換する際に生じる高次の項については、計算の簡略化のため無視されることが多い。その場合、海底勾配が急で格子が水平に対して大きく傾く領域では、水平拡散の計算から鉛直拡散効果が生じてしまい、図7のように水温が格子に沿って傾いた分布となることが知られている。

Huang and Spaulding(1996)は、座標変換で生じる高次の項まで残した水平拡散項を表す式(71)を採用することで、鉛直方向の拡散を抑制することを試みている。図8は式(71)を用いて水平拡散のみの計算を行い、30日後の水温分布を示している。

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) - 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{K_x \psi_x}{H} \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} \right) + \frac{K_x \psi_x^2}{H} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{1}{H} \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) - 2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{K_y \psi_y}{H} \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} \right) + \frac{K_y \psi_y^2}{H} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{1}{H} \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} \right) \quad (71)$$

ここに、

$$\psi_x = \frac{\partial z}{\partial x}, \psi_y = \frac{\partial z}{\partial y} \quad (72)$$

である。式(71)を用いた場合には水温分布がほぼ水平となっており、鉛直拡散を抑制することが出来ていると言える。ただし、これを3次元の移流拡散方程式に組み込むと、やや計算が不安定となる等問題もみられ、今後の検討が必要である。

一方、Stelling and Kester (1994)は水平拡散項と圧力勾配項に関しては図9に示すような格子で計算を行うことで、見かけ上の鉛直拡散を抑える方法を提案している。この方法も σ 座標系において水平方向に隣接する格子点情報だけでなく、その上下の格子点情報も使うことにより精度を上げていく方法であるといえる。

4.7 渦動粘性・拡散係数の推定法

渦動粘性・拡散係数は流れ場に対して感度が非常に高いことから、最も重要なパラメーターの一つであり、その評価法についてこれまでに多くのモデルが提案されてきている。ここではそれぞれについて詳述する余裕はないので、詳細については各文献に譲ることにし、概略だけ紹介する。

拡散現象は密度躍層により著しく抑制される等、密度場に大きく影響されるため、等密度面に沿った方向と垂直な方向と分けて考えるのが合理的であり、このような考えから、等密度面座標系を採用したモデルが提案されている。ただし、等密度面はほぼ水平方向となっている場合が多いため、実用上は水平方向と鉛直方向とに分けて考えれば十分である。そこで、以下では鉛直方向と水平方向それぞれの拡散係数の推定法について紹介する。なお、ここで「拡散」という言葉は運動量の場合も含むものとする。

4.7.1 鉛直渦動粘性・拡散係数

鉛直方向に関しては密度成層による鉛直混合の抑制効果を表現する必要があるが、現在のところ、Munk and Anderson (1948)にはじまる経験的な方法と、乱流モデルによるものに大別される。

Munk and Anderson (1948)は海洋における多くの観測結果に基づいて、密度成層のない中立時と成層時の渦動粘性・拡散係数の関係について、以下のような形の式を提案した。

$$A_z = A_{z_0} \times (1 + \alpha R_i^\beta)^\gamma \quad (73)$$

$$K_z = K_{z_0} \times (1 + l R_i^m)^n \quad (74)$$

ここに A_z および K_z は成層時の渦動粘性・拡散係数で、下添字 $_0$ は中立時のものを表し、 R_i はリチャードソン数で、

$$R_i = -\frac{g}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} \Bigg/ \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right] \quad (75)$$

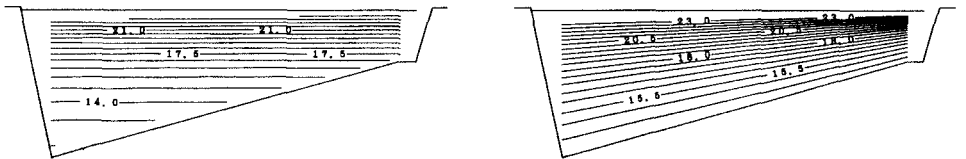


図 7: 水平拡散のみを考慮した水温拡散計算。水温初期分布 (左), 計算開始30日後の分布 (右)。

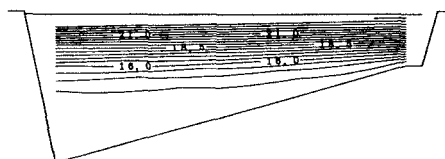


図 8: 高次の項を考慮した水平拡散計算30日後の水温分布

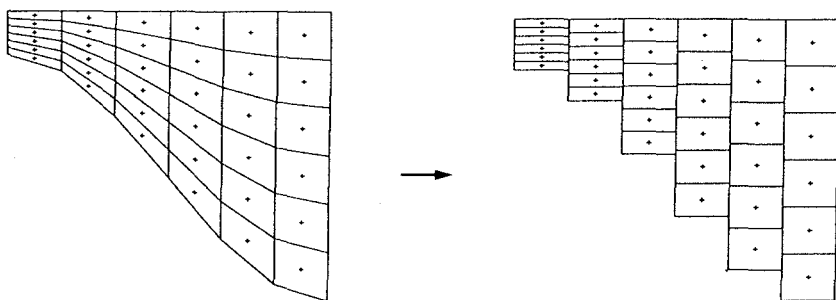


図 9: σ 座標系におけるクリープ補正

である。これは内湾における流動・拡散場の数値シミュレーションにおいて最も広く使われている方法であり、様々な研究者により異なった係数の組み合わせが提案されているが（例えば、佐々木ら，1993），いずれも現地観測および実験に基づいて決定される経験的なモデルである。実際にこれを用いて内湾の流動計算を行った例を見ると、定性的には妥当な結果が得られている。しかし、田中（1993）が指摘しているように、このモデルでは鉛直方向の乱流フラックスの変化が滑らかなものとなるため、躍層下端で乱流フラックスが0となる現地の現象を再現していないことから、時々刻々の躍層の挙動についての再現性は低いものと考えられる。また、本モデルは経験に基づくものであるため、モデルの改良も物理的なものとはなり得ず、今後この方法を発展させていくことは困難である。もっとも、現在は現地の詳細なデータが十分ではなく、モデルの精度を向上させることが困難なため、当分の間は本方法が広く使われるものと思われる。

一方、乱流モデルによるものには $k-\epsilon$ モデルを適用したものや、乱流方程式を簡略化し（例えば、Kowalik and Murty, 1993），物理的考察に基づいて1方程式あるいは0方程式モデルとしたものが数多く提案されているが、世界的に広く用いられているのはPOM (Princeton Ocean Model) にも組み込まれている、Mellor and Yamada (1974) によるモデルであろう。詳細は横山長之編（1992）に述べられているが、その基本的なアイデアは、通常の2次のクロージャーモデルにおいて、物理的考察に基づいて無次元化を行い、相対的に重要でない項を省略あるいは簡略化していくことで、微分方程式の数を減らしていくものである。その簡略化の度合いに応じてレベル3から1までのモデルが提案されている。

4.7.2 水平渦動粘性・拡散係数

現在の内湾モデルの多くは水平格子サイズが数100mから1000m程度のオーダーとなっており、流速と計算時間刻みから得られる長さスケールに比較して著しく格子サイズが大きいため、乱れの微細構造に立ち入ったモデル化が極めて困難である。ところで玉井（1980）によれば、せん断流場における混合現象である「分散」ではなく、「拡散」型とみなせる混合現象のスケールは空間的には10～20km、時間的には数時間のオーダーである。内湾における水平混合現象がこのような「拡散」型であるとした場合、水平拡散係数 K_h と拡散現象のスケール l はCGS単位で、

$$k_h = 0.01 l^{\frac{4}{3}} \quad (\text{cm}^2/\text{s}) \quad (76)$$

となることが資料解析により示されている（玉井，1980）。これを踏まえて数値モデルにおいては空間スケールとして水平格子サイズ Δs をとり、CGS単位系において、

$$K_h = \alpha (\Delta s)^{\frac{4}{3}} \quad \alpha = 0.01 \sim 0.02 \quad (\text{cm}^2/\text{s}) \quad (77)$$

としている場合が多い。

このモデルに対し、中辻ら（1992）は有限要素法による潮流解析に基づき、海峡部のような流速が大きく、小格子により詳細に表現すべき領域の水平拡散係数が、湾中央域のように流速および流速変動は小さいが格子

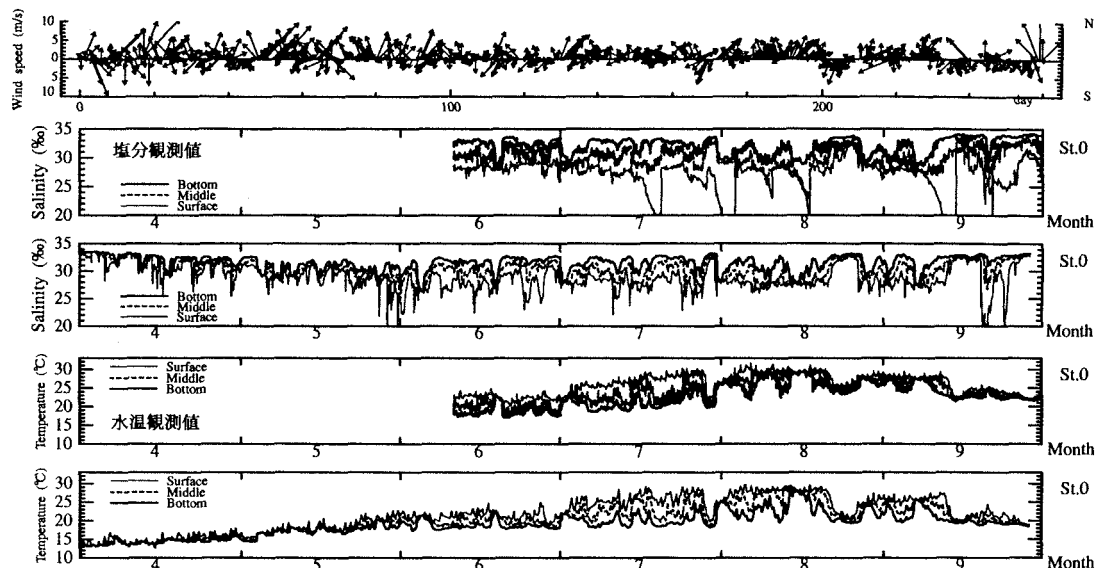


図 10: 東京湾における水温塩分場の長期再現計算. 上から風向・風速観測値, 水温観測値, 水温計算値, 塩分観測値, 塩分計算値

サイズの大きい領域と比較して, 格子サイズが小さいという理由で, 小さな値となる矛盾を指摘した. そこで, 中辻ら (1992) は格子サイズ以上の乱流は Navier-Stokes の方程式で直接計算し, 格子サイズ以下の乱れに関しては局所等方性の理論によりモデル化する LES (Large Eddy Simulation) の考え方を拡大解釈して, 大阪湾の潮流計算に適用し, 定性的には妥当な拡散係数の分布を得ている.

ところで, σ 座標系においては既に指摘したように, 水平方向の移流拡散による鉛直混合が生じやすく, 特に移流項に1次の風上差分やドナーセル差分を適用すると, 数値拡散が本来の拡散をかき消してしまう傾向が見られた. しかし, 佐々木ら (1998) によれば移流項に高解像スキームを適用すると, 数値拡散がかなり抑制され, その結果拡散係数の評価が相対的に重要になることから, 今後さらに合理的なモデルの確立が期待される.

5 東京湾への適用例

準3次数値モデルを東京湾に適用した例は多数存在する (例えば, 田中ら, 1997; 中辻ら, 1995, 小林ら, 1997) が, ここでは, 佐々木ら (1998) による長期再現計算結果について紹介する.

FRAMを採用して, 1時間ごとに気象・海象データを与えながら, 4月1日から半年間の水質再現計算を行った. 計算条件は表??に示した通りである. 計算結果と比較のための現地観測結果 (環境庁水質保全局, 1995) を図10に示す. なお現地観測結果では周期的に表層での塩分値が大きく下がっているが, これは付着生物による出力低下の影響である.

本モデルの計算結果では春先から夏にかけて水温が上昇していく様子や, 成層が形成されていく様子, 秋の成層破壊などの様子が良く再現されている. また, 時々刻々の風の場の変化に対応した水温・塩分変動の微細構造もよく再現されているといえる.

6 おわりに

以上, 内湾における数値モデルの構築法とその再現性の現状について紹介してきたが, 今後, 流動モデルの精度を上げていくためには, 計算スキームの開発, 検討だけでは不十分である. 現地の現象は境界条件が極め

て複雑であり、いたずらにモデルの数値的な精度を上げて、再現性が向上するとは限らない。現状では数値モデルの発達に比較して、モデルの構築および検証に必要な現地のデータが不足しているように思われる。そのため、今後はまず、内湾全体にわたる多点において長期連続観測を行い、検証データを整備していくことが急務であると考ええる。

参考文献

- [1] 石井雅樹 (1998) : 内湾における長期流動数値モデルの改良, 東京大学卒業論文, 80p.
- [2] 市原正史・橋間元徳・鷺見栄一 (1980) : 東京湾における海底摩擦係数の測定について, 海岸工学講演会論文集, Vol. 27, pp. 473-476.
- [3] 岩佐義朗・井上和也・劉 樹坤・阿部 徹 (1983) : 琵琶湖湖流の三次元的な解析, 京大防災研究所年報, Vol. 26 B-2, pp. 531-542.
- [4] 宇野木早苗 (1993) : 沿岸の海洋物理学, 東海大学出版会, 672p.
- [5] 大宮司久明・三宅 裕・吉澤 徹 (1998) : 乱流の数値流体力学, 東京大学出版会, 652p.
- [6] 環境庁水質保全局 (1995) : 青潮発生予測手法の確立調査, 平成6年度 環境庁委託業務結果報告書.
- [7] 久保田雅久・青山 靖 (1990) : 海洋数値モデルにおける Open Boundary Condition, 沿岸海洋研究ノート, Vol. 28, No. 2, pp. 178-200.
- [8] 越塚誠一 (1997) : 数値流体力学, 培風館, 223p.
- [9] 小林卓也・三村信男・塚田光博 (1995) : 三次元潮流シミュレーションによる東京湾の海水混合の解析, 海岸工学論文集, Vol. 42, pp. 1071-1075.
- [10] 近藤純正編 (1994) : 水環境の気象学, 朝倉書店, 350p.
- [11] 佐々木 淳・石井雅樹・磯部雅彦 (1998) : 内湾における高解像流動モデルの開発と東京湾における長期再現計算, 海岸工学論文集, Vol. 45 (印刷中).
- [12] 佐々木 淳・磯部雅彦・渡辺 晃・五明美智男 (1996) : 東京湾における青潮の発生規模に関する考察, 海岸工学論文集, Vol. 43, pp. 1111-1115.
- [13] 佐々木 淳・磯部雅彦・渡辺 晃・五明美智男 (1993) : 東京湾における貧酸素化現象および水温・溶存酸素の季節変動モデル, 海岸工学論文集, Vol. 40, pp. 1051-1055.
- [14] 佐藤勝弘・松岡道男・小林一光 (1993) : 効率的な3次元潮流計算法とその適用性について, 海岸工学論文集, Vol. 40, pp. 221-225.
- [15] 数値流体力学編集委員会編 (1995) : 非圧縮性流体解析, 東京大学出版会, 319p.
- [16] 田中昌宏 (1993) : 成層化した湾の風による混合と流れのモデル化について, 海岸工学論文集, Vol. 40, pp. 1096-1100.
- [17] 田中昌宏・稲垣 聡・八木 宏 (1997) : 東京湾成層期の流動のリアルタイムシミュレーション, 海岸工学論文集, Vol. 44, pp. 386-390.
- [18] 玉井信行 (1980) : 密度流の水理, 技報堂, 260p.
- [19] 中辻啓二・狩野晋一・栗田秀明 (1992) : 水工学論文集, Vol. 36, pp. 693-696.
- [20] 中辻啓二・尹 鐘星・湯浅泰三・村岡浩爾 (1995) : 東京湾における吹送密度流と青潮発生機構との関連性, 海岸工学論文集, Vol. 42, pp. 1066-1070.
- [21] 灘岡和夫・二瓶泰雄・吉野忠和 (1997) : 東京湾における風系の時空間変動特性の実体と湾内海水流動への影響について, 海岸工学論文集, Vol. 44, pp. 396-400.
- [22] 日本海洋学会沿岸海洋研究部会編 (1990) : 続日本全国沿岸海洋誌, 東海大学出版会, 839p.
- [23] 平山彰彦・和氣亜紀夫 (1995) : 浅水域における成層の発達・消滅過程の数値再現, 海岸工学論文集, Vol. 42, pp. 1061-1065.
- [24] 藤井孝蔵 (1994) : 流体力学の数値計算法, 東京大学出版会, 234p.

- [25] 藤井孝蔵 (1998) :乱流の数値流体力学 (大宮司ら編), 東京大学出版会, pp.25-32.
- [26] 松山優治・当麻一良・大脇 厚 (1990): 東京湾の湧昇に関する数値実験, 沿岸海洋研究ノート, Vol. 28, No. 1, pp. 63-74.
- [27] 村上和夫 (1989) : 海水密度の分布を考慮した流れの数値計算法, 港湾技研資料, pp. 3-33.
- [28] 横山長之編 (1992) : 大気環境シミュレーション, 白亜書房, 202p.
- [29] Backhaus, J. O. (1985): A three-dimensional model for the simulation of shelf-sea dynamics, *Dtsch. Hydrogr. Z.*, Vol. 38, pp. 165-187.
- [30] Benqué, J. P., J. A. Cunge, J. Feuillet, A. Hauguel and F. M. Holly, Jr. (1982): New Method for Tidal Current Computation, *J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Division, ASCE*, Vol. 108, No. WW3, pp. 396-417.
- [31] Blumberg, F.A. and G.L. Mellor (1983): Diagnostic and prognostic numerical circulation studies of the South Atlantic Bight, *J. Geophys. Res.*, Vol. 88, pp. 4579-4592.
- [32] Bryan, K. (1969): A numerical Method for the Study of the Circulation of the World Ocean, *J. Computational Phys.*, Vol. 4, pp. 347-376.
- [33] Chapman, M. (1981): FRAM - Nonlinear damping algorithms for the continuity equation, *J. Comput. Phys.*, Vol. 44, pp. 84-103.
- [34] Huang, W. and M. Spaulding (1996): Modeling Horizontal Diffusion with Sigma Coordinate System, *J. Hydraulic Engineering*, Vol. 122, No. 6, pp. 349-352.
- [35] James, I. D. (1984): A three-dimensional numerical shelf-sea front model with variable eddy viscosity and diffusivity, *Continental Shelf Res.*, Vol. 3, No. 1, pp. 69-98.
- [36] Kawahara, M., M. Kobayashi and K. Nakata (1983): Multiple level finite element analysis and its applications to tidal current flow in Tokyo Bay, *Appl. Math. Modelling*, Vol. 7, pp. 197-211.
- [37] Kowalik, Z. and T. S. Murty (1993): Numerical modelling of ocean dynamics, World Scientific, 481p.
- [38] Lardner, R. W. and P. Smoczyński (1990): A vertical/horizontal splitting algorithm for three-dimensional tidal and storm surge computations, *Proc. Royal Soc. London*, Vol. 430 A, pp. 263-283.
- [39] Leendertse, J. J., R. C. Alexander and S. K. Liu (1973): A Three-Dimensional Model for Estuaries and Coastal Seas, Vol. 1, Principles of Computation, *The Rand Corporation, R-1417-OWRR*.
- [40] Leendertse, J. J. and S. K. Liu (1977): A three-dimensional model for estuaries and coastal seas, Vol. IV, Turbulent Energy Computation, *The Rand Corporation R-2187-OWRT*.
- [41] Mellor, G. L. and A. F. Blumberg (1985): Modeling Vertical Horizontal Diffusivities with the Sigma Coordinate System, *Monthly Weather Review*, Vol. 113, pp. 1379-1383.
- [42] Mellor, G. L. and T. Yamada (1974): A hierarchy of turbulence-closure models for planetary boundary layers, *J. Atmos. Sci.*, Vol. 31, pp. 1791-1806.
- [43] Munk, W. H. and E. R. Anderson (1948): Notes on a theory of the thermocline, *J. Mar. Res.*, Vol. 3, pp. 276-295.
- [44] Orlanski, I. (1976): A simple boundary condition for unbounded hyperbolic flows, *J. Comput. Phys.*, Vol. 21, pp. 251-269.
- [45] Patankar (1980): Numerical heat transfer and fluid flow, Hemisphere, Washington, D. C.
- [46] Phillips, N. A. (1957): A coordinate system having some special advantages for numerical forecasting, *Journal of Meteorology*, Vol. 14, pp. 184-185.
- [47] Stelling, G. S. and J. A. TH. M. Van Kester (1994), On the approximation of horizontal gradients in sigma coordinates for bathymetry with steep bottom slopes, *Int. J. Numerical Method in Fluids*, Vol. 18, pp. 915-935.